В. И. ВОЛЬМАН, Ю. В. ПИМЕНОВ

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Под редакцией Г. З. АЙЗЕНБЕРГА

ДОПУЩЕНО МИНИСТЕРСТВОМ СВЯЗИ СССР В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНИКА ДЛЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ СВЯЗИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»
МОСКВА 1971 г.

6Ф1

В-71

УДК 538.3(075.8)

Вольман В. И., Пименов Ю. В.

В-71 Техническая электродинамика. Учебник. М., «Связь», 1971.

487 с. с илл.

Излагаются вопрос электродинамики и кратко — электростатики. сываются линейные эле..енты антенно-волноводного тракта, общая теорı. методы расчета линейных элементов высокочастотных трактов. Приводя практические данные о конструктивном выполнении этих элементов.

Книга рассчитана на студентов институтов связи и радиотехническ вузов и факультетов.

$\frac{3-4-2}{22-71}$ 6Ф1

Рецензенты *Л. Н. Куликов, Б. Ю. Капилевич*

ОГЛАВЛЕНИЕ

›ЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана в соответствии с программой кур- «Техническая электродинамика», читаемого в электротехниче- их институтах связи Министерства связи СССР.

Предполагается, что студентами усвоены разделы курса физи- , посвященные теории электромагнетизма, а также соответствую- ıе разделы курса теории линейных электрических цепей.

Книга состоит из трех частей.

В первой части излагаются основные законы электродинамики. гатические и стационарные поля рассматриваются как частные ıучаи электромагнитного поля.

Вторая часть посвящена анализу излучения, распространения дифракции электромагнитных волн. Описаны некоторые совре- ɜнные методы приближенных решений задач дифракции на те- ıх различной конфигурации (метод краевых волн и геометриче- :ая теория дифракции).

В третьей части излагается теория и технические данные ли- ɜйных устройств свч. При подборе этого материала особое вни- ание уделялось элементам волноводного тракта, применяемым в ›временных многоканальных линиях связи.

Большое внимание в книге уделено физической трактовке ре- ıльтатов анализа, что, по убеждению авторов, содействует лучше- у усвоению материала и развитию научной инициативы сту- ɜнтов.

Авторы полагают, что книга может быть использована в каче- ›ве учебника или учебного пособия не только в институтах связи ıинистерства связи СССР, но также и на радиофакультетах дру- ıх институтов.

В основу книги положены лекции, читаемые авторами в Мо- ковском ордена Трудового Красного Знамени электротехническом нституте связи.

Главы 1—12 написаны Ю. В. Пименовым, а главы 13—22 — З. И. Вольманом.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность научному редактору книги заслуженному деятелю науки и техники профессору Г. З. Айзенбергу, принявшему исключительно большое участие в определении содержания книги и методики изложения.

Авторы с благодарностью приняли и учли при окончательном редактировании рукописи ряд ценных замечаний и пожеланий доцента Б. Ю. Капилевича и доцента Л. Н. Куликова.

Авторы весьма признательны сотрудникам кафедры Технической электродинамики и антенн МЭИС доценту Л. С. Королькевичу, доценту Н. Д. Козыреву и канд. техн. наук Г. А. Ерохину, сделавшим ряд существенных замечаний, учтенных при редактировании рукописи.

Авторы выражают благодарность профессору А. М. Моделю и доктору техн. наук А. К. Столярову, советы и замечания которых способствовали улучшению содержания книги и устранению ряда неточностей.

Авторы с благодарностью примут и учтут пожелания и замечания читателей, которые следует направлять по адресу: Москва-центр, Чистопрудный бульвар, д. 2, издательство «Связь».

Классическая или максвелловская теория электромагнитного поля учитывает только макроскопические свойства вещества: предполагается, что размеры рассматриваемой области пространства и расстояние от источников поля до рассматриваемой точки велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время (например, период колебаний) велико по сравнению с временем, характерным для внутримолекулярных колебательных процессов. На основе классической теории электромагнитного поля может быть изучен широкий круг вопросов, встречающихся в радиотехнике. Классическая теория поля не охватывает, однако, всех его свойств. За ее пределами остаются такие явления, как излучение и поглощение веществом электромагнитных волн очень высокой частоты (например, световых), фотоэффект и др. Строгий анализ подобных явлений должен учитывать микроструктуру вещества и, следовательно, должен базироваться на квантовой теории поля. В пределах данного курса изучается классическая теория электромагнитного поля, т. е. исследуются только его макроскопические свойства.

Электромагнитное поле обычно разделяют на два взаимосвязанных поля: электрическое и магнитное.

Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды. Неподвижные заряды создают только электрическое поле. Движущиеся заряды создают как электрическое, так и магнитное поля. Токи проводимости и конвекционные токи, представляющие собой упорядоченно движущиеся электрические заряды, также создают электромагнитное поле. Заряды взаимодействуют друг с другом, причем сила этого взаимодействия определяется законом Кулона.

Разделение единого электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет относительный характер: оно зависит от выбранной системы координат. Например, движущийся прямолинейно с постоянной скоростью электрический заряд создает вокруг себя как электрическое, так и магнитное поле. Однако для наблюдателя, движущегося в том же направлении с той же скоростью, этот заряд является неподвижным и, следовательно, создает только электрическое поле.

Оба поля могут проявляться в виде механических или, как их принято называть, «пондеромоторных» сил. Если в электрическое поле внести пробный электрический заряд, то под действием этих сил он будет перемещаться. Аналогично магнитное поле изменяет направление движения пробного электрического заряда, а также ориентирует пробный постоянный магнит (магнитную стрелку). Электрическое поле воздействует как на неподвижные, так и на движущиеся заряды, а магнитное — только на движущиеся заряды. Действие электромагнитного поля обладает определенной направленностью, поэтому для его описания вводят векторные величины. Рассмотрим основные векторы, характеризующие электромагнитное поле.

1.2. Векторы электромагнитного поля

ВЕКТОРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Напряженность электрического поля **E** определяют как силу, с которой электрическое поле действует на точечный положительный единичный заряд. Следовательно, между вектором **E** и силой **F**, действующей на точечный заряд q, существует простая связь:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \tag{1.2.1}$$

Заряд q должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменением распределения зарядов, создающих исследуемое поле. Поэтому соотношение (1.2.1) правильнее представить в форме

$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q}. \tag{1.2.2}$$

В системе СИ сила измеряется в ньютонах (*н*), а заряд — в кулонах (*к*), поэтому вектор **E** измеряется в вольтах на метр ($[\mathbf{E}] = [\mathbf{F}]/[q] = н/к = в \cdot а \cdot сек/м \cdot а \cdot сек = в/м$).

Сила взаимодействия зарядов, а следовательно, и напряженность электрического поля в различных средах различны. Физически это объясняется следующим образом. Под действием электрического поля вещество поляризуется. В результате появляется дополнительное электрическое поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное электрическое поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме.

Поляризация — сложный физический процесс, непосредственно связанный с атомной структурой вещества. Упрощенно этот процесс можно объяснить следующим образом. Каждый атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Суммарный заряд атома равен нулю. Соединения атомов образуют молекулы. Различают *полярные* и *неполярные* молекулы. В неполярных молекулах распределение положительных и отрицательных зарядов таково, что точка приложения равнодействующих сил поля, действующих на все электроны, совпадает с точкой приложения равнодействующей сил поля, действующих на все протоны. Это, как известно, возможно лишь при условии, что центр тяжести всех электронов молекулы совпадает с центром тяжести всех ее протонов. В полярных молекулах центр тяжести электронов сдвинут относительно центра тяжести протонов. Поэтому полярную молекулу можно уподобить крошечному электрическому диполю — системе из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов ($+q$ и $-q$), расположенных на некотором малом расстоянии l друг от друга. Диполи обычно характеризуют дипольным моментом $\mathbf{p}$. Дипольный момент — вектор, численно равный произведению величины заряда на расстояние между зарядами, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному:

$$\mathbf{p} = \mathbf{l}_0 p = \mathbf{l}_0 q l, \tag{1.2.3}$$

где $\mathbf{l}_0$ — орт вектора, соединяющего заряды $-q$ и $+q$. Размерность дипольного момента — «кулон·метр» (*к·м*).

Суммарный дипольный момент объема ΔV вещества равен геометрической сумме дипольных моментов $\mathbf{p}_i$ молекул в этом объеме: $\mathbf{p} = \sum\limits_{\Delta V} \mathbf{p}_i$. Внешнее электрическое поле оказывает силовое воздействие на диполь, стремясь повернуть его таким образом, чтобы он был ориентирован по полю, причем момент приложенных к диполю сил $\mathbf{K}$ (рис. 1.2.1)

$$\mathbf{K} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}]. \tag{1.2.4}$$

Неполярные молекулы не обладают собственным дипольным моментом. Однако под действием внешнего электрического поля в такой молекуле перераспределяется отрицательный заряд, и она становится полярной: у нее появляется дипольный момент. Дипольные моменты отдельных молекул ориентируются по полю, и суммарный дипольный момент оказывается отличным от нуля. Этот процесс принято называть *электронной поляризацией*.

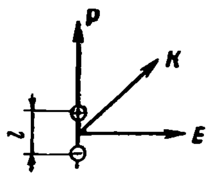


Рис. 1.2.1

Полярные молекулы обладают собственными дипольными моментами. В отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты отдельных молекул ориентированы хаотически, и суммарный дипольный момент равен нулю. Под действием внешнего электрического поля происходит ориентация отдельных молекул, в результате чего появляется суммарный дипольный момент. Этот процесс называют ***ориентационной поляризацией***. Очевидно, что ориентационная поляризация всегда сопровождается электронной.

Указанные типы поляризации являются основными в газообразных и жидких средах. Поляризация твердых сред имеет некоторые особенности, но сущность явления остается той же.

Для характеристики поляризации вводят ***вектор поляризованности*** $\mathbf{P}$, определяемый как предел отношения суммарного дипольного момента вещества в объеме ΔV к величине этого объема при $\Delta V \to 0$:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{\Delta V} \mathbf{p}_i}{\Delta V}. \tag{1.2.5}$$

Вектор $\mathbf{P}$ измеряется в кулонах на квадратный метр (*к/м²*).

Как уже отмечалось, в классической электродинамике рассматриваемый объем всегда предполагается большим по сравнению с объемом отдельной молекулы. Это относится и к случаю элементарного объема dV. Поэтому выражение $\Delta V \to 0$ нельзя рассматривать в строго математическом смысле: при любом уменьшении объема ΔV его нужно считать достаточно большим по сравнению с объемом молекулы. Аналогичные предположения следует сделать относительно элементарной длины dl и элементарной площадки dS. В дальнейшем будем считать это условие выполненным.

При не очень сильном внешнем поле величину индуцированного дипольного момента можно считать пропорциональной напряженности электрического поля:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 k_э \mathbf{E}. \quad (1.2.6)$$

Входящий в ф-лу (1.2.6) безразмерный параметр $k_э$ характеризует среду и называется *диэлектрической восприимчивостью* среды. Постоянный коэффициент ε_0 называется *электрической постоянной*. Его величина зависит от выбора системы единиц. В системе СИ $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\,\pi$, *ф/м* [1]).

При рассмотрении многих процессов удобно ввести вектор $\mathbf{D}$, связанный с вектором $\mathbf{P}$ соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.2.7)$$

С учетом ф-лы (1.2.6) ф-лу (1.2.7) можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon_а \mathbf{E}, \quad (1.2.8)$$

где

$$\varepsilon_а = \varepsilon_0 (1 + k_э). \quad (1.2.9)$$

Вектор $\mathbf{D}$ принято называть *вектором электрического смещения*, а параметр $\varepsilon_а$ — *абсолютной диэлектрической проницаемостью* среды. Так как диэлектрическая восприимчивость вакуума равна нулю ($k_э = 0$), то электрическую постоянную ε_0 можно рассматривать, как диэлектрическую проницаемость вакуума. Электрическое смещение $\mathbf{D}$ измеряется в кулонах на квадратный метр ($к/м^2$), а диэлектрическая проницаемость — в фарадах на метр (*ф/м*). Размерность $\varepsilon_а$ следует из ф-лы (1.2.9), а размерность $\mathbf{D}$ — из (1.2.8).

Наряду с $\varepsilon_а$ часто вводят *относительную диэлектрическую проницаемость* среды ε, связанную с $\varepsilon_а$ соотношением [2])

$$\varepsilon_а = \varepsilon_0 \varepsilon. \quad (1.2.10)$$

Сравнивая ф-лы (1.2.10) и (1.2.9), находим связь относительной диэлектрической проницаемости среды ε с диэлектрической восприимчивостью $k_э$:

$$\varepsilon = 1 + k_э. \quad (1.2.11)$$

---

[1]) Размерность ε_0 следует из ф-лы (1.2.6): $[\varepsilon_0] = [\mathbf{P}]/[\mathbf{E}] = к/в \cdot м = ф/м$.

[2]) Значения параметра ε для некоторых сред приведены в приложении 1.

Следует подчеркнуть, что соотношения (1.2.6) и (1.2.8) являются приближенными. В большинстве сред пропорциональность векторов **P** и **E**, а следовательно, и пропорциональность векторов **D** и **E** нарушается в сильных электрических полях. В некоторых веществах пропорциональность нарушается даже при сравнительно слабых полях. Кроме того, параметры $k_э$ и ε зависят от скорости изменения вектора **E** во времени. Дело в том, что молекулы обладают инерцией и требуется некоторое время, чтобы они изменили ориентацию под действием поля. В данной книге будет использоваться соотношение (1.2.8), так как в рассматриваемых вопросах его можно считать справедливым.

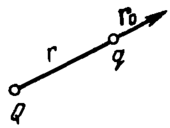


Рис. 1.2.2

Рассмотрим электрическое поле, созданное точечным зарядом Q. Согласно закону Кулона сила, с которой точечный заряд Q действует на точечный заряд q,

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_a r^2}, \qquad (1.2.12)$$

где r — расстояние между зарядами Q и q, а $\mathbf{r}_0$ — орт вектора $\mathbf{r}$, проведенного от Q к q (рис. 1.2.2).

Из определения вектора **E** [ф-ла (1.2.1)] следует, что напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q,

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}. \qquad (1.2.13)$$

Переходя к вектору **D** на основе равенства (1.2.8), получаем

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0 \frac{Q}{4\pi r^2}. \qquad (1.2.14)$$

В выражение (1.2.14) не входит параметр ε_a. Следовательно, при одинаковом распределении свободных зарядов вектор **D** имеет одинаковые значения в разных средах, т. е. не зависит от «связанных» зарядов вещества. Эта особенность вектора **D** характерна не только для поля, созданного точечными зарядами, но и для любого поля, созданного более сложным распределением зарядов.

ВЕКТОРЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Сила, с которой электромагнитное поле воздействует на точечный электрический заряд, зависит не только от местоположения и величины заряда, но также от скорости его движения. Эту силу обычно раскладывают на две: электрическую и магнитную. Электрическая сила не зависит от движения заряда:

$$\mathbf{F}_э = q\mathbf{E}. \qquad (1.2.15)$$

Магнитная сила $\mathbf{F}_м$ зависит от величины и направления скорости $\mathbf{v}$ движения заряда и всегда перпендикулярна ей:

$$\mathbf{F}_м = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \qquad (1.2.16)$$

Здесь **B** — *вектор магнитной индукции*, характеризующий силовое воздействие магнитного поля. Из ф-лы (1.2.16) следует, что магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный точечный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям вектора **B**. Магнитная индукция измеряется в «веберах на квадратный метр» ($вб/м^2$). Размерность можно определить из (1.2.16): $[\mathbf{B}]=[\mathbf{F}]/[q][\mathbf{v}]=$ $=н\cdot сек/к\cdot м=в\cdot а\cdot сек^2/а\cdot м\cdot сек=в\cdot сек/м^2=вб/м^2$.

Полная сила, действующая на точечный заряд q, находящийся в электромагнитном поле (лоренцова сила),

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q[\mathbf{v},\ \mathbf{B}]. \qquad (1.2.17)$$

Магнитное поле действует, конечно, не только на отдельные движущиеся заряды, но и на проводники, по которым течет электрический ток. Например, сила **F**, с которой однородное магнитное поле действует на прямолинейный проводник длиной l с током I, определяется экспериментально установленным законом

$$\mathbf{F}=l[\mathbf{I},\ \mathbf{B}], \qquad (1.2.18)$$

где **I** — вектор, численно равный величине тока I, направление которого совпадает с направлением тока в проводнике, т. е. с направлением движения положительных зарядов. Отметим, что ф-ла (1.2.18) является следствием ф-лы (1.2.16).

Если в магнитное поле внести достаточно малую[1]) плоскую рамку, обтекаемую током I, то на нее будет действовать момент сил **K**, стремящийся повернуть рамку таким образом, чтобы ее плоскость была перпендикулярна вектору **B**. Поясним это на примере рамки, показанной на рис. 1.2.3. Так как рамка предполагается малой, то магнитное поле в ее пределах можно считать однородным. Токи, протекающие вдоль сторон ab и cd рамки, направлены противоположно друг другу. Поэтому силы, с которыми магнитное поле действует на элементы ab и cd рамки, будут согласно ф-ле (1.2.18) равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, на рамку $abcd$ будет действовать пара сил, стремящихся ее повернуть.

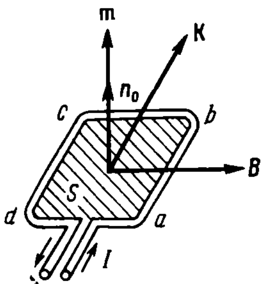


Рис. 1.2.3

Момент сил, действующий на достаточно малую плоскую рамку с площадью S, находящуюся в магнитном поле, определяется выражением

$$\mathbf{K}=IS[\mathbf{n}_0,\ \mathbf{B}], \qquad (1.2.19)$$

[1]) Рамка должна быть достаточно малой, чтобы в ее пределах магнитное поле можно было считать однородным.

где $\mathbf{n}_0$ — орт нормали к плоскости рамки, образующий с направлением тока I, обтекающего рамку, правовинтовую систему.

Рамки с током обычно характеризуют величиной

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}_0 I S, \qquad (1.2.20)$$

называемой *магнитным моментом рамки*. Размерность вектора $\mathbf{m}$ — ампер. квадратный метр ($a \cdot м^2$).

Подставляя ф-лу (1.2.20) в (1.2.19), получаем

$$\mathbf{K} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}]. \qquad (1.2.21)$$

Отметим, что выражение (1.2.21) аналогично выражению (1.2.4) для момента сил, действующего на диполь, находящийся в электрическом поле.

Из ф-лы (1.2.21) следует, что момент сил, действующий на рамку, находящуюся в магнитном поле, стремится повернуть ее так, чтобы момент рамки совпадал с направлением вектора $\mathbf{B}$. Величина вектора $\mathbf{B}$ зависит от свойств среды. Физически это объясняется следующим образом. Под действием магнитного поля вещество намагничивается. В результате появляется дополнительное магнитное поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное магнитное поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме.

Явление намагничивания — сложный физический процесс, непосредственно связанный с атомной структурой вещества. Упрощенно его можно представить следующим образом. Атомы и молекулы многих веществ обладают магнитным моментом и могут быть уподоблены маленьким рамкам с током. Каждая рамка с током, как известно, создает собственное магнитное поле, пропорциональное ее магнитному моменту. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул, как правило, направлены хаотически, и суммарный магнитный момент рассматриваемого объема ΔV $\mathbf{m} = \sum\limits_{\Delta V} \mathbf{m}_i$, представляющий собой геометрическую сумму магнитных моментов $\mathbf{m}_i$ отдельных молекул в объеме ΔV, равен нулю, т. е. магнитные поля отдельных молекул взаимно компенсируются. Под действием внешнего магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов отдельных молекул, и суммарный магнитный момент оказывается отличным от нуля.

Образующееся в результате намагничивания дополнительное магнитное поле может как ослаблять, так и усиливать первичное поле. Среды, в которых магнитное поле ослабляется, называют *диамагнитными*, среды, в которых поле незначительно усиливается, называют *парамагнитными*, а среды, в которых происходит существенное усиление магнитного поля, — *ферромагнитными*. Явление намагничивания и особенности свойств ферромагнитных сред будут более подробно рассмотрены в гл. 22.

Намагниченность среды характеризуют *вектором намагниченности* $\mathbf{M}$, который определяют как предел отношения суммарного магнитного момента вещества в объеме ΔV к величине этого объема при $\Delta V \to 0$:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{\Delta V} \mathbf{m}_i}{\Delta V}. \tag{1.2.22}$$

Вектор **M** измеряется в амперах на метр (*а/м*).

При рассмотрении многих процессов удобно вместо вектора **M** ввести вектор **H**, связанный с **M** соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \tag{1.2.23}$$

где μ_0 — постоянная величина, называемая *магнитной постоянной*, значение и размерность которой зависят от выбора системы единиц. В системе СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м* [1]).

Вектор **H** принято называть *напряженностью магнитного поля*. Он, как и вектор **M**, измеряется в амперах на метр (*а/м*). Отметим важное свойство вектора **H**. При одинаковых источниках магнитного поля значения этого вектора не зависят от среды, т. е. вектор **H** не зависит от внутримолекулярных токов вещества. При не очень сильном внешнем магнитном поле можно считать, что вектор **M** пропорционален вектору **B**. В силу линейности ур-ния (1.2.23) можно также считать пропорциональными векторы **M** и **H**:

$$\mathbf{M} = k_{\text{м}} \mathbf{H}. \tag{1.2.24}$$

Безразмерный коэффициент $k_{\text{м}}$ называют *магнитной восприимчивостью* среды. У диамагнитных сред параметр $k_{\text{м}}$ отрицательный, у парамагнитных и ферромагнитных — положительный. У диамагнитных и парамагнитных сред $|k_{\text{м}}| \ll 1$, у ферромагнитных $k_{\text{м}}$ — значительно больше 1. Подставляя (1.2.24) в (1.2.23), получаем

$$\mathbf{B} = \mu_{\text{а}} \mathbf{H}, \tag{1.2.25}$$

где

$$\mu_{\text{а}} = \mu_0 (1 + k_{\text{м}}). \tag{1.2.26}$$

Коэффициент пропорциональности $\mu_{\text{а}}$ между векторами **B** и **H** называют *абсолютной магнитной проницаемостью* среды. Магнитная проницаемость среды измеряется в *гн/м*. Из ф-лы (1.2.26) следует, что магнитную постоянную μ_0 можно рассматривать как магнитную проницаемость вакуума (в случае вакуума $k_{\text{м}} = 0$).

Наряду с абсолютной магнитной проницаемостью среды $\mu_{\text{а}}$ вводят также *относительную магнитную проницаемость* μ, связанную с $\mu_{\text{а}}$ соотношением [2]).

$$\mu_{\text{а}} = \mu_0 \mu. \tag{1.2.27}$$

---

[1]) Размерность магнитной постоянной можно определить из ф-лы (1.2.23): $[\mu_0] = [\mathbf{B}]/[\mathbf{M}] =$ *вб·м/а = гн/м*.

[2]) Значения параметра μ для некоторых сред приведены в приложении 2.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

2.1. Первое уравнение Максвелла

В предыдущей главе было введено шесть векторов **E**, **P**, **D**, **B**, **M** и **H**, характеризующих электромагнитное поле. Так как векторы **E**, **P**, **D** электрического поля связаны соотношением (1.2.7), а векторы **B**, **M**, **H** магнитного поля — соотношением (1.2.23), то для определения электромагнитного поля можно ограничиться нахождением четырех векторов. Обычно в качестве таких векторов используют векторы **E**, **D**, **B** и **H**. В линейных изотропных средах, для которых справедливы соотношения (1.2.8) и (1.2.25), электромагнитное поле может быть полностью определено двумя векторами (обычно **E** и **H**).

Все электромагнитные процессы, относящиеся к макроскопической электродинамике, подчиняются законам, впервые сформулированным в виде дифференциальных уравнений Дж. К. Максвеллом, которые были опубликованы им в 1873 г. Эти уравнения были получены в результате обобщения накопленных к тому времени экспериментальных данных и называются «Уравнениями Максвелла».

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока (закона Ампера). В домаксвелловской трактовке это уравнение могло быть сформулировано следующим образом: циркуляция вектора напряженности **H** магнитного поля по замкнутому контуру Г равна току I, пронизывающему данный контур

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = I. \qquad (2.1.1)$$

В качестве контура Г может быть взят любой замкнутый контур при условии, что он охватывает ток I не больше одного раза.

До Максвелла под током I понимали только ток проводимости. В общем случае распределение тока I внутри контура Г может быть неравномерным. При этом

$$I = \int_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}, \qquad (2.1.2)$$

где S — произвольная поверхность, опирающаяся на контур Г;

$\mathbf{dS}=\mathbf{n}_0 dS$; $\mathbf{n}_0$ — орт нормали к поверхности S, образующий правовинтовую систему с направлением обхода контура (рис. 2.1.1), а $\mathbf{j}$ — вектор объемной плотности тока проводимости:

$$\mathbf{j} = \mathbf{N}_0 \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} . \qquad (2.1.3)$$

Здесь $\mathbf{N}_0$ — единичный вектор, показывающий направление тока; ΔI — ток, протекающий через площадку ΔS, перпендикулярную к вектору $\mathbf{N}_0$. Объемная плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр *(а/м²)*. Подставляя ф-лу (2.1.2) в (2.1.1), получаем

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}\, \mathbf{dl} = \int_{S} \mathbf{j}\, \mathbf{dS}. \qquad (2.1.4)$$

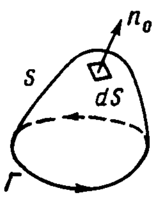


Рис. 2.1.1

Уравнения (2.1.1) и (2.1.4), справедливые в случае постоянных токов и поля, оказываются неверными в случае переменных процессов.

Максвелл дал обобщенную формулировку закона полного тока. Он ввел фундаментальное понятие тока смещения и, основываясь на работах Фарадея, предположил, что в случае переменных полей ток смещения с точки зрения образования магнитного поля равноценен току проводимости.

Примером электрической системы, в которой преобладают токи смещения, может служить конденсатор в цепи переменного тока. Переменный ток может циркулировать между обкладками конденсатора даже в том случае, когда они разделены идеальным диэлектриком или находятся в вакууме и, следовательно, образование тока проводимости невозможно. Соединительный провод, по которому течет ток проводимости, окружен кольцевыми линиями магнитного поля, которые как бы образуют «оболочку» вокруг всего провода. Максвелл предположил, что эта «оболочка» не обрывается у пластин конденсатора, а образует замкнутую поверхность, т. е. изменяющееся электрическое поле конденсатора также окружено кольцевыми линиями магнитного поля. Таким образом, переменное электрическое поле, так же как и ток проводимости, сопровождается появлением магнитного поля. Это дало основание ввести понятие о новом виде тока, получившем название *тока смещения*. Плотность тока смещения определяется формулой

$$\mathbf{j}^{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} . \qquad (2.1.5)$$

Как и плотность тока проводимости, она измеряется в амперах на квадратный метр *(а/м²)*.

Подчеркнем, что ток проводимости и ток смещения в вакууме имеют различную физическую сущность. Ток проводимости — это упорядоченное движение свободных электрических зарядов. Ток смещения в вакууме соответствует только изменению электрического поля и не сопровождается каким-либо движением электрических зарядов. В вакууме $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$ и ур-ние (2.1.5) принимает вид $\mathbf{j}^{см}=\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$. Ток смещения в вакууме не сопровождается выделением тепла.

Рассмотрим общий случай, когда ток смещения возникает в какой-либо среде. Вектор электрического смещения связан с векторами напряженности электрического поля и поляризованности среды соотношением (1.2.7). Подставляя это соотношение в (2.1.5), получаем

$$\mathbf{j}^{см}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \tag{2.1.6}$$

Первое слагаемое в правой части ф-лы (2.1.6) совпадает с выражением для плотности тока смещения в вакууме, т. е. определяет как бы «чистый» ток смещения, не связанный непосредственно с движением зарядов. Второе слагаемое определяет ток смещения, обусловленный движением зарядов, связанных с атомами вещества, в результате действия переменного поля. Эту составляющую тока смещения можно рассматривать как своеобразный ток проводимости, так как она, по существу, обусловлена упорядоченным перемещением «связанных» зарядов.

Вернемся к закону полного тока. Как уже указывалось, Максвелл предположил, что ур-ние (2.1.1) имеет частный характер, так как не учитывает токов смещения. Для того чтобы оно было справедливым и в случае переменных полей, нужно в его правую часть, помимо тока проводимости I, ввести ток смещения $I^{см}$:

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{H}\,d\mathbf{l}=I+I^{см}. \tag{2.1.7}$$

Ток смещения $I^{см}$ выражается через плотность тока смещения $\mathbf{j}^{см}$ соотношением

$$I^{см}=\int_S\mathbf{j}^{см}\,d\mathbf{S}=\int_S\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}. \tag{2.1.8}$$

Подставляя ф-лы (2.1.8) и (2.1.2) в (2.1.7), получаем

$$\oint_{\Gamma}\mathbf{H}\,d\mathbf{l}=\int_S\mathbf{j}\,d\mathbf{S}+\int_S\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,d\mathbf{S}. \tag{2.1.9}$$

Уравнение (2.1.9) сформулировано применительно к контуру конечных размеров. Оно представляет собой *первое уравнение Максвелла в интегральной форме.*

Максвеллом этот закон был сформулирован в дифференциальной форме. Для перехода к дифференциальной форме воспользуемся теоремой Стокса. Заменяя в ур-нии (2.1.9) циркуляцию вектора $\mathbf{H}$ интегралом от rot $\mathbf{H}$ по поверхности S, получаем

$$\int_S\operatorname{rot}\mathbf{H}\,d\mathbf{S}=\int_S\left(\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)d\mathbf{S}. \tag{2.1.10}$$

Так как S — произвольная поверхность, то равенство (2.1.10) возможно только в том случае, если

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (2.1.11)$$

Равенство (2.1.11) называют *первым уравнением Максвелла.* Векторное ур-ние (2.1.11) эквивалентно трем скалярным уравнениям, которые в прямоугольной системе координат x, y, z имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{dy} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{dt} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1.12)$$

2.2. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона индукции Фарадея, который формулируется следующим образом: если замкнутый контур Г пронизывается переменным потоком Φ, то в контуре возникает эдс e, равная скорости изменения магнитного потока

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2.2.1)$$

Знак минус в правой части ф-лы (2.2.1) означает, что возникающая в контуре эдс всегда как бы стремится воспрепятствовать изменению потока, пронизывающего данный контур. Это положение известно под названием «правило Ленца».

До Максвелла считалось, что ур-ние (2.2.1) справедливо только в случае проводящего контура. Максвелл предположил, что ур-ние (2.2.1) справедливо также и в том случае, если среда не обладает проводимостью.

Электродвижущая сила, наводимая в любом замкнутом контуре Г, равна циркуляции вектора **E** по этому контуру

$$e = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}, \qquad (2.2.2)$$

а магнитный поток Φ связан с вектором **B** соотношением

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}, \qquad (2.2.3)$$

где S — произвольная поверхность, опирающаяся на контур Г; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$; $\mathbf{n}_0$ — орт нормали к поверхности S, образующий правовинтовую систему с обходом контура Г (рис. 2.1.1).

Подставляя ф-лы (2.2.2) и (2.2.3) в (2.2.1), получаем

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S} \mathbf{B}\, d\mathbf{S}. \tag{2.2.4}$$

Соотношение (2.2.4) сформулировано для контура конечных размеров и называется *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме.* Максвеллом это уравнение было сформулировано в дифференциальной форме.

Предположим, что контур Г неподвижен и не изменяется со временем. В этом случае производную по времени в правой части ур-ния (2.2.4) можно внести под знак интеграла. Преобразовывая левую часть (2.2.4) по теореме Стокса, получаем

$$\int_{S} \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \tag{2.2.5}$$

Так как S — произвольная поверхность, равенство (2.2.5) возможно только в том случае, если

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.2.6}$$

Соотношение (2.2.6) называют *вторым уравнением Максвелла.*

Переходя к прямоугольной системе координат x, y, z, получаем три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned}\right\}. \tag{2.2.7}$$

2.3. Третье уравнение Максвелла

Третье уравнение Максвелла является обобщением закона Гаусса на случай переменных процессов. Закон Гаусса связывает поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность S с зарядом Q, сосредоточенным внутри этой поверхности:

$$\oint_{S} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = Q, \tag{2.3.1}$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$; $\mathbf{n}_0$ — орт внешней нормали к поверхности S.

До Максвелла ур-ние (2.3.1) рассматривалось только в применении к постоянным полям. Максвелл предположил, что его можно использовать и в случае переменных полей.

Заряд Q может быть произвольно распределен внутри поверхности S. Поэтому в общем случае

$$Q=\int_V \rho\, dV, \tag{2.3.2}$$

где V — объем, заключенный внутри поверхности S; ρ — объемная плотность заряда, которая определяется как предел отношения заряда ΔQ, сосредоточенного внутри объема ΔV, к объему ΔV при неограниченном уменьшении ΔV:

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V},\ \frac{к}{м^3}. \tag{2.3.3}$$

Подставляя ф-лу (2.3.2) в (2.3.1), получаем

$$\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S}=\int_V \rho\, dV. \tag{2.3.4}$$

Уравнение (2.3.4) обычно называют *третьим уравнением Максвелла в интегральной форме.*

Для перехода к дифференциальной форме преобразуем левую часть ур-ния (2.3.4) по теореме Остроградского-Гаусса. В результате получим

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{D}\, dV=\int_V \rho\, dV. \tag{2.3.5}$$

Равенство (2.3.5) выполняется при любом объеме V. Это возможно только в том случае, если

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho. \tag{2.3.6}$$

Соотношение (2.3.6) принято называть *третьим уравнением Максвелла.*

В прямоугольной системе координат x, y, z ур-ние (2.3.6) записывается в виде

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho. \tag{2.3.7}$$

Из равенства (2.3.6) следует, что дивергенция вектора $\mathbf{D}$ отлична от нуля в тех точках пространства, где имеются свободные заряды. В этих точках линии вектора $\mathbf{D}$ имеют начало (исток) или конец (сток). Линии вектора $\mathbf{D}$ начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

В отличие от вектора $\mathbf{D}$, истоками (стоками) вектора $\mathbf{E}$ могут быть как свободные, так и связанные заряды. Чтобы показать это, перепишем ур-ние (2.3.6) для вектора $\mathbf{E}$. Подставляя соотношение (1.2.7) в ур-ние (2.3.6), получаем

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E}=\rho-\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{2.3.8}$$

Второй член в правой части выражения (2.3.8) имеет смысл объемной плотности зарядов ρ_p, возникающих в результате неравномерной поляризации среды (такие заряды будем называть поляризационными), т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_p. \tag{2.3.9}$$

Поясним возникновение поляризационных зарядов на следующем примере. Пусть имеется поляризованная среда (рис. 2.3.1). Выделим мысленно внутри нее объем ΔV, ограниченный поверхностью ΔS. В результате поляризации в среде происходит смещение зарядов, связанных с молекулами вещества. Если объем ΔV мал, а поляризация неравномерная, то в объем ΔV с одной стороны может войти больше зарядов, чем войдет с другой (на рис. 2.3.1 объем ΔV показан пунктиром). Подчеркнем, что поляризационные заряды являются «связанными» и возникают только под действием электрического поля. Знак минус в ф-ле (2.3.9) следует из определения вектора $\mathbf{P}$ (см. разд. 1.2). Линии вектора $\mathbf{P}$ начинаются на отрицательных зарядах и заканчиваются на положительных зарядах.

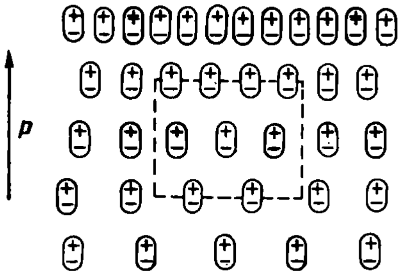


Рис. 2.3.1

Подставляя ф-лу (2.3.9) в (2.3.8), приходим к уравнению

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho + \rho_p, \tag{2.3.10}$$

из которого и следует сделанное выше утверждение, что истоками (стоками) линий вектора $\mathbf{E}$ являются как свободные, так и связанные заряды.

2.4. Четвертое уравнение Максвелла

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме совпадает с законом Гаусса для магнитного поля, который можно сформулировать следующим образом. Поток вектора $\mathbf{B}$ через любую замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0. \tag{2.4.1}$$

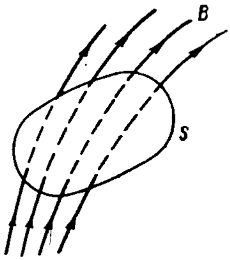


Рис. 2.4.1

Это означает, что не существует линий вектора $\mathbf{B}$, которые только входят в замкнутую поверхность S (или, наоборот, только выходят из поверхности S): они всегда пронизывают ее (рис. 2.4.1).

Уравнение (2.4.1) называют *четвертым уравнением Максвелла в интегральной форме*. К дифференциальной форме (2.4.1) можно перейти с помощью теоремы Остроградского—Гаусса так же, как это было сделано в случае третьего уравнения Максвелла. В результате получим

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{2.4.2}$$

Уравнение (2.4.2) представляет собой *четвертое уравнение Максвелла.* Оно показывает, что в природе отсутствуют магнитные заряды. Из этого уравнения также следует, что линии вектора **B** (силовые линии магнитного поля) являются непрерывными.

2.5. Уравнение непрерывности

Уравнение непрерывности можно получить из первого уравнения Максвелла. Возьмем дивергенцию от обеих частей равенства (2.1.11). Учитывая, что дивергенция ротора любого вектора равна нулю, и используя ур-ние (2.3.6), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.5.1}$$

Правая часть ур-ния (2.1.11) представляет собой сумму плотностей тока проводимости и тока смещения, т. е. плотность полного тока $\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t$. Уравнение (2.5.1) эквивалентно условию $\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{полн}} = 0$. Равенство нулю дивергенции какого-либо вектора означает непрерывность линий этого вектора. Следовательно, ур-ние (2.5.1) показывает, что линии плотности полного тока являются непрерывными, в то время как линии токов проводимости и смещения могут иметь начало и конец. Например, линии плотности тока проводимости начинаются в тех точках пространства, где плотность зарядов уменьшается и заканчиваются там, где плотность зарядов возрастает.

Уравнение (2.5.1) тесно связано с законом сохранения заряда и, по существу, является его дифференциальной формой. Закон сохранения заряда можно сформулировать следующим образом. Всякому изменению величины заряда, распределенного в некоторой области, соответствует электрический ток I, втекающий в эту область или вытекающий из нее:

$$I = -\frac{dQ}{\partial t}. \tag{2.5.2}$$

Покажем, что ур-ние (2.5.2) можно получить из ур-ния (2.5.1). Проинтегрируем последнее по объему V. Преобразовывая левую часть получающегося равенства по теореме Остроградского-Гаусса, а в первой части меняя порядок интегрирования и дифференцирования, приходим к уравнению

$$\oint_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dV, \tag{2.5.3}$$

совпадающему с (2.5.2). Ток $I = \oint_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}$ положителен (т. е. вытекает из объема V), если заряд $Q=\int\limits_V \rho dV$ уменьшается, и, наоборот, отрицателен (т. е. втекает в объем), если заряд увеличивается.

Закон сохранения заряда (2.5.3) был получен из уравнения непрерывности. Очевидно, можно было поступить наоборот: постулировать закон сохранения заряда, как экспериментальный закон, а из него независимо от уравнений Максвелла вывести уравнение непрерывности.

Используя уравнение непрерывности, можно обосновать постулированное ранее соотношение (2.1.5), определяющее вектор плотности тока смещения. Действительно, применяя теорему Стокса к левой части ур-ния (2.1.4), выражающего закон Ампера, получаем следующее соотношение:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{2.5.4}$$

Так как $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$, то из равенства (2.5.4) следует, что $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$. Последнее равенство заведомо несправедливо для переменных процессов, так как в этом случае должно выполняться уравнение непрерывности (2.5.1), вытекающее из закона сохранения заряда (2.5.3). Чтобы уравнение (2.5.4) стало пригодным для переменных процессов, его надо видоизменить, добавив в его правую часть некоторую функцию, имеющую размерность плотности тока и удовлетворяющую условию, что ее дивергенция равна $\partial\rho/\partial t$. В качестве такой функции следует взять функцию $\partial \mathrm{D}/\partial t$, так как указанное условие будет выполнено в силу третьего уравнения Максвелла (2.3.6). Получающееся при этом из (2.5.4) уравнение будет полностью совпадать с первым уравнением Максвелла (2.1.11).

Отметим, что ур-ние (2.1.11) было получено Максвеллом на основе аналогичных рассуждений.

2.6. Закон Ома в дифференциальной форме

К основным уравнениям электродинамики относят также закон Ома в дифференциальной форме, который выражает зависимость плотности тока проводимости $\mathbf{j}$ в какой-либо точке проводящей среды от напряженности электрического поля в этой точке. Перейти от обычного закона Ома к его дифференциальной форме можно следующим образом. Выделим внутри проводника достаточно малый цилиндр, торцы которого перпендикулярны линиям тока (рис. 2.6.1). Размеры цилиндра выберем так, чтобы плотность тока проводимости $\mathbf{j}$ можно было считать неизменной в пределах его торцов, а линии тока — параллельными оси цилиндра. Со-

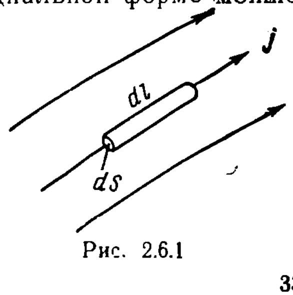


Рис. 2.6.1

гласно закону Ома ток dI вдоль оси выбранного цилиндра

$$dI = \frac{du}{R}, \qquad (2.6.1)$$

где R — сопротивление рассматриваемого цилиндра; du — напряжение между его торцами.

Сопротивление R можно выразить через геометрические размеры цилиндра и удельную проводимость σ вещества проводника, а именно, $R = \frac{1}{\sigma}\frac{dl}{dS}$, где dS — площадь поперечного сечения цилиндра, а dl — длина его образующей. Напряженность электрического поля **E** совпадает по направлению с плотностью тока. Представим напряжение между торцами цилиндра в виде $du = \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = E\,dl$. Подставляя выражения для R и du в ф-лу (2.6.1), получаем $dI = \sigma E dS$. Разделив обе части последнего равенства на dS, приходим к соотношению $j = \sigma E$, которое можно переписать в векторной форме:

$$\mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}. \qquad (2.6.2)$$

Уравнение (2.6.2) принято называть *законом Ома в дифференциальной форме*.

Коэффициент пропорциональности между векторами **j** и **E** в ур-нии (2.6.2) — удельная проводимость σ — является важной характеристикой среды. В изотропных средах в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля σ — скалярная величина. Ее значение зависит от температуры: с повышением температуры удельная проводимость уменьшается.

Во многих анизотропных средах, например в большинстве кристаллических сред, параметр σ является тензором. При этом плотность тока проводимости и напряженность электрического поля в общем случае не совпадают по направлению.

2.7. Уточнение понятия о проводниках и диэлектриках в свете уравнений Максвелла

Среды могут сильно отличаться друг от друга по величине удельной проводимости, поэтому их поведение в электромагнитных полях также может быть совершенно различным. Чем больше величина σ, тем больше плотность тока проводимости в среде при той же напряженности электрического поля. Часто для упрощения анализа вводят понятия *идеального проводника* и *идеального диэлектрика*. Идеальный проводник — это среда с бесконечно большой удельной проводимостью ($\sigma \to \infty$), а идеальный диэлектрик — среда, не обладающая проводимостью ($\sigma = 0$). В идеальном проводнике может существовать только ток проводимости, а в идеальном диэлектрике — только ток смещения.

В реальных средах имеется как ток проводимости, так и ток смещения. Поэтому проводниками принято называть среды, в которых ток проводимости намного превосходит ток смещения, а диэлектриками — среды, в которых основным является ток смещения. Такое деление сред на проводники и диэлектрики имеет относительный характер, так как существенно зависит от скорости изменения электромагнитного поля. Для простоты рассмотрим случай гармонически изменяющегося поля. Пусть напряженность электрического поля изменяется по закону $\mathbf{E}=\mathbf{E}_m(x, y, z)\cos(\omega t+\varphi)$. Тогда плотность тока проводимости и плотность тока смещения равны соответственно $\mathbf{j}=\sigma \mathbf{E}_m(x, y, z)\cos(\omega t+\varphi)$ и $\mathbf{j}^{см}=\partial \mathbf{D}/\partial t=\varepsilon_a \partial \mathbf{E}/\partial t = \omega\varepsilon_a \mathbf{E}_m(x, y, z)\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)$. Отношение их амплитуд

$$\frac{|\mathbf{j}_m|}{|\mathbf{j}_m^{см}|}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a} \tag{2.7.1}$$

и является критерием деления сред на проводники и диэлектрики. Если $\sigma/\omega\varepsilon_a \gg 1$, то среда является проводником, если же $\sigma/\omega\varepsilon_a \ll 1$ — диэлектриком. Из соотношения (2.7.1) следует, что диэлектрические свойства сильнее проявляются при более высоких частотах.

Металлы обладают большой удельной проводимостью. Например, у холоднотянутой меди $\sigma=5{,}65\cdot 10^7$ *сим/м*, у железа $\sigma=1{,}0\cdot 10^7$ *сим/м*. Поэтому у металлов отношение $\sigma/\omega\varepsilon_a$ значительно больше единицы на всех частотах, используемых в радиотехнике. У типичных диэлектриков, наоборот, удельная проводимость очень мала, например, у кварца $\sigma=2\cdot 10^{-17}$ *сим/м*; у стекла $\sigma=10^{-12}$ *сим/м*. Существует ряд сред, занимающих промежуточное положение между проводниками и диэлектриками, например, вода, почва и другие (у дистиллированной воды $\sigma=2\cdot 10^{-4}$ *сим/м*; у морской воды $\sigma=3\div 5$ *сим/м*; у сухой почвы $\sigma=10^{-3}\div 10^{-5}$ *сим/м*; у влажной почвы $\sigma=10^{-2}\div 10^{-3}$ *сим/м*). Такие среды на одних частотах являются проводниками ($\sigma \gg \omega\varepsilon_a$), а на других — диэлектриками ($\sigma \ll \omega\varepsilon_a$).

Отметим существенную особенность проводящих сред. В области с проводимостью, отличной от нуля, не может быть постоянного объемного распределения зарядов. Это легко доказать, используя уравнение непрерывности и закон Ома. Подставляя ур-ние (2.6.2) в (2.5.1) и учитывая, что для линейной однородной изотропной среды справедлива ф-ла (1.2.8), приходим к уравнению $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_a}\rho=0$, решая которое, получаем

$$\rho=\rho_0(x, y, z)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_a}t} \tag{2.7.2}$$

Здесь $\rho_0(x, y, z)$ — плотность заряда в рассматриваемой точке (x, y, z) в момент $t=0$. Таким образом, плотность заряда ρ в каждой точке внутри проводящей среды экспоненциально убывает со временем, причем скорость этого убывания не зависит от приложенного поля. Промежуток времени τ, в течение которого заряд в каком-либо малом элементе объема уменьшается в e раз, называется *временем релаксации*. Приравнивая единице показатель степени в ф-ле (2.7.2), получаем выражение $\tau=\varepsilon_a/\sigma$. Время релаксации для проводящих сред очень мало. Например, для металлов τ имеет порядок 10^{-18} *сек*; для морской воды — $2\cdot 10^{-10}$ *сек*. Даже для такого плохого проводника, как дистиллированная вода, время релаксации не превышает 10^{-6} *сек*.

То, что объемная плотность заряда в каждой точке внутри проводника экспоненциально убывает со временем, не означает, конечно, что заряды исчезают. Заряды задерживаются на наружной поверхности проводника, образуя весьма тонкий заряженный слой, который обычно для упрощения анализа считается бесконечно тонким. При этом суммарный заряд оказывается постоянным. Однако этот процесс не сопровождается появлением зарядов во внутренних точках проводника, в которых в начальный момент они отсутствовали. Таким образом, можно считать, что при установившихся процессах во внутренних точках проводящей среды объемная плотность свободных зарядов равна нулю.

2.8. Полная система уравнений Максвелла

Выше были рассмотрены основные уравнения электродинамики. Каждое из них описывает те или иные свойства электромагнитного поля. Анализ электромагнитных процессов возможен только на основе системы уравнений электродинамики. Такой системой являются уравнения Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad & \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= \rho; & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8.1}$$

совместно с уравнениями, связывающими между собой векторы **D** и **E**, **B** и **H**, **j** и **E**, которые в случае линейных изотропных сред имеют вид

$$\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E};\quad \mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H};\quad \mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}. \tag{2.8.2}$$

Уравнения (2.8.2) часто называют уравнениями состояния, а также материальными уравнениями; они характеризуют среду.

Отметим, что в случае линейных анизотропных сред ур-ния (2.8.1) остаются без изменений, а в ур-ниях (2.8.2) параметры ε_a, μ_a, σ (по крайней мере, один из них) будут тензорами (см. разд. 1.3 и 2.6).

На основе уравнений Максвелла можно сделать следующие выводы относительно свойств электромагнитного поля. Электрическое и магнитное поля тесно связаны между собой. Всякое изменение одного из них вызывает изменение другого. Независимое существование одного электрического поля (без магнитного) возможно только в статическом случае. Источниками электромагнитного поля являются заряды и токи. Магнитное поле всегда вихревое, электрическое поле может быть и вихревым и потенциальным. Чисто потенциальным электрическое поле может быть только в статическом случае. Силовые линии электрического поля могут иметь истоки и стоки. Силовые линии магнитного поля всегда непрерывны. Из первого уравнения Максвелла следует, что линии магнитного поля охватывают линии полного тока, образуя с ними правовинтовую систему (рис. 2.8.1). Аналогично из второго уравнения Максвелла вытекает, что линии вихревого электрического поля охватывают линии вектора $\partial \mathbf{B}/\partial t$, образуя с ними левовинтовую систему (рис. 2.8.2).

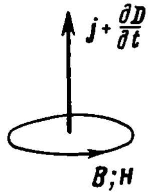


Рис. 2.8.1

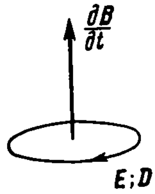


Рис. 2.8.2

Уравнения, входящие в полную систему уравнений электродинамики (2.8.1)—(2.8.2), являются линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому можно утверждать, что электромагнитные поля удовлетворяют *принципу суперпозиции*: поле, созданное несколькими источниками, можно рассматривать как сумму полей созданных каждым источником.

Помимо уравнений Максвелла в дифференциальной форме, в ряде случаев необходимо использовать уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\left.\begin{array}{l} \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{S} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} + \int\limits_{S} \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}; \quad \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\dfrac{d}{dt}\int\limits_{S} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} \\ \oint\limits_{S} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int\limits_{V} \rho\, dV; \quad \oint\limits_{S} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0 \end{array}\right\} \tag{2.8.3}$$

2.9. Классификация электромагнитных явлений

Система уравнений Максвелла охватывает всю совокупность электромагнитных явлений, относящихся к макроскопической электродинамике. В ряде частных случаев эти уравнения упрощаются.

Самым простым является случай, когда электромагнитное поле не зависит от времени и, кроме того, отсутствует перемещение заряженных частиц ($\mathbf{j}=0$). При этих условиях система уравнений Максвелла (2.8.1)—(2.8.2) распадается на две независимые системы:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0; \quad \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho; \quad \mathbf{D}=\varepsilon_a \mathbf{E}, \tag{2.9.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=0; \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0; \quad \mathbf{B}=\mu_a \mathbf{H}. \tag{2.9.2}$$

Система ур-ний (2.9.1) содержит только электрические величины, а система ур-ний (2.9.2) — только магнитные. Это означает, что в рассматриваемом случае электрические и магнитные явления независимы.

Явления, описываемые ур-ниями (2.9.1), принято называть *электростатическими.* Электростатические поля — это поля, созданные неподвижными, неизменными по величине зарядами. Система ур-ний (2.9.1) является полной системой дифференциальных уравнений электростатики.

Уравнения (2.9.2) характеризуют поля, создаваемые постоянными магнитами. Они также могут быть использованы для анализа свойств магнитного поля, созданного постоянными токами в области, в которой плотность тока проводимости равна нулю ($\mathbf{j}=0$) и которая не сцеплена с током (не охватывает его линий). Явления, описываемые системой (2.9.2), называют *магнитостатическими*, а сами ур-ния (2.9.2) — уравнениями магнитостатики.

При наличии постоянного тока электрическое и магнитное поля уже нельзя считать независимыми. Электромагнитное поле, создаваемое постоянными токами, называют *стационарным электромагнитным полем.* Система уравнений Максвелла в этом случае принимает вид

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j};\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0;\quad \mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H} & (a)\\ \mathbf{j}=\sigma\mathbf{E} & \\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=0;\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho;\quad \mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E} & (б)\end{array}\right\}. \qquad (2.9.3)$$

В качестве самостоятельного класса выделяют также так называемые *квазистационарные процессы*, т. е. процессы, протекающие достаточно медленно. В этом случае в первом уравнении Максвелла при наличии тока проводимости можно пренебречь током смещения: $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}$. Однако в тех случаях, когда токов проводимости нет (например, емкость в цепи переменного тока), токи смещения необходимо учитывать, при этом $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\partial\mathbf{D}/\partial t$. Второе уравнение Максвелла при анализе квазистационарных процессов записывается в обычной форме: $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$.

В общем случае используют полную систему уравнений Максвелла (2.8.1)—(2.8.2).

В случае гармонических во времени колебаний систему (2.8.1) удается упростить с помощью искусственного приема, получившего название «метода комплексных амплитуд» (см. разд. 4.3).

2.10. Уравнения Максвелла и сторонние токи

При рассмотрении системы уравнений Максвелла в форме (2.8.1) совместно с ур-ниями (2.8.2) под вектором $\mathbf{j}$ подразумевалась плотность тока проводимости, возникающего в проводящей среде под действием электрического поля. Этот вектор удовлетворяет закону Ома в дифференциальной форме (2.6.2).

Помимо этого тока, в изучаемой области пространства могут существовать токи, которые рассматриваются как первопричина возникновения электромагнитного поля и считаются заданными. Эти токи принято называть *сторонними*. Например, в гл. 8 будет рассмотрено излучение электромагнитных волн элементарным электрическим вибратором. Ток в вибраторе обусловлен подведением к нему энергии от генератора. При анализе этот ток будет считаться известным, что позволит исключить из рассмотрения процессы, протекающие в генераторе, прохождение энергии по линии, соединяющей генератор с вибратором, и т. д., т. е. существенно упростит задачу. Если этого не делать и каждую проблему рассматривать во всей ее полноте, то любая конкретная задача практически становится трудноразрешимой.

Для учета сторонних токов следует первое уравнение Максвелла представить в виде.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{ст}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.10.1}$$

где $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ — плотность сторонних токов в рассматриваемой точке пространства, а $\mathbf{j}$ — как и прежде, плотность тока проводимости, вызванного электромагнитным полем, определяемая уравнением $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Для решения многих вопросов вместо сторонних токов задаются *сторонней напряженностью* электрического поля $\mathbf{E}_{\text{ст}}$. В большинстве случаев при исследовании электродинамических явлений под $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ подразумевается напряженность электрического поля, создаваемая зарядами и токами, сосредоточенными за пределами рассматриваемой области. При изучении постоянного электрического поля под $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ иногда понимают напряженность поля сторонних электродвижущих сил неэлектрического происхождения (химических, диффузионных и др.).

Введение $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ является таким же упрощением задачи, как и введение $\mathbf{j}^{\text{ст}}$. Фактически оно исключает детальный анализ процессов, происходящих в какой-либо части пространства.

Аналогично сторонним токам вводится понятие *сторонних зарядов*. С учетом сторонних зарядов третье уравнение Максвелла записывается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho + \rho^{\text{ст}}, \tag{2.10.2}$$

где $\rho^{\text{ст}}$ — объемная плотность сторонних зарядов.

Отметим, что в случае переменных полей сторонние токи и сторонние заряды связаны уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{\text{ст}} + \frac{\partial \rho^{\text{ст}}}{\partial t} = 0. \tag{2.10.3}$$

W

ГЛАВА 3

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

3.1. Неприменимость уравнений Максвелла в дифференциальной форме на границе раздела двух сред

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (2.8.1) справедливы в случае линейных сред, параметры ε_a, μ_a и σ которых либо не зависят от координат, либо являются непрерывными функциями координат. На практике, однако, часто встречаются случаи, когда рассматриваемая область состоит из двух (или более) разнородных сред. При анализе макроскопических свойств поля в этих случаях обычно приходится считать, что параметры ε_a, μ_a и σ (или, по крайней мере, один из них) на границе раздела сред меняются скачком. Операция дифференцирования в точках, принадлежащих границе раздела, не законна, и уравнения Максвелла в дифференциальной форме в этих точках теряют смысл. Поэтому для изучения поведения векторов электромагнитного поля при переходе из одной среды в другую нужно исходить из уравнений Максвелла в интегральной форме (2.8.3), которые остаются справедливыми и в этих случаях.

Соотношения, показывающие связь между значениями векторов электромагнитного поля в разных средах у поверхности раздела, называются *граничными условиями*. Перейдем к их рассмотрению.

3.2. Граничные условия для векторов электрического поля

УСЛОВИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ E И D. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЗАРЯДЫ

На поверхности раздела S двух изотропных сред, характеризуемых параметрами ε_{a1} и ε_{a2} соответственно, выделим достаточно малый элемент ΔS, чтобы, во-первых, его можно было считать плоским, а во-вторых, чтобы в обеих средах распределение нормальной компоненты вектора **D** можно было считать равномерным в пределах ΔS.

Построим на элементе ΔS прямой цилиндр высотой Δh так, чтобы его основания находились в разных средах (рис. 3.2.1), и применим к нему третье уравнение Максвелла в интегральной форме (2.3.4):

$$\oint\limits_{S_ц} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int\limits_V \rho\, dV, \qquad (3.2.1)$$

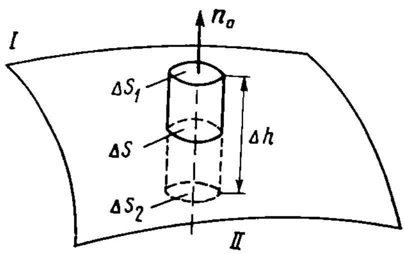


Рис. 3.2.1

где $S_ц$ — поверхность цилиндра, а V — его объем.

Так как поверхность $S_ц$ можно представить в виде суммы $S_ц = \Delta S_1 + S_{бок} + \Delta S_2$, где ΔS_1 и ΔS_2 — площади верхнего и нижнего оснований цилиндра соответственно, а $S_{бок}$ его боковая поверхность, то ур-ние (3.2.1) принимает вид:

$$\int\limits_{\Delta S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} + \int\limits_{S_{бок}} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} + \int\limits_{\Delta S_2} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int\limits_V \rho\, dV. \qquad (3.2.2)$$

Устремим высоту цилиндра Δh к нулю так, чтобы его основания оставались в разных средах. При этом в пределе ΔS_1 и ΔS_2 совпадут с ΔS. Так как элемент поверхности $d\mathbf{S}$ в ур-ниях (3.2.1) и (3.2.2) совпадает по направлению с внешней нормалью к поверхности $S_ц$, то в результате предельного перехода получим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\Delta h \to 0} \int\limits_{\Delta S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = (\mathbf{D}_1, \mathbf{n}_0)\, \Delta S = D_{1n}\, \Delta S \\
&\lim_{\Delta h \to 0} \int\limits_{S_{бок}} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = 0 \\
&\lim_{\Delta h \to 0} \int\limits_{\Delta S_2} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = -(\mathbf{D}_2, \mathbf{n}_0)\, \Delta S = -D_{2n}\, \Delta S
\end{aligned}\right\}, \qquad (3.2.3)$$

где $\mathbf{n}_0$ — орт нормали к площадке ΔS, проведенной из второй среды в первую (рис. 3.2.1); $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ — значения вектора $\mathbf{D}$ на границе раздела в первой и во второй средах соответственно, а D_{1n} и D_{2n} — проекции векторов $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ на нормаль $\mathbf{n}_0$.

Переходя в ур-нии (3.2.2) к пределу $\Delta h \to 0$, получаем с учетом (3.2.3)

$$(D_{1n} - D_{2n})\, \Delta S = \lim_{\Delta h \to 0} \int\limits_V \rho\, dV. \qquad (3.2.4)$$

Если заряд $\int\limits_V \rho dV$ не сосредоточен на поверхности раздела, т. е. не является поверхностным, то при любой конечной величине объемной плотности заряда ρ правая часть ф-лы (3.2.4) равна нулю, а нормальная компонента вектора **D** непрерывна при переходе из одной среды в другую:

$$D_{1n} = D_{2n}. \qquad (3.2.5)$$

Особый интерес представляет случай, когда заряды распределены вдоль поверхности раздела в виде бесконечно тонкого слоя. Такие заряды называют *поверхностными* и характеризуют *поверхностной плотностью* ρ_S, определяемой соотношением

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \ \frac{к}{м^2}, \qquad (3.2.6)$$

где ΔS — элемент поверхности, а ΔQ — заряд этого элемента.

Пусть теперь на границе раздела имеются поверхностные заряды с плотностью ρ_S. В этом случае правая часть ур-ния (3.2.4) уже не будет равна нулю. Считая распределение заряда на площадке ΔS равномерным (в противном случае нельзя считать равномерным распределение D_{1n} и D_{2n}), разделим обе части ур-ния (3.2.4) на ΔS. В результате получим

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S. \qquad (3.2.7)$$

Соотношение (3.2.7) показывает, что при переходе из одной среды в другую нормальная компонента вектора **D** претерпевает скачок, равный поверхностной плотности заряда, распределенного вдоль границы раздела. Выражая в этом соотношении D_{1n} и D_{2n} через E_{1n} и E_{2n} с помощью равенства $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$, получаем граничное условие для нормальных компонент вектора **E**:

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} - \varepsilon_{a2} E_{2n} = \rho_S. \qquad (3.2.8)$$

Если на границе раздела отсутствуют поверхностные заряды, то условие (3.2.8) можно представить в виде

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}. \qquad (3.2.9)$$

Соотношение (3.2.9) показывает, что нормальная компонента вектора **E** при переходе через незаряженную поверхность раздела двух сред претерпевает разрыв, величина которого определяется отношением диэлектрических проницаемостей этих сред. Наличие поверхностной плотности зарядов ρ_S в рассматриваемой точке приводит к изменению величины разрыва, увеличивая или уменьшая его. При определенном значении ρ_S нормальная компонента вектора **E** может оказаться непрерывной.

Отметим, что поверхностные заряды в природе отсутствуют. Их вводят для упрощения расчетов вместо реального тонкого слоя зарядов (см., например, разд. 2.7), когда не интересуются распределением поля внутри слоя. В каждой точке внутри реального заряженного слоя составляющая D_n непрерывна, но ее значения по разные стороны слоя отличаются на конечную величину. Поэтому при замене реального слоя зарядов бесконечно тонким (т. е. поверхностными зарядами) приходится считать, что D_n изменяется скачком.

УСЛОВИЯ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ E И D

Из произвольной точки на поверхности раздела (S) двух изотропных сред проведем из второй среды в первую единичную нормаль $\mathbf{n}_0$ (рис. 3.2.2). Через $\mathbf{n}_0$ проведем плоскость P. На линии пересечения поверхности раздела и плоскости P выделим достаточно малый отрезок Δl так, чтобы выбранная точка находилась внутри этого отрезка. Размеры отрезка должны быть такими, чтобы, во-первых, его можно было считать прямолинейным, а во-вторых, чтобы в обеих средах касательную компоненту вектора $\mathbf{E}$ можно было считать постоянной в пределах Δl. В плоскости P на отрезке Δl построим прямоугольный контур $ABCD$ высоты Δh так, чтобы он находился в обеих средах. Проведем, кроме того, единичную касательную $\boldsymbol{\tau}_0$ к отрезку Δl и единичную нормаль $\mathbf{N}_0$ к плоскости P, образующую с обходом контура $ABCD$ правовинтовую систему. Векторы $\mathbf{n}_0$, $\boldsymbol{\tau}_0$, $\mathbf{N}_0$ также образуют правовинтовую систему и удовлетворяют соотношению

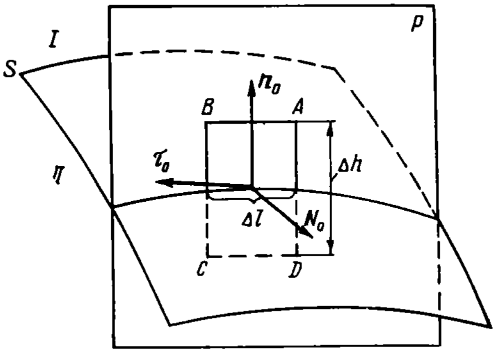


Рис. 3.2.2

$$\mathbf{N}_0 = [\mathbf{n}_0, \boldsymbol{\tau}_0]. \tag{3.2.10}$$

К контуру $ABCD$ применим второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint\limits_{ABCD} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int\limits_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}, \tag{3.2.11}$$

где ΔS — площадь, охватываемая контуром $ABCD$, а $d\mathbf{S} = \mathbf{N}_0 dS$.

Левую часть ур-ния (3.2.11) можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$\int\limits_{AB} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{BC} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{CD} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int\limits_{DA} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int\limits_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{B}}{dt}\, d\mathbf{S}. \tag{3.2.12}$$

Устремим высоту контура $ABCD$ к нулю так, чтобы стороны AB и CD оставались в разных средах и в пределе совпадали с Δl. Учитывая, что на сторонах AB и CD дифференциал $d\mathbf{l}$ определяется равенствами $\mathbf{dl}=\boldsymbol{\tau}_0 dl$ и $\mathbf{dl}=-\boldsymbol{\tau}_0 dl$ соответственно, и используя условие малости Δl, получаем

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta h\to 0}\int_{AB}\mathbf{E}\,\mathbf{dl}&=(\mathbf{E}_1,\boldsymbol{\tau}_0)\,\Delta l=E_{1\tau}\,\Delta l\\ \lim_{\Delta h\to 0}\int_{CD}\mathbf{E}\,\mathbf{dl}&=-(\mathbf{E}_2,\boldsymbol{\tau}_0)\,\Delta l=-E_{2\tau}\,\Delta l\end{aligned}\right\}, \tag{3.2.13}$$

где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — значения вектора $\mathbf{E}$ на границе раздела в первой и во второй средах соответственно, а $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ — проекции векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ на направление $\boldsymbol{\tau}_0$.

Так как векторы $\mathbf{E}$ и $\partial\mathbf{B}/\partial t$ имеют конечные значения, то выполняются соотношения:

$$\lim_{\Delta h\to 0}\int_{BC}\mathbf{E}\,\mathbf{dl}=\lim_{\Delta h\to 0}\int_{DA}\mathbf{E}\,\mathbf{dl}=\lim_{\Delta h\to 0}\int_{\Delta S}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,\mathbf{dS}=0. \tag{3.2.14}$$

Переходя в ф-ле (3.2.12) к пределу $\Delta h\to 0$ и используя равенства (3.2.13) и (3.2.14), получаем

$$E_{1\tau}=E_{2\tau}. \tag{3.2.15}$$

Равенство (3.2.15) показывает, что касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$ непрерывна при переходе через границу раздела двух сред.

Касательная составляющая вектора $\mathbf{D}$, наоборот, претерпевает разрыв, величина которого зависит от соотношения между диэлектрическими проницаемостями. Выражая $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ в равенстве (3.2.15) через $D_{1\tau}$ и $D_{2\tau}$, получаем

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}}=\frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}. \tag{3.2.16}$$

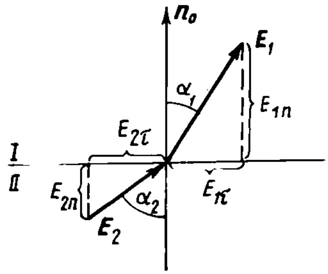


Рис. 3.2.3

Выведенные граничные условия показывают, что на границе раздела векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ преломляются. Обозначим углы между нормалью $\mathbf{n}_0$ к поверхности раздела и векторами $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ соответственно через α_1 и α_2 (рис. 3.2.3). Так как $\operatorname{tg}\alpha_1=E_{1\tau}/E_{1n}$, а $\operatorname{tg}\alpha_2=E_{2\tau}/E_{2n}$, то, используя граничные условия (3.2.15) и (3.2.9), получаем, что при отсутствии поверхностных зарядов на границе раздела справедливо следующее соотношение:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}\operatorname{tg}\alpha_2. \tag{3.2.17}$$

В изотропных средах векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ направлены одинаково. Поэтому соотношение (3.2.17) определяет также и преломление вектора $\mathbf{D}$.

3.3. Граничные условия для векторов магнитного поля

УСЛОВИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ B И H

Граничное условие для нормальной составляющей вектора **B** выводится аналогично (3.2.7). Запишем четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме применительно к цилиндрическому объему, изображенному на рис. 3.2.1:

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} + \int_{S_{бок}} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} + \int_{\Delta S_2} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0. \quad (3.3.1)$$

Устремляя высоту цилиндра Δh к нулю и учитывая, что условие достаточной малости площадки ΔS должно в этом случае содержать требование равномерного распределения нормальной компоненты вектора **B** в обеих средах в пределах ΔS, получаем

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.3.2)$$

Из ур-ния (3.3.2) следует, что нормальная компонента вектора **B** непрерывна при переходе через границу раздела двух сред. В свою очередь, нормальная составляющая вектора **H** испытывает разрыв, величина которого определяется отношением магнитных проницаемостей. Выражая в равенстве (3.3.2) B_{1n} и B_{2n} через H_{1n} и H_{2n}, получаем

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \quad (3.3.3)$$

УСЛОВИЯ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ B И H. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ТОК

Граничное условие для касательной составляющей вектора **H** выводится аналогично соотношению (3.2.15).

Применим первое уравнение Максвелла в интегральной форме к прямоугольному плоскому контуру $ABCD$, изображенному на рис. 3.2.2:

$$\int_{AB} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{\Delta S} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} + \int_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \quad (3.3.4)$$

Условие достаточной малости отрезка Δl должно включать теперь требование равномерного распределения касательной составляющей вектора **H** в обеих средах в пределах Δl. Устремляя высоту контура Δh к нулю и учитывая, что напряженность магнитного поля и плотность тока смещения — ограниченные величины, получаем

$$(H_{1\tau} - H_{2\tau})\,\Delta l = \lim_{\Delta h \to 0} \int_{\Delta S} \mathbf{j}\, d\mathbf{S}. \quad (3.3.5)$$

Если на границе отсутствуют поверхностные токи, то правая часть равенства (3.3.5) равна нулю. В этом случае касательная составляющая вектора **H** оказывается непрерывной:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \tag{3.3.6}$$

Касательная составляющая вектора **B**, наоборот, претерпевает разрыв, величина которого определяется отношением магнитных проницаемостей:

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \tag{3.3.7}$$

Особый интерес представляет случай, когда токи распределены вдоль поверхности раздела в виде бесконечно тонкого слоя. Такие токи называют *поверхностными*. Плотность поверхностных токов определяется соотношением

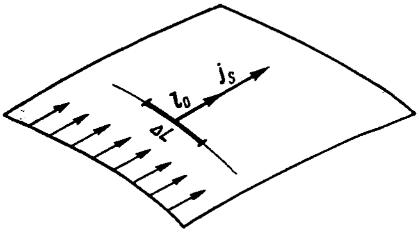


Рис. 3.3.1

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{l}_0 \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta L}, \ \frac{a}{м}, \tag{3.3.8}$$

где $\mathbf{l}_0$ — единичный вектор, указывающий направление движения положительных зарядов в данной точке; ΔL — отрезок линии, перпендикулярной вектору $\mathbf{l}_0$, а ΔI — величина тока, протекающего через отрезок ΔL (рис. 3.3.1).

В этом случае правая часть равенства (3.3.5) уже не будет равна нулю. Считая распределение плотности поверхностного тока на отрезке Δl равномерным (если это не выполняется, нельзя считать равномерным распределение касательной составляющей вектора **H**), преобразуем правую часть указанного равенства следующим образом:

$$\lim_{\Delta h \to 0} \int_{\Delta S} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \lim_{\Delta h \to 0} \int_{\Delta S} (\mathbf{j}, \mathbf{N}_0)\, dS = \int_{\Delta l} (\mathbf{j}_S, \mathbf{N}_0)\, dl = \int_{\Delta l} j_{SN}\, dl = j_{SN}\, \Delta l, \tag{3.3.9}$$

где j_{SN} — проекция вектора $\mathbf{j}_S$ на направление $\mathbf{N}_0$. Подставляя выражение (3.3.9) в (3.3.5) и деля обе части получающегося равенства на Δl, приходим к соотношению

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{SN}. \tag{3.3.10}$$

Уравнение (3.3.10) справедливо для любого направления касательной $\boldsymbol{\tau}_0$. Поэтому его можно переписать в векторной форме:

$$\mathbf{j}_S = [\mathbf{n}_0, \ \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2], \tag{3.3.11}$$

где $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — значения вектора **H** у границы раздела в первой и во второй средах соответственно.

Уравнения (3.3.10)—(3.3.11) показывают, что при переходе через границу раздела, по которой текут поверхностные токи, касательная составляющая вектора **H** претерпевает разрыв, величина которого определяется значением плотности поверхностных токов в рассматриваемой точке. Переходя в ур-нии (3.3.10) к касательным составляющим вектора магнитной индукции, получаем

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}} = j_{SN}. \qquad (3.3.12)$$

Отметим, что поверхностные токи, как и поверхностные заряды, в природе отсутствуют. Их вводят для упрощения расчетов вместо реального тонкого слоя токов, когда не интересуются распределением поля внутри слоя. В каждой точке внутри реального токового слоя касательная составляющая вектора **H** непрерывна, но ее значения по разные стороны слоя отличаются на конечную величину. Поэтому при замене реального токового слоя бесконечно тонким (т. е. поверхностными токами) приходится считать, что H_τ изменяется скачком).

3.4. Полная система граничных условий. Граничные условия на поверхности идеального проводника

Таким образом, на поверхности раздела двух сред должны выполняться следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} & D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \\ & E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ & B_{1n} = B_{2n} \\ & H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{SN} \end{aligned}\right| . \qquad (3.4.1)$$

Уравнения (3.4.1) составляют полную систему граничных условий. Они справедливы для любых электромагнитных процессов, рассматриваемых в макроскопической электродинамике. Не включенные в систему (3.4.1) граничные условия для составляющих D_τ, E_n, B_τ и H_n являются следствиями соотношений (3.4.1) и уравнений состояния (2.8.2).

Граничные условия (3.4.1) можно записать также в векторной форме:

$$\left.\begin{aligned} & (\mathbf{n}_0, \mathbf{D}_1) - (\mathbf{n}_0, \mathbf{D}_2) = \rho_S \\ & [\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_1] = [\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_2] \\ & (\mathbf{n}_0, \mathbf{B}_1) = (\mathbf{n}_0, \mathbf{B}_2) \\ & [\mathbf{n}_0, \mathbf{H}_1] - [\mathbf{n}_0, \mathbf{H}_2] = \mathbf{j}_S \end{aligned}\right| . \qquad (3.4.2)$$

При изучении *переменных* электромагнитных полей вблизи поверхности металлических тел часто предполагают, что рассматриваемое тело является идеально проводящим. При этом граничные условия (3.4.1)—(3.4.2) упрощаются, так как в среде с $\sigma = \infty$ поле отсутствует. Действительно, объемная плотность тока проводимости **j** должна быть ограниченной величиной. Поэтому из закона Ома (2.6.2) следует, что напряженность электрического поля внутри идеального проводника должна быть равной нулю. Полагая во втором уравнении Максвелла $\mathbf{E} \equiv 0$, получаем $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$. Так как поле считается переменным, то последнее равенство выполняется только при $\mathbf{B} \equiv 0$.

Пусть идеально проводящей является вторая среда. Тогда $\mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$ и условия (3.4.1) принимают вид:

$$E_{1n} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}}; \tag{3.4.3}$$

$$E_{1\tau} = 0; \tag{3.4.4}$$

$$H_{1n} = 0; \tag{3.4.5}$$

$$H_{1\tau} = j_{SN} \tag{3.4.6}$$

или в векторной форме

$$(\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_1) = \frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}}; \tag{3.4.7}$$

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_1] = 0; \tag{3.4.8}$$

$$(\mathbf{n}_0, \mathbf{H}_1) = 0; \tag{3.4.9}$$

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{H}_1] = \mathbf{j}_S. \tag{3.4.10}$$

Таким образом, на поверхности идеального проводника касательная составляющая напряженности электрического поля и нормальная составляющая напряженности магнитного поля обращаются в нуль.

3.5. Физическая сущность граничных условий

В предыдущих разделах было показано, что граничные условия для составляющих векторов **E** и **D**, а также для составляющих векторов **B** и **H** имеют существенные различия. Выясним физические причины этого явления. Рассмотрим сначала граничные условия для векторов электрического поля.

Пусть имеются две изотропные среды с общей границей раздела, характеризуемые диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Предположим вначале, что на границе раздела сред отсутствуют свободные поверхностные заряды ($\rho_S = 0$). Под воздействием внешнего электрического поля обе среды поляризуются, причем вектор **P**, характеризующий поляризацию, будет иметь различные значения в этих средах, так как $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Если вектор **E**, а следовательно, и вектор **P** перпендикулярны поверхности раздела (рис. 3.5.1), то на ней появятся нескомпенсированные поверхностные заряды, связанные с молекулами вещества. На рис. 3.5.1 показан случай, когда $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и соответственно среда *II* является более плотной. Это символически отображено на рис. 3.5.1*а* тем, что в среде *II* больше элементарных диполей. Образующиеся нескомпенсированные поверхностные заряды являются положительными. Если векторы **E** и **P** параллельны поверхности раздела, то такие поверхностные заряды не возникают (рис. 3.5.2). Очевидно, что при произвольной ориентации векторов **E** и **P** у границы раздела величина появляющихся нескомпенсированных поверхностных зарядов

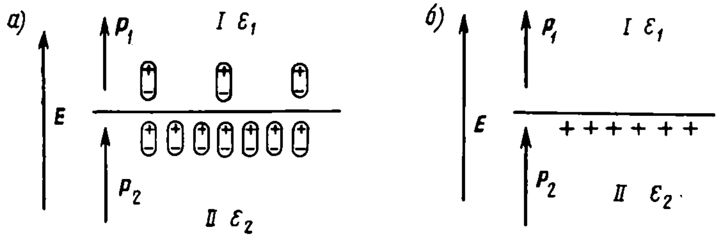


Рис. 3.5.1

определяется изменением значений нормальной составляющей вектора **P** при переходе через границу раздела.

Выберем на поверхности раздела сред некоторую точку N и рассмотрим поведение составляющих вектора **E** при переходе через границу раздела в этой точке. Напряженность первичного электрического поля в рассматриваемой точке непрерывна (предполагается, что источники внешнего электрического поля не находятся на границе раздела сред). Рассмотрим напряженность дополнительного электрического поля $\mathbf{E}^{(1)}$, создаваемого нескомпенсированными «связанными» поверхностными зарядами, расположенными

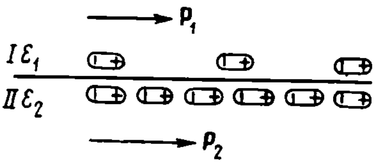


Рис. 3.5.2

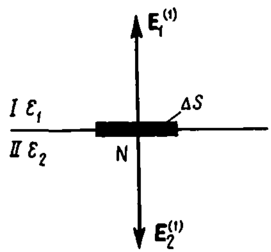


Рис. 3.5.3

в непосредственной близости к точке N на некотором малом элементе поверхности ΔS (рис. 3.5.3). Элемент поверхности ΔS можно считать плоским, а распределение на нем «связанных» поверхностных зарядов — симметричным относительно точки N. Поэтому вектор $\mathbf{E}^{(1)}$ в точке N имеет только нормальные к поверхности раздела составляющие, которые в первой и второй средах равны по величине и противоположны по направлению ($\mathbf{E}_1^{(1)}$ и $\mathbf{E}_2^{(1)}$ на рис. 3.5.3). Следовательно, нормальная составляющая напряженности полного электрического поля, складывающегося из первичного поля и поля всех «связанных» зарядов, которые возникают в средах *I* и *II* в результате поляризации (разд. 2.3), будет иметь разрыв в точке N ($E_{1n} \neq E_{2n}$). Касательная же составляющая будет непрерывной ($E_{1\tau} = E_{2\tau}$).

Вектор **D** был введен соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Так как, по предположению, на границе раздела отсутствуют свободные поверхностные заряды ($\rho_S = 0$), разрывы нормальных составляющих векторов $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ и **P** будут одинаковы по величине и противоположны по знаку. Это следует, в частности, из сравнения ур-ний (2.3.9) и (2.3.10). В самом деле, из этих уравнений вытекает, что при $\rho = 0$ должно выполняться равенство: $\operatorname{div} \varepsilon_0 \mathbf{E} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$. Последнее означает, что потоки линий векторов $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ и **P** из элементарного объема одинаковы по величине и противоположны по направлению. Поэтому при отсутствии свободных поверхностных зарядов на границе раздела нормальная составляющая вектора **D**, равная $D_n = \varepsilon_0 E_n + P_n$, будет непрерывной ($D_{1n} = D_{2n}$). Касательная составляющая вектора **E**, как было указано выше, является непрерывной, а касательная составляющая вектора **P** имеет разные значения по разные стороны от границы раздела, так как $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Следовательно, касательная составляющая вектора **D**, равная $D_\tau = \varepsilon_0 E_\tau + P_\tau$, будет претерпевать разрыв ($D_{1\tau} \neq D_{2\tau}$).

Наличие на границе раздела свободных поверхностных зарядов (т. е. бесконечно тонкого слоя зарядов), характеризуемых поверхностной плотностью ρ_S, не меняет характера граничных условий для касательных составляющих, но существенно влияет на условия для нормальных составляющих, так как разрыв P_n остается прежним, а разрыв $\varepsilon_0 E_n$ изменяется на величину ρ_S.

Рассмотрим теперь граничные условия для векторов магнитного поля. Пусть имеются две изотропные среды с общей границей раздела, характеризуемые магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2.

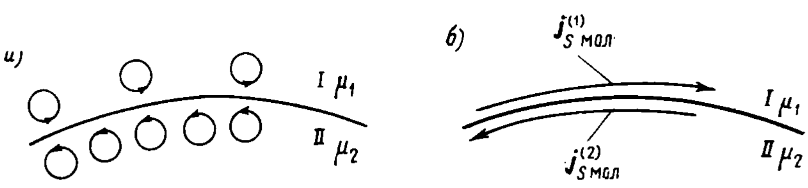


Рис. 3.5.4

Предположим сначала, что на границе раздела отсутствуют поверхностные токи, обусловленные движением свободных зарядов ($\mathbf{j}_S = 0$). Под воздействием внешнего магнитного поля обе среды намагничиваются (рис. 3.5.4*а*), и у границы их раздела появляются системы противоположно направленных молекулярных токов. В результате в средах *I* и *II* у границы раздела возникают эквивалентные противоположно направленные токи (рис. 3.5.4б) с плотностями $\mathbf{j}^{(1)}_{S мол}$ и $\mathbf{j}^{(2)}_{S мол}$ соответственно. Так как намагниченность сред различна ($\mu_1 \neq \mu_2$), то эти эквивалентные поверхностные токи не компенсируют друг друга и суммарный поверхностный ток на границе раздела не равен нулю.

Каждый элемент поверхностного тока создает вокруг себя замкнутые силовые линии вектора **B**. Их структура показана пунктирными линиями на рис. 3.5.5 (плоскость рис. 3.5.5 перпендикулярна плоскости, изображенной на рис. 3.5.4). Нормальные к поверхности раздела составляющие этих элементарных полей взаимно компенсируются, а касательные складываются. В результате у поверхности раздела в средах *I* и *II* появляются противоположно направленные дополнительные магнитные поля $\mathbf{B}^{(1)}$ и $\mathbf{B}^{(2)}$ (рис. 3.5.5). Поэтому касательная составляющая суммарного вектора **B**, определяемого суммой первичного и вторичного полей, имеет различные значения в средах *I* и *II*, т. е. претерпевает разрыв при переходе через границу раздела ($B_{1\tau} \neq B_{2\tau}$). Нормальная составляющая суммарного вектора **B** остается непрерывной ($B_{1n} = B_{2n}$).

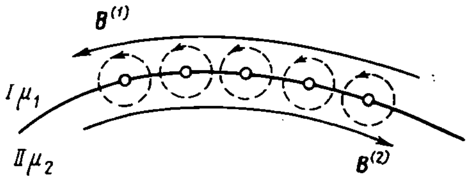


Рис. 3.5.5

Можно показать, что в отсутствие поверхностных токов, обусловленных движением свободных зарядов ($\mathbf{j}_S = 0$), касательные составляющие векторов $\mathbf{B}/\mu_0$ и **M** имеют одинаковый разрыв при переходе через границу раздела. Поэтому касательная составляющая вектора **H**, равная $H_\tau = (B_\tau/\mu_0) - M_\tau$, будет непрерывной на границе раздела ($H_{1\tau} = H_{2\tau}$). В то же время нормальная составляющая вектора **H**, равная $H_n = (B_n/\mu_0) - M_n$, будет претерпевать разрыв ($H_{1n} \neq H_{2n}$), так как нормальная составляющая вектора **B** непрерывна, а нормальная составляющая вектора **M** при $\mu_1 \neq \mu_2$ имеет разные значения по разные стороны от границы раздела.

Перейдем к случаю $\mathbf{j}_S \neq 0$. Выше было показано, что поверхностные токи не приводят к разрыву нормальной составляющей вектора **B**. Поэтому они не изменяют соотношение между нормальными составляющими вектора **B** в средах *I* и *II*, а следовательно, и соотношение между нормальными составляющими вектора **H**. Однако эти поверхностные токи существенно влияют на граничные условия для касательных составляющих векторов **B** и **H**. Изменение величины B_τ/μ_0 в этом случае (в отличие от случая, когда $\mathbf{j}_S = 0$) не будет равно изменению величины M_τ. Следовательно, касательная составляющая вектора **H** при $\mathbf{j}_S \neq 0$ на границе раздела будет претерпевать разрыв ($H_{1\tau} \neq H_{2\tau}$).

ГЛАВА 4

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

4.1. Баланс энергии электромагнитного поля

Как уже отмечалось в гл. 1, электромагнитное поле является особой формой материи. Как и любая форма материи, оно обладает энергией. Эта энергия может распространяться в пространстве и преобразовываться в другие формы энергии.

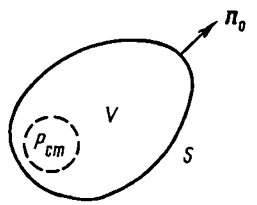


Рис. 4.1.1

Сформулируем уравнение баланса применительно к некоторому объему V, ограниченному поверхностью S (рис. 4.1.1). Пусть в объеме V, заполненном однородной изотропной средой, выделяется электромагнитная энергия за счет сторонних источников. На основе общих физических представлений очевидно, что мощность, выделяемая сторонними источниками, может расходоваться на потери и на изменение электромагнитной энергии внутри объема V, а также может частично рассеиваться, уходя в окружающую среду через поверхность S. При этом должно выполняться равенство

$$P_{\text{ст}} = P_{\text{п}} + \frac{dW}{dt} + P_{\Sigma}. \tag{4.1.1}$$

где $P_{\text{ст}}$ — мощность сторонних источников; $P_{\text{п}}$ — мощность потерь внутри объема V; P_{Σ} — мощность, проходящая через поверхность S; W — энергия электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме V, а dW/dt — мощность, расходуемая на изменение энергии внутри объема V.

В данном разделе будут использованы уравнения состояния (2.8.2). Эти уравнения не позволяют учесть потери энергии при поляризации и намагничивании среды. Поэтому слагаемое $P_{\text{п}}$ в равенстве (4.1.1) фактически определяет мощность джоулевых потерь в объеме V, обусловленных током проводимости.

Уравнение (4.1.1) дает только качественное представление об энергетических соотношениях. Чтобы получить количественные соотношения, нужно воспользоваться уравнениями Максвелла. Рассмотрим первое уравнение Максвелла с учетом сторонних токов (2.10.1): $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{ст}} + \partial\mathbf{D}/\partial t$. Все члены этого уравнения — векторные величины, имеющие размерность ампер на квадратный метр ($a/м^2$).

Чтобы получить уравнение, аналогичное (4.1.1), нужно видоизменить первое уравнение Максвелла так, чтобы его члены стали скалярными величинами, измеряющимися в ваттах. Для этого достаточно все члены указанного уравнения скалярно умножить на вектор $\mathbf{E}$, а затем проинтегрировать полученное выражение по объему V.

После скалярного умножения на вектор $\mathbf{E}$ получаем

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{E}\,\mathbf{j} + \mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,. \tag{4.1.2}$$

Используя известную из векторного анализа формулу

$$\mathrm{div}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}, \tag{4.1.3}$$

преобразуем левую часть ур-ния (4.1.2):

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathrm{div}\,[\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \tag{4.1.4}$$

Заменим в ф-ле (4.1.4) $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$ его значением из второго уравнения Максвелла и подставим (4.1.4) в ур-ние (4.1.2):

$$-\mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}} = \mathbf{E}\,\mathbf{j} + \mathrm{div}\,[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,. \tag{4.1.5}$$

Последние два слагаемых в ур-нии (4.1.5) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right).$$

Тогда ур-ние (4.1.5) принимает вид

$$-\mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}} = \mathbf{E}\,\mathbf{j} + \mathrm{div}\,[\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right). \tag{4.1.6}$$

Вводя обозначение

$$[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{\Pi} \tag{4.1.7}$$

и интегрируя ур-ние (4.1.6) по объему V, получаем

$$-\int\limits_V \mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}} dV = \int\limits_V \mathbf{E}\,\mathbf{j}\, dV + \oint\limits_S \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right) dV. \tag{4.1.8}$$

При переходе от ур-ния (4.1.6) к (4.1.8) использована теорема Остроградского-Гаусса для перевода объемного интеграла от $\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}$ в поверхностный интеграл от вектора $\mathbf{\Pi}$ и, кроме того, в последнем члене правой части изменен порядок операций интегрирования и дифференцирования.

Покажем, что первый член в правой части ур-ния (4.1.8) равен мощности джоулевых потерь, определяемых по закону Джоуля — Ленца. В случае цилиндрического проводника с сопротивлением R

и током I мощность джоулевых потерь $P_п = I^2R$. Применяя эту формулу к бесконечно малому цилиндру объемом $dV = dSdl$, торцы которого перпендикулярны направлению тока (рис. 2.6.1), получаем $dP_п = (dl/\sigma dS)(jdS)^2 = j^2dV/\sigma$. Следовательно, в случае тела произвольной формы должно выполняться равенство

$$P_п = \int\limits_V \frac{j^2}{\sigma}\, dV = \int\limits_V \sigma E^2\, dV = \int\limits_V \mathbf{j}\mathbf{E}\, dV. \tag{4.1.9}$$

Левая часть ур-ния (4.1.8) определяет мощность, отдаваемую сторонними токами в объеме V. Действительно, ток проводимости представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц. Ток отдает энергию электромагнитному полю при торможении этих частиц. Для этого необходимо, чтобы вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ имел составляющую, ориентированную противоположно направлению тока, т. е. чтобы скалярное произведение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}^{ст}$ было отрицательным ($\mathbf{E}\,\mathbf{j}^{ст} < 0$). Тогда левая часть ур-ния (4.1.8) будет положительной величиной.

Для уяснения физического смысла последнего члена в правой части ур-ния (4.1.8) рассмотрим частный случай. Предположим, что объем V окружен идеально проводящей оболочкой, совпадающей с поверхностью S. Тогда касательная составляющая напряженности электрического поля на поверхности S будет равна нулю. Элемент поверхности $\mathbf{dS}$ совпадает по направлению с внешней нормалью $\mathbf{n}_0$. Следовательно, поверхностный интеграл в ур-нии (1.1.8) будет равен нулю, так как нормальная компонента векторного произведения $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ определяется касательными составляющими входящих в него векторов. Кроме того, предположим, что среда в пределах объема V не обладает проводимостью ($\sigma = 0$). При этом в рассматриваемой области не будет джоулевых потерь, и первый интеграл в правой части ур-ния (4.1.8) также будет равен нулю. В результате получим

$$-\int\limits_V \mathbf{E}\, \mathbf{j}^{ст}\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_а E^2}{2} + \frac{\mu_а H^2}{2}\right) dV. \tag{4.1.10}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае мощность сторонних источников может расходоваться только на изменение энергии электромагнитного поля. Таким образом, правая часть ур-ния (4.1.10) представляет собой скорость изменения энергии электромагнитного поля, запасенной в объеме V. Следовательно, интеграл в правой части этого уравнения равен энергии электромагнитного поля в объеме V:

$$\frac{1}{2}\int\limits_V (\varepsilon_а E^2 + \mu_а H^2)\, dV = W. \tag{4.1.11}$$

Осталось выяснить физическую сущность поверхностного интеграла в ур-нии (4.1.8). Предположим, что внутри объема V отсутствуют потери и, кроме того, величина электромагнитной энергии остается постоянной ($W = \text{const}$). В этом случае вся мощность сторонних источников должна уходить в окружающее пространство, а ур-ние (4.1.8) примет вид

$$-\int\limits_V \mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}}\,dV = \oint\limits_S \mathbf{\Pi}\,d\mathbf{S}. \qquad (4.1.12)$$

Следовательно, поток вектора $\mathbf{\Pi}$ через поверхность S равен мощности P_Σ, уходящей в пространство из объема V. Таким образом, ур-ние (4.1.8) аналогично (4.1.1).

Отметим, что энергия может поступать в объем V не только за счет сторонних источников. Например, поток энергии, проходящий через поверхность S, определяемый интегралом $\oint\limits_S \mathbf{\Pi}\,d\mathbf{S}$, может быть направлен из окружающего пространства в объем V. При этом интеграл $\oint\limits_S \mathbf{\Pi}\,d\mathbf{S}$ будет отрицательной величиной.

Сторонние источники могут не только отдавать энергию, но также и получать ее от электромагнитного поля. При этом левая часть ур-ния (4.1.8) будет отрицательной величиной. Действительно, электромагнитное поле отдает энергию току проводимости, если оно ускоряет движение заряженных частиц, образующих ток. Для этого необходимо, чтобы вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ имел составляющую, ориентированную вдоль линий тока, т. е. чтобы скалярное произведение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ было положительной величиной ($\mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}} > 0$).

Рассмотрим частный случай. Пусть энергия поступает в объем V из окружающего пространства, причем одна часть ее расходуется на джоулевы потери в этом объеме, а другая отбирается сторонними источниками так, что количество электромагнитной энергии, запасенной в объеме V, не изменяется, т. е. $dW/dt = 0$. Уравнение (4.1.8) в этом случае удобно переписать в виде

$$-\oint\limits_S \mathbf{\Pi}\,d\mathbf{S} = \int\limits_V \mathbf{E}\,\mathbf{j}^{\text{ст}}\,dV + \int\limits_V \mathbf{E}\,\mathbf{j}\,dV. \qquad (4.1.13)$$

Левая часть ур-ния (4.1.13) определяет мощность, поступающую в объем V, а правая часть — мощность, расходуемую в этом объеме.

Уравнение (4.1.8) было получено Пойнтингом в 1885 г. и носит название *теоремы Пойнтинга*. Иногда его называют *теоремой Умова-Пойнтинга*, так как закон сохранения энергии с введением понятия потока энергии в общей форме был дан Н. А. Умовым в 1874 г. Вектор $\mathbf{\Pi}$ принято называть *вектором Пойнтинга*.

Так как правая часть выражения (4.1.13) представляет собой поток энергии, то вектор Пойнтинга можно трактовать как *вектор плотности потока энергии*. Величина вектора Пойнтинга равна пределу отношения энергии, проходящей за время Δt через площадку ΔS, расположенную перпендикулярно направлению распространения энергии, при $\Delta t \to 0$ и $\Delta S \to 0$. Направление вектора Пойнтинга, как будет видно из дальнейшего изложения, в изотропной среде совпадает с направлением распространения энергии.

4.2. Плотность энергии электромагнитного поля

В предыдущем разделе было показано, что энергия электромагнитного поля в объеме V определяется выражением (4.1.11). Интеграл в этом выражении можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от электрического поля, а второе — только от магнитного:

$$W = W_э + W_м, \tag{4.2.1}$$

где

$$W_э = \frac{1}{2} \int\limits_V \varepsilon_а E^2 \, dV \tag{4.2.2}$$

— энергия электрического поля, а

$$W_м = \frac{1}{2} \int\limits_V \mu_а H^2 \, dV \tag{4.2.3}$$

— энергия магнитного поля. Соответственно величины

$$w_э = \frac{1}{2} \varepsilon_а E^2 \tag{4.2.4}$$

и

$$w_м = \frac{1}{2} \mu_а H^2 \tag{4.2.5}$$

можно интерпретировать как объемные плотности электрического и магнитного полей, а их сумму

$$w = w_э + w_м = \frac{1}{2} \varepsilon_а E^2 + \frac{1}{2} \mu_а H^2 \tag{4.2.6}$$

— как объемную плотность полной энергии электромагнитного поля.

Подчеркнем, что принцип суперпозиции, которому удовлетворяют векторы напряженности электрического и магнитного полей, не распространяется на энергию. Действительно, пусть энергия полей $\mathbf{E}_1$; $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$; $\mathbf{H}_2$, существующих по отдельности в области V, равна соответственно W_1 и W_2. Тогда энергия суммарного поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ определится выражением

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_V [\varepsilon_a (\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2)^2+\mu_a (\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2)^2]dV = W_1+W_2+W_{12}, \qquad (4.2.7)$$

где
$$W_{12}=\int\limits_V (\varepsilon_a \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2+\mu_a \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)\,dV \qquad (4.2.8)$$

— взаимная энергия полей.

Взаимная энергия W_{12} может быть как положительной, так и отрицательной. Это означает, что объединение двух электромагнитных полей в одних случаях сопровождается отдачей энергии, а в других случаях требует дополнительной затраты энергии источников. Если векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, а также $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ взаимно перпендикулярны, то $W_{12}=0$.

В случае переменных процессов распределение электромагнитной энергии непрерывно изменяется. Это изменение в каждой данной точке можно определить на основе ур-ния (4.1 6), которое можно представить в виде

$$p_{\text{ст}}=p_{\text{п}}+\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \qquad (4.2.9)$$

где $p_{\text{ст}}=-\mathbf{E}\mathbf{j}^{\text{ст}}$ — плотность мощности сторонних источников, а $p_{\text{п}}=\mathbf{E}\mathbf{j}$ — плотность мощности джоулевых потерь.

Уравнение (4.2.9) является *дифференциальной формой теоремы Пойнтинга.*

4.3. Скорость распространения электромагнитной энергии

Найдем скорость распространения электромагнитной энергии $\mathbf{v}_э$. Для этого в рассматриваемом пространстве выделим энергетическую трубку (рис. 4.3.1). Форма трубки должна быть такой, чтобы на ее боковой поверхности нормальная составляющая вектора Пойнтинга равнялась нулю.

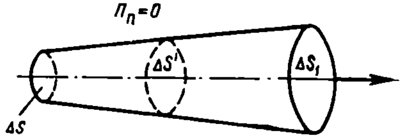


Рис. 4.3.1

Пусть энергия ΔW, прошедшая через поперечное сечение трубки ΔS за время Δt, сосредоточена в объеме ΔV, заключенном между сечениями трубки ΔS и ΔS_1 (рис. 4.3.1), расстояние между которыми равно Δl. Тогда скорость распространения энергии

$$\mathbf{v}_э=\mathbf{l}_0\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t}, \qquad (4.3.1)$$

где $\mathbf{l}_0$ — единичный вектор, определяющий направление распространения энергии.

Энергию ΔW можно выразить в виде

$$\Delta W=\Delta l\int\limits_{\Delta S'} w\,dS, \qquad (4.3.2)$$

где $\Delta S'$ — некоторое поперечное сечение трубки, расположенное между ΔS и ΔS_1.

Так как при достаточно малых Δt вектор Пойнтинга можно считать неизменным в пределах Δt, то наряду с (4.3.2) должно выполняться равенство

$$\Delta W = \Delta t \int_{\Delta S} \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S}. \tag{4.3.3}$$

Приравнивая правые части выражений (4.3.2) и (4.3.3) и определяя затем отношение $\Delta l/\Delta t$, получаем [1])

$$v_э = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\int\limits_{\Delta S} \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S}}{\int\limits_{\Delta S} w\, dS}\,. \tag{4.3.4}$$

Если векторы **E** и **H**, а следовательно, вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}$ и объемная плотность энергии w не изменяются вдоль сечения ΔS, то ф-ла (4.3.4) упрощается. Учитывая, что в этом случае направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением распространения энергии, получаем

$$\mathbf{v}_э = \frac{\mathbf{\Pi}}{w}\,. \tag{4.3.5}$$

4.4. Уравнения Максвелла для монохроматического поля

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Все реальные электромагнитные процессы можно представить либо в виде суммы дискретных гармонических колебаний, либо в виде непрерывного спектра гармонических колебаний. Поэтому изучение гармонических во времени электромагнитных полей представляет большой практический и теоретический интерес. Такие поля часто называют также *монохроматическими* [2]).

Анализ гармонических процессов существенно упрощается при использовании метода комплексных амплитуд. В этом случае вместо любой скалярной функции ψ, изменяющейся по закону

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi), \tag{4.4.1}$$

где ψ_m — амплитуда; φ — начальная фаза, а $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — круговая частота гармонического колебания, вводится в рассмотрение комплексная функция

$$\dot{\psi} = \psi_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \dot{\psi}_m e^{i\omega t}. \tag{4.4.2}$$

---

[1]) В пределе при $\Delta t \to 0$ сечение $\Delta S'$ совпадает с сечением ΔS.

[2]) В буквальном переводе «монохроматический» означает «одноцветный». Название взято из оптики: как известно, каждому цвету соответствуют колебания определенной частоты.

Величину $\dot{\psi}_m = \psi_m e$ принято называть комплексной амплитудой функции ψ. Для перехода от комплексной функции $\dot{\psi}$ к исходной функции ψ нужно взять от $\dot{\psi}$ реальную часть:

$$\psi = \mathrm{Re}\,\dot{\psi}. \qquad (4.4.3)$$

Аналогично вместо вектора

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 a_{xm} \cos(\omega t + \varphi_1) + \mathbf{y}_0 a_{ym} \cos(\omega t + \varphi_2) + \mathbf{z}_0 a_{zm} \cos(\omega t + \varphi_3) \qquad (4.4.4)$$

можно ввести в рассмотрение комплексный вектор

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{x}_0 a_{xm} e^{i(\omega t + \varphi_1)} + \mathbf{y}_0 a_{ym} e^{i(\omega t + \varphi_2)} + \mathbf{z}_0 a_{zm} e^{i(\omega t + \varphi_3)}. \qquad (4.4.5)$$

Причем

$$\mathbf{a} = \mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{a}}. \qquad (4.4.6)$$

Выражение (4.4.5) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_m e^{i\omega t}, \qquad (4.4.7)$$

где

$$\dot{\mathbf{a}}_m = \mathbf{x}_0 a_{xm} e^{i\varphi_1} + \mathbf{y}_0 a_{ym} e^{i\varphi_2} + \mathbf{z}_0 a_{zm} e^{i\varphi_3} \qquad (4.4.8)$$

— комплексная амплитуда вектора $\dot{\mathbf{a}}$.

Отметим, что в общем случае вместо разложения вектора $\mathbf{a}$ по ортам декартовой системы координат (4.4.4) может оказаться необходимым разложение по каким-либо другим ортогональным векторам, что не вносит в рассмотрение никаких принципиальных изменений. Если функции $\mathbf{a}$ и ψ удовлетворяют *линейным* уравнениям, то таким же уравнениям будут удовлетворять соответствующие комплексные функции $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\psi}$. Однако определение комплексных функций во многих случаях оказывается проще определения исходных функций. Это объясняется тем, что дифференцирование комплексной функции по времени равносильно умножению ее на $i\omega$: $d\dot{\mathbf{a}}/dt = i\omega\dot{\mathbf{a}}$; $d\dot{\psi}/dt = i\omega\dot{\psi}$, а интегрирование по времени — делению на $i\omega$: $\int \dot{\mathbf{a}}\,dt = \dot{\mathbf{a}}/i\omega$; $\int \dot{\psi}\,dt = \dot{\psi}/i\omega$.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Уравнения Максвелла являются *линейными* дифференциальными уравнениями. Поэтому при изучении монохроматических электромагнитных полей можно вместо векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ рассматривать комплексные векторы

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t} \text{ и } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}, \qquad (4.4.9)$$

связанные с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соотношениями:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{E}}; \quad \mathbf{H} = \mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{H}}. \qquad (4.4.10)$$

Комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ определяются выражениями вида (4.4.8). Например, если $\mathbf{E}=\mathbf{x}_0 E_{xm}\cos(\omega t+\varphi_1)+\mathbf{y}_0 E_{ym}\cos(\omega t+\varphi_2)+\mathbf{z}_0 E_{zm}\cos(\omega t+\varphi_3)$, то $\dot{\mathbf{E}}_m=\mathbf{x}_0 E_{xm}e^{i\varphi_1}+\mathbf{y}_0 E_{ym}e^{i\varphi_2}+\mathbf{z}_0 E_{zm}e^{i\varphi_3}$. Если составляющие вектора $\mathbf{E}$ изменяются в фазе, то выражение для комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ упрощается. Действительно, если $\mathbf{E}=\mathbf{E}_m\cos(\omega t+\varphi)$, то $\dot{\mathbf{E}}_m=\mathbf{E}_m e^{i\varphi}$. Аналогичные соотношения выполняются для вектора $\mathbf{H}$.

Перейдем в системе уравнений Максвелла (2.8.1) к комплексным векторам $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Первое уравнение Максвелла в комплексной форме принимает вид

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{j}}+i\omega\dot{\mathbf{D}}. \tag{4.4.11}$$

Учитывая, что $\dot{\mathbf{j}}=\sigma\dot{\mathbf{E}}$, а $\dot{\mathbf{D}}=\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}$, получаем

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=\sigma\dot{\mathbf{E}}+i\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}=i\omega\varepsilon_a\left(1-\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right)\dot{E}. \tag{4.4.12}$$

Введя обозначение

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_a\left(1-\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right), \tag{4.4.13}$$

перепишем ур-ние (4.4.12) в форме

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}. \tag{4.4.14}$$

Уравнение (4.4.14) является первым уравнением Максвелла для монохроматического поля. Величина $\tilde{\varepsilon}$, определяемая ф-лой (4.4.13), характеризует электрические свойства среды и называется *комплексной диэлектрической проницаемостью* среды. Ее значение зависит от частоты. Входящая в ф-лу (4.4.13) величина $\sigma/\omega\varepsilon_a$ равна отношению амплитуд плотностей тока проводимости и тока смещения (см. разд. 2.7) и называется *тангенсом угла потерь*:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}=\operatorname{tg}\delta. \tag{4.4.15}$$

Отметим, что комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}$ определяется выражением (4.4.13) только в тех случаях, когда можно пренебречь диэлектрическими потерями, возникающими в результате периодически изменяющейся поляризации вещества. В общем случае комплексную диэлектрическую проницаемость можно представить в виде

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon''=|\tilde{\varepsilon}|\,e^{-i\,\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}, \tag{4.4.16}$$

где ε' и ε'' — вещественные числа.

Наличие диэлектрических потерь приводит, в частности, к появлению фазового сдвига между векторами $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{D}}$: $\psi=$

$=\mathrm{arctg}\,(\varepsilon''/\varepsilon')-\mathrm{arctg}\,(\sigma/\omega\varepsilon')$. В общем случае тангенс угла потерь определяется выражением

$$\mathrm{tg}\,\delta=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\,. \tag{4.4.17}$$

Рассмотрим второе уравнение Максвелла. В общем случае при переходе к комплексным векторам магнитную проницаемость среды также следует считать комплексной величиной

$$\widetilde{\mu}=\mu'-\mathrm{i}\,\mu''=|\widetilde{\mu}|\,e^{-\mathrm{i}\,\delta_{\text{м}}}. \tag{4.4.18}$$

Угол $\delta_{\text{м}}$ характеризует отставание по фазе вектора **B** от вектора **H**, возникающее, например, в ферромагнетиках (явление гистерезиса).

С учетом изложенного второе уравнение Максвелла можно записать в форме

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}=-\mathrm{i}\,\omega\,\widetilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}}. \tag{4.4.19}$$

Введение комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей в случае монохроматического поля дает возможность рассмотреть ряд явлений, в которых не выполняются уравнения состояния (1.2.8) и (1.2.25) и, в частности, учесть потери, возникающие при поляризации и намагничивании.

Отметим, что в случае монохроматического поля третье и четвертое уравнения Максвелла являются следствиями первых двух уравнений.

В разд. 2.7 было показано, что в среде с проводимостью, отличной от нуля, объемная плотность свободных зарядов в любой внутренней точке среды экспоненциально убывает с течением времени. Это означает, что в установившихся электромагнитных процессах (например, в случае монохроматических полей) объемная плотность свободных зарядов в проводящей среде должна быть равна нулю, и третье уравнение Максвелла для однородной изотропной среды принимает вид

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}=0. \tag{4.4.20}$$

В случае монохроматических полей ур-ние (4.4.20) будет выполняться также и для непроводящих сред. Действительно, объемная плотность свободных зарядов должна изменяться со временем по закону $\rho=\rho_m\cos(\omega t+\varphi)$. Всякое изменение заряда сопровождается возникновением тока, а в непроводящей среде появление тока проводимости, удовлетворяющего закону Ома, невозможно. Следовательно, свободные заряды должны отсутствовать.

Переходя в ур-нии (4.4.20) к комплексному вектору $\dot{\mathbf{E}}$, получаем

$$\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{E}}=0. \tag{4.4.21}$$

Аналогично четвертое уравнение Максвелла будет иметь вид:

$$\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{H}}=0. \tag{4.4.22}$$

Эти уравнения являются следствиями первых двух уравнений Максвелла (4.4.14) и (4.4.19). Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей равенств (4.4.14) и (4.4.19), придем к соотношениям (4.4.21) и (4.4.22), так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю. Таким образом, монохроматическое поле описывается системой двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} &= \mathrm{i}\,\omega\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}} \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} &= -\mathrm{i}\,\omega\tilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.23}$$

В тех точках, где имеются сторонние токи, система уравнений (4.4.23) непригодна. Первое уравнение Максвелла, учитывающее сторонние токи, записывается в форме (2.10.1). В случае монохроматического поля это уравнение принимает вид:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{j}} + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}} + \mathrm{i}\,\omega\dot{\mathbf{D}}. \tag{4.4.24}$$

Вводя комплексную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\varepsilon}$, получаем

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \mathrm{i}\,\omega\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}. \tag{4.4.25}$$

Соответственно третье уравнение Максвелла для комплексного вектора $\dot{\mathbf{E}}$ в случае однородной изотропной среды имеет вид

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\rho}^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}, \tag{4.4.26}$$

где $\dot{\rho}^{\text{ст}}$ — комплексная плотность сторонних зарядов.

Равенство (4.4.26) является следствием ур-ния (4.4.24), так как сторонние токи и заряды (разд. 2.10) связаны уравнением непрерывности[1]):

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}} + \mathrm{i}\,\omega\dot{\rho}^{\text{ст}} = 0. \tag{4.4.27}$$

Второе и четвертое уравнения Максвелла остаются без изменений, т. е. записываются в форме (4.4.19) и (4.4.22) соответственно.

Таким образом, система уравнений Максвелла, учитывающая сторонние токи и заряды, в случае монохроматического поля имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} &= \mathrm{i}\,\omega\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}} \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} &= -\mathrm{i}\,\omega\tilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}} \end{aligned}\right\}. \tag{4.4.28}$$

---

[1]) Выше было показано, что в установившемся электромагнитном поле и, в частности, в монохроматическом поле, объемная плотность свободных зарядов равна нулю. Заряды концентрируются лишь у границы раздела сред, образуя весьма тонкий слой, который при анализе рассматривается как бесконечно тонкий. Поэтому, строго говоря, $\dot{\rho}^{\text{ст}}$ должно быть равно нулю, и ур-ние (4.4.27) должно иметь вид $\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}=0$. Однако распределение $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}$ обычно задается приближенно на основании общих соображений. При этом может оказаться, что $\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}\neq 0$. Тогда необходимо допустить существование $\dot{\rho}^{\text{ст}}$.

Отметим, что систему уравнений Максвелла монохроматического поля можно переписать для комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\mathbf{H}_m$. Действительно, учитывая в системе (4.4.23), что векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ связаны с $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ соотношением вида (4.4.7), и сокращая общий множитель $e^{i\omega t}$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m &= i\,\omega\,\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}}_m \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\,\omega\,\tilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}}_m \end{aligned}\right\}. \tag{4.4.29}$$

Аналогично можно переписать систему (4.4.28).

4.5. Уравнение баланса для средней за период мощности. Комплексная мощность

Теорема Пойнтинга (4.1.8) была сформулирована для мгновенных значений входящих в нее величин. Она выполняется в каждый момент времени и является одним из наиболее важных соотношений классической электродинамики. В случае периодических полей большой интерес представляют также энергетические соотношения для средних за период величин. Средним за период T значением функции $f(t)$ называют величину

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \tag{4.5.1}$$

Составим уравнение баланса для средних за период значений мощности монохроматического электромагнитного поля. Сначала найдем средние за период значения величин, входящих в ур-ние (4.1.8). Для этого нужно вычислить интегралы вида (4.5.1). Так как интегрирование в (4.5.1) ведется по времени, удобно перейти к комплексным векторам. Однако метод комплексных амплитуд непосредственно применим лишь в случае линейных уравнений. Поэтому обычная замена векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соответствующими комплексными векторами $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в ур-нии (4.1.8) приведет к неправильным результатам, так как

$$\psi_1\psi_2 \neq \operatorname{Re}(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2); \quad (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) \neq \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{a}}_1, \dot{\mathbf{a}}_2); \quad [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{a}}_1, \dot{\mathbf{a}}_2],$$

где ψ_1, ψ_2; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — произвольные скалярные и векторные функции, гармонически изменяющиеся со временем, а $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$; $\dot{\mathbf{a}}_1$ и $\dot{\mathbf{a}}_2$ — соответствующие им комплексные функции.

К комплексным функциям в нелинейном соотношении можно перейти, используя очевидные равенства:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}(\dot{\psi} + \overset{*}{\psi}) \\ \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{a}} + \overset{*}{\mathbf{a}}) \end{aligned}\right\}, \tag{4.5.2}$$

где $\overset{*}{\psi}$ и $\overset{*}{\dot{a}}$ — функции, комплексно-сопряженные с $\dot{\psi}$ и $\dot{a}$ соответственно.

Напомним, что для перехода к сопряженной величине достаточно изменить знак у всех мнимых единиц, т. е. вместо i всюду записать $-i$.

Рассмотрим вектор Пойнтинга. С учетом равенств (4.5.2) представим мгновенное значение вектора Пойнтинга в следующем виде:

$$\mathbf{\Pi}=[\mathbf{E},\mathbf{H}]=\frac{1}{4}[\dot{\mathbf{E}}+\overset{*}{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}+\overset{*}{\mathbf{H}}]=\frac{1}{4}\{[\dot{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}]+[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]+[\overset{*}{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}]+[\overset{*}{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]\}. \tag{4.5.3}$$

Векторы $[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]$ и $[\overset{*}{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}]$ являются комплексно-сопряженными, следовательно, их сумма равна удвоенной вещественной части любого из этих векторов, например

$$[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]+[\overset{*}{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}]=2\,\mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]. \tag{4.5.4}$$

Подставляя выражение (4.5.4) в (4.5.3) и учитывая, кроме того, что $[\dot{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}]=[\dot{\mathbf{E}}_m,\dot{\mathbf{H}}_m]\,e^{i2\omega t}$ и $[\overset{*}{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]=[\overset{*}{\mathbf{E}}_m,\overset{*}{\mathbf{H}}_m]\,e^{-i2\omega t}$ получаем

$$\mathbf{\Pi}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]+\frac{1}{4}\{[\dot{\mathbf{E}}_m,\dot{\mathbf{H}}_m]\,e^{i2\omega t}+[\overset{*}{\mathbf{E}}_m,\overset{*}{\mathbf{H}}_m]\,e^{-i2\omega t}\}. \tag{4.5.5}$$

Первое слагаемое в правой части ф-лы (4.5.5) не зависит от времени. Остальные слагаемые изменяются с двойной частотой, и поэтому их среднее за период значение равно нулю. Следовательно, при усреднении вектора Пойнтинга по ф-ле (4.5.1), получаем

$$\mathbf{\Pi}_{\text{ср}}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}]. \tag{4.5.6}$$

Комплексный вектор

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}=\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}},\overset{*}{\mathbf{H}}] \tag{4.5.7}$$

называют *комплексным вектором Пойнтинга.*

Вещественная часть комплексного вектора Пойнтинга равна среднему за период значению вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{ср}}=\mathrm{Re}\,\widetilde{\mathbf{\Pi}}. \tag{4.5.8}$$

Среднее значение вектора Пойнтинга можно рассматривать как среднюю за период плотность потока энергии. Поэтому средний поток энергии через поверхность S, ограничивающую рассматриваемый объем V,

$$P_{\Sigma\,\text{ср}}=\mathrm{Re}\oint_S \widetilde{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S}. \tag{4.5.9}$$

Аналогично вычисляются средние значения остальных величин, входящих в ур-ние (4.1.8). Опустив очевидные преобразования, выпишем окончательные результаты. Средняя мощность джоулевых потерь

$$P_{\text{п ср}}=\frac{1}{2}\int\limits_V \overset{*}{\dot{\mathbf{j}}}\dot{\mathbf{E}}dV=\frac{1}{2}\int\limits_V \sigma\dot{\mathbf{E}}\overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}dV. \qquad (4.5.10)$$

Интеграл в ф-ле (4.5.10) — вещественное положительное число, так как $\dot{\mathbf{E}}$ и $\overset{*}{\mathbf{E}}$ — комплексно-сопряженные величины.

Средняя мощность, выделяемая в объеме V сторонними источниками,

$$P_{\text{ст ср}}=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_V \overset{*}{\dot{\mathbf{j}}}{}^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}\,dV. \qquad (4.5.11)$$

Средние значения электрической и магнитной энергии определяются выражениями[1]):

$$W_{\text{э ср}}=\frac{1}{4}\int\limits_V \varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}\overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}\,dV; \qquad (4.5.12)$$

$$W_{\text{м ср}}=\frac{1}{4}\int\limits_V \mu_a\dot{\mathbf{H}}\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}\,dV, \qquad (4.5.13)$$

а среднее за период изменение электромагнитной энергии равно нулю:

$$\frac{dW_{\text{ср}}}{dt}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{dW}{dt}\,dt=\frac{1}{T}\left(W|_{t=T}-W|_{t=0}\right)=0.$$

Таким образом, усреднение по времени теоремы Пойнтинга (4.1.8) приводит к уравнению

$$P_{\text{ст ср}}=P_{\text{п ср}}+P_{\Sigma\text{ ср}}, \qquad (4.5.14)$$

где $P_{\text{ст ср}}$, $P_{\text{п ср}}$ и $P_{\Sigma\text{ ср}}$ определяются выражениями (4.5.11), (4.5.10) и (4.5.9) соответственно.

Уравнение (4.5.14) имеет простой физический смысл. В среднем за период мощность сторонних источников расходуется на джоулевы потери внутри рассматриваемого объема V и на излучение электромагнитной энергии из этого объема через поверхность S. Если средняя за период мощность сторонних источников больше средних джоулевых потерь $P_{\text{ст ср}}>P_{\text{п ср}}$, то поток энергии в среднем выходит из объема V. Если $P_{\text{ст ср}}<P_{\text{п ср}}$, то энергия поступает в объем V из окружающего пространства.

В электротехнике и радиотехнике рассматривают также *комплексную мощность*. Вещественная часть комплексной мощности

---

[1]) В данном разделе для простоты изложения предполагается, что $\tilde{\varepsilon}$ определяется соотношением (4.4.13), а $\tilde{\mu}=\mu_a$, т. е. является вещественной величиной ($\mu''=0$).

(ее называют *активной мощностью*) совпадает со средней за период мощностью. Соответственно комплексная мощность сторонних источников

$$\widetilde{P}_{ст} = -\frac{1}{2}\int\limits_V \dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{j}}{}^{ст}\,dV = P^a + \mathrm{i}\,P^r. \tag{4.5.15}$$

Вещественная часть $\widetilde{P}_{ст}$, или *активная мощность* сторонних источников, равна средней за период мощности сторонних источников [см. ф-лу (4.5.11)]:

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{P}_{ст} = P^a = P_{ст\,ср}. \tag{4.5.16}$$

Мнимая часть $\widetilde{P}_{ст}$ характеризует *реактивную мощность* сторонних источников. Реактивная мощность изменяется со временем по гармоническому закону с частотой 2ω. Это означает, что в течение периода половину времени мощность имеет положительное значение, а вторую половину — отрицательное. Среднее за период значение реактивной мощности равно нулю. Величина $\mathrm{Im}\,\widetilde{P}_{ст} = P^r$ равна амплитуде реактивной мощности сторонних источников.

Уравнение баланса для комплексной мощности выводится аналогично теореме Пойнтинга (4.1.8). Выпишем первое уравнение Максвелла для векторов $\overset{*}{\mathbf{E}}$, $\overset{*}{\mathbf{H}}$ и $\overset{*}{\mathbf{j}}$, являющихся комплексно-сопряженными по отношению к векторам $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{j}^{ст}$ соответственно:

$$\mathrm{rot}\,\overset{*}{\mathbf{H}} = -\mathrm{i}\,\omega\,\overset{*}{\varepsilon}\,\overset{*}{\mathbf{E}} + \overset{*}{\mathbf{j}}{}^{ст}, \tag{4.5.17}$$

где

$$\overset{*}{\varepsilon} = \varepsilon_a + \frac{\mathrm{i}\,\sigma}{\omega}. \tag{4.5.18}$$

— комплексная величина, сопряженная с $\tilde{\varepsilon}$.

Подставляя ф-лу (4.5.18) в ур-ние (4.5.17), получаем

$$\mathrm{rot}\,\overset{*}{\mathbf{H}} = \sigma\,\overset{*}{\mathbf{E}} - \mathrm{i}\,\omega\,\varepsilon_a\,\overset{*}{\mathbf{E}} + \overset{*}{\mathbf{j}}{}^{ст}. \tag{4.5.19}$$

Обе части равенства (4.5.19) умножим скалярно на вектор $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\dot{\mathbf{E}}\,\mathrm{rot}\,\overset{*}{\mathbf{H}} = \sigma\,\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{E}} - \mathrm{i}\,\omega\,\varepsilon_a\,\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{j}}{}^{ст}. \tag{4.5.20}$$

Используя ф-лу (4.1.3) и второе уравнение Максвелла (4.4.19), которое в рассматриваемом случае $\tilde{\mu} = \mu_a$ имеет вид $\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}} = -\mathrm{i}\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}$, преобразуем выражение $\dot{\mathbf{E}}\,\mathrm{rot}\,\overset{*}{\mathbf{H}}$ следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}\,\mathrm{rot}\,\overset{*}{\mathbf{H}} = \overset{*}{\mathbf{H}}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}} - \mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}, \overset{*}{\mathbf{H}}] = -\mathrm{i}\,\omega\,\mu_a\,\dot{\mathbf{H}}\,\overset{*}{\mathbf{H}} - 2\,\mathrm{div}\,\widetilde{\mathbf{\Pi}}. \tag{4.5.21}$$

Подставляя ф-лу (4.5.21) в (4.5.20), получаем

$$-\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{j}}{}^{ст} = \sigma\,\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{E}} + 2\,\mathrm{div}\,\widetilde{\mathbf{\Pi}} + \mathrm{i}\,\omega\,(\mu_a\,\dot{\mathbf{H}}\,\overset{*}{\mathbf{H}} - \varepsilon_a\,\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{E}}). \tag{4.5.22}$$

Интегрируя (4.5.22) по объему V и применяя теорему Остроградского—Гаусса к интегралу от $\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{\Pi}}$, приходим к уравнению

$$-\frac{1}{2}\int\limits_V \dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{j}}^{\text{ст}}\,dV=\frac{1}{2}\int\limits_V \sigma\,\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{E}}\,dV+\oint\limits_S \widetilde{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S}+$$

$$+\frac{i\omega}{2}\left\{\int\limits_V \mu_a\,\dot{\mathbf{H}}\,\overset{*}{\mathbf{H}}\,dV-\int\limits_V \varepsilon_a\,\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{E}}\,dV\right\}, \qquad (4.5.23)$$

которое с учетом (4.5.10), (4.5.12), (4.5.13) и (4.5.15) можно также переписать в виде

$$\widetilde{P}_{\text{ст}}=P_{\text{п ср}}+\oint\limits_S \widetilde{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S}+2i\omega\{W_{\text{м ср}}-W_{\text{э ср}}\}. \qquad (4.5.24)$$

Соотношение (4.5.24) представляет собой уравнение баланса комплексной мощности. Разделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получаем два независимых уравнения:

$$\operatorname{Re}\widetilde{P}_{\text{ст}}=P_{\text{п ср}}+\operatorname{Re}\oint\limits_S \widetilde{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S}, \qquad (4.5.25)$$

$$\operatorname{Im}\widetilde{P}_{\text{ст}}=\operatorname{Im}\oint\limits_S \widetilde{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S}+2\omega\{W_{\text{м ср}}-W_{\text{э ср}}\}. \qquad (4.5.26)$$

Уравнение (4.5.25) представляет собой уравнение баланса активной мощности. Как и следовало ожидать, оно полностью совпадает с уравнением баланса для средних величин (4.5.14).

Уравнение (4.5.26) является уравнением баланса реактивной мощности. Его левая часть $\operatorname{Im}\widetilde{P}_{\text{ст}}$, как уже отмечалось, равна амплитуде реактивной мощности сторонних источников. Мнимая часть потока комплексного вектора Пойнтинга $\operatorname{Im}\oint\limits_S \widetilde{\mathbf{\Pi}}d\mathbf{S}$ равна амплитуде реактивного потока энергии через поверхность S. Реактивный поток энергии изменяется со временем по гармоническому закону с частотой 2ω. В течение периода он половину времени имеет положительное значение, т. е. энергия поступает из объема V в окружающее пространство, а вторую половину — отрицательное, т. е. энергия поступает из окружающего пространства в объем V. Среднее за период значение реактивного потока энергии равно нулю. Таким образом, из (4.5.26) следует, что разность между амплитудами реактивной мощности сторонних источников и реактивного потока энергии через охватывающую этот объем поверхность S равна умноженной на удвоенную частоту (2ω) разности между средними за период значениями энергии магнитного и электрического полей.

Предположим, что объем V представляет собой изолированную систему. Тогда поток комплексного вектора Пойнтинга через поверхность S будет равен нулю, и ур-ния (4.5.25) и (4.5.26) примут вид:

$$P^a = P_{\text{п ср}}; \tag{4.5.27}$$

$$P^r = 2\omega (W_{\text{м ср}} - W_{\text{э ср}}). \tag{4.5.28}$$

В этом случае в объеме V энергия электрического поля будет периодически преобразовываться в энергию магнитного поля и обратно. Если средние за период значения энергии электрического и магнитного полей равны

$$W_{\text{э ср}} = W_{\text{м ср}}, \tag{4.5.29}$$

то этот процесс протекает без участия источников, и мощность сторонних источников оказывается чисто активной ($P^r=0$). Если же $W_{\text{э ср}} \neq W_{\text{м ср}}$, то периодическое преобразование энергии из электрической в магнитную и обратно возможно только при участии источников. При этом реактивная мощность сторонних источников будет отличной от нуля ($P^r \neq 0$). Если в изолированной области мощность сторонних источников является чисто активной, то имеет место *резонанс*. Из изложенного следует, что для резонанса необходимо равенство средних значений энергии электрического и магнитного полей [условие (4.5.29)].

Отношение

$$Q = \frac{\omega W_{\text{ср}}}{P^a} = \frac{\omega W_{\text{ср}}}{P_{\text{п ср}}}, \tag{4.5.30}$$

где $W_{\text{ср}} = W_{\text{э ср}} + W_{\text{м ср}}$, называют *добротностью* изолированной системы.

Выражение (4.5.30) можно также переписать в иной форме. Заменив ω на $2\pi/T$, получаем

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{T P_{\text{п ср}}} = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{\Delta W}, \tag{4.5.31}$$

где ΔW — изменение энергии системы за период.

Таким образом, добротность изолированной системы — это увеличенное в 2π раз отношение запаса энергии системы $W_{\text{ср}}$ к энергии ΔW, расходуемой за период T.

Отметим, что среднее значение электромагнитной энергии $W_{\text{ср}}$ равно максимальной электрической или максимальной магнитной энергии в объеме V. Действительно, так как $W_{\text{э ср}} = \frac{1}{2} W_{\text{э макс}}$ и $W_{\text{м ср}} = \frac{1}{2} W_{\text{м макс}}$, то при выполнении условия (4.5.29) получаем

$$W_{\text{ср}} = W_{\text{э макс}} = W_{\text{м макс}}.$$

Уравнение (4.5.24) было выведено в предположении, что $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a(1 - i\sigma/\omega\varepsilon_a)$, а $\tilde{\mu} = \mu_a$. Отметим, что в общем случае, когда $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$; $\tilde{\mu} = \mu' - i\mu''$, уравнение баланса комплексной мощности также имеет вид (4.5.24), однако при этом входящие в него величины $P_{\text{п ср}}$, $W_{\text{э ср}}$ и $W_{\text{м ср}}$ определяются выражениями:

$$P_{\text{п ср}} = \frac{\omega}{2}\int\limits_V \varepsilon'' \dot{\mathbf{E}} \overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}\, dV + \frac{\omega}{2}\int\limits_V \mu'' \dot{\mathbf{H}} \overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}\, dV, \tag{4.5.32}$$

$$W_{\text{э ср}} = \frac{1}{4}\int\limits_V \varepsilon' \dot{\mathbf{E}} \overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}\, dV, \tag{4.5.33}$$

$$W_{\text{м ср}} = \frac{1}{4}\int\limits_V \mu' \dot{\mathbf{H}} \overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}\, dV. \tag{4.5.34}$$

В заключение данного раздела приведем формулы, определяющие скорость переноса энергии в случае монохроматического электромагнитного поля. Основываясь на результатах разд. 4.3, нетрудно показать, что

$$v_э = \frac{\int\limits_{\Delta S} \operatorname{Re} \widetilde{\mathbf{\Pi}}\, d\mathbf{S}}{\int\limits_{\Delta S} w_{\text{ср}}\, dS}, \tag{4.5.35}$$

где ΔS — поперечное сечение энергетической трубки, выбранной таким образом, чтобы на ее боковой поверхности нормальная составляющая комплексного вектора Пойнтинга равнялась нулю; $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$, а $\mathbf{n}_0$ — нормаль к площадке ΔS, направленная в сторону распространения энергии.

Если значения вектора $\widetilde{\mathbf{\Pi}}$ и функции $w_{\text{ср}}$ одинаковы во всех точках сечения ΔS, то выражение (4.5.35) упрощается и принимает вид

$$\mathbf{v}_э = \frac{\operatorname{Re} \widetilde{\mathbf{\Pi}}}{w_{\text{ср}}}. \tag{4.5.36}$$

4.6. Теорема единственности для внутренних и внешних задач электродинамики

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Уравнения Максвелла являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Такие уравнения допускают множество решений. Однако из общих физических представлений очевидно, что при полном повторении условий эксперимента распределение электромагнитного поля должно быть одинаковым. Следовательно, в каждом конкретном случае электромагнитное поле должно удовлетворять не только уравнениям Максвелла, но и некоторым дополнительным требованиям. На вопрос о том, какими должны быть эти дополнительные условия, чтобы решение электродинамической задачи было единственным, отвечает теорема единственности. При ее доказательстве различают внутренние и внешние задачи электродинамики. *Внутренняя* задача электродинамики состоит в нахождении электромагнитного поля внутри области V, ограниченной поверхностью S (рис. 4.1.1). Соответственно *внешняя* задача электродинамики сводится к нахождению электромагнитного поля вне некоторой заданной области.

Ограничимся доказательством теоремы единственности для случая монохроматических полей, причем будем считать, что в рассматриваемой части пространства имеет место хотя бы очень слабое поглощение энергии.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Покажем, что внутренняя задача электродинамики имеет единственное решение, если на граничной поверхности S выполняется одно из следующих условий:

— в каждой точке M поверхности S задана проекция вектора $\mathbf{E}$ на плоскость, касательную к S в точке M (E-задача):

$$E_\tau|_S = f(M); \tag{4.6.1}$$

— в каждой точке M поверхности S задана проекция вектора $\mathbf{H}$ на плоскоть, касательную к S в точке M (H-задача):

$$H_\tau|_S = g(M); \tag{4.6.2}$$

— на одной части поверхности (S_1) задана проекция вектора $\mathbf{E}$, а на другой части (S_2) — проекция вектора $\mathbf{H}$ на плоскость, касательную к S в точке M (EH-задача):

$$E_\tau|_{S_1} = F_1(M); \quad H_\tau|_{S_2} = F_2(M), \tag{4.6.3}$$

где $S_1 + S_2 = S$;

— в каждой точке M поверхности S проекции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на плоскость, касательную к S в точке M связаны соотношением

$$E_\tau|_S = Z(M) H_{\tau'}|_S, \tag{4.6.4}$$

причем

$$\operatorname{Re} Z(M) \geqslant 0. \tag{4.6.5}$$

Индексы τ и τ' означают, что в ф-лу (4.6.4) входят проекции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на направления, определяемые взаимно перпендикулярными единичными векторами $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_0'$ соответственно, которые лежат в плоскости, касательной к поверхности S в рассматриваемой точке, т. е. $[\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\tau}_0'] = \mathbf{n}_0$.

В выражениях (4.6.1)—(4.6.5) M — точка на поверхности S; $f(M)$, $g(M)$, $F_1(M)$, $F_2(M)$, $Z(M)$ — заданные функции точки M, а $\mathbf{n}_0$ — внешняя по отношению к рассматриваемой части пространства единичная нормаль к поверхности S.

Предположим, что существуют два различных решения поставленной задачи $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ и рассмотрим разность этих решений:

$$\mathbf{E}_3=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2; \quad \mathbf{H}_3=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2. \tag{4.6.6}$$

Так как анализ ограничен случаем монохроматического поля, то вместо векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$; $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$ можно рассматривать соответствующие комплексные векторы $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{E}}_3$ и $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_3$. Векторы $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ удовлетворяют уравнениям Максвелла вида (4.4.28):

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1=\mathrm{i}\,\omega\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}}_1+\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}, \quad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_1=-\mathrm{i}\,\omega\tilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}}_1; \tag{4.6.7}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_2=\mathrm{i}\,\omega\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}}_2+\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}, \quad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2=-\mathrm{i}\,\omega\tilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}}_2 \tag{4.6.8}$$

и одинаковым граничным условиям на поверхности S. Уравнения Максвелла для поля $\dot{\mathbf{E}}_3$; $\dot{\mathbf{H}}_3$ получаются путем вычитания ур-ний (4.6.8) и (4.6.7). При этом $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}$ сокращаются и уравнения Максвелла для поля $\dot{\mathbf{E}}_3$; $\dot{\mathbf{H}}_3$ принимают вид (4.4.23). На поверхности S поле $\dot{\mathbf{E}}_3$; $\dot{\mathbf{H}}_3$ должно удовлетворять следующим граничным условиям:

— в случае E-задачи

$$\dot{E}_{3\tau}|_S=0; \tag{4.6.9}$$

— в случае H-задачи

$$\dot{H}_{3\tau}|_S=0; \tag{4.6.10}$$

— в случае EH-задачи:

$$\dot{E}_{3\tau}|_{S_1}=0, \quad \dot{H}_{3\tau}|_{S_2}=0; \tag{4.6.11}$$

— в случае условия (4.6.4)

$$\dot{E}_{3\tau}|_S=Z(M)\,\dot{H}_{3\tau'}|_S. \tag{4.6.12}$$

Составим уравнение баланса для активной мощности разностного поля $\dot{\mathbf{E}}_3$, $\dot{\mathbf{H}}_3$. Так как векторы $\dot{\mathbf{E}}_3$, $\dot{\mathbf{H}}_3$ удовлетворяют ур-ниям (4.4.23), то мощность сторонних источников для разностного поля равна нулю и ур-ние (4.5.25) принимает вид:

$$P_{\text{п ср}}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint\limits_S[\dot{\mathbf{E}}_3, \overset{*}{\mathbf{H}}_3]\,d\mathbf{S}=0. \tag{4.6.13}$$

Так как $d\mathbf{S}=\mathbf{n}_0 dS$, то произведение $[\dot{\mathbf{E}}_3, \overset{*}{\mathbf{H}}_3]d\mathbf{S}$ определяется только касательными составляющими векторов $\dot{\mathbf{E}}_3$ и $\overset{*}{\mathbf{H}}_3$.

В случае выполнения условий (4.6.9)—(4.6.11) произведение $[\dot{\mathbf{E}}_3, \overset{*}{\mathbf{H}}_3]d\mathbf{S}$ на поверхности S обращается в нуль. При этом из (4.6.13) получаем

$$P_{\text{п ср}}=0. \tag{4.6.14}$$

Предположим вначале, что потери энергии в объеме V обусловлены только наличием проводимости ($\sigma\neq0$), т. е. что $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon_a\left(1-\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right)$, а $\widetilde{\mu}=\mu_a$. В этом случае ур-ние (4.6.14) принимает вид

$$\int\limits_V \sigma\,\dot{\mathbf{E}}_3\overset{*}{\mathbf{E}}_3\,dV=0. \tag{4.6.15}$$

Так как $\sigma\neq0$, а $\dot{\mathbf{E}}_3\overset{*}{\mathbf{E}}_3\geqslant0$, то из ур-ния (4.6.15) следует, что комплексный вектор $\dot{\mathbf{E}}_3=0$, а это влечет за собой равенство нулю самого вектора $\mathbf{E}_3$. Используя второе уравнение Максвелла, записанное относительно векторов $\dot{\mathbf{E}}_3$ и $\dot{\mathbf{H}}_3$, получаем $\mathbf{H}_3=0$. Следовательно, $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_2$, т. е. задача имеет единственное решение

Рассмотрим теперь условие (4.6.4). Уравнение (4.6.13) в этом случае можно переписать в виде:

$$\int\limits_V \sigma\,\dot{\mathbf{E}}_3\overset{*}{\mathbf{E}}_3\,dV+\mathrm{Re}\oint\limits_S Z\dot{H}_{3\tau'}\overset{*}{H}_{3\tau'}\,dS=0. \tag{4.6.16}$$

Так как $\dot{\mathbf{E}}_3\overset{*}{\mathbf{E}}_3$ и $\dot{\mathbf{H}}_3\overset{*}{\mathbf{H}}_3$ — вещественные неотрицательные числа, а $\mathrm{Re}\,\mathbf{Z}\geqslant0$, то равенство (4.6.16) возможно только при $\dot{\mathbf{E}}_3=0$ и $\mathbf{H}_3=0$. Следовательно, и в этом случае задача имеет единственное решение.

Единственность решения в более общем случае, когда $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon''$ и $\widetilde{\mu}=\mu'-i\mu''$, доказывается аналогично на основе анализа ур-ния (4.6.13). При этом выражение для средней за период мощности потерь в объеме V для поля $\dot{\mathbf{E}}_3$; $\overset{*}{\mathbf{H}}_3$ должно быть записано на основе равенства (4.5.32).

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В случае внешней задачи электродинамики поверхность S не охватывает рассматриваемую часть пространства, распространяющуюся до бесконечности. Поэтому для единственности решения, кроме условий (4.6.1)—(4.6.4), требуется задать дополнительное условие, характеризующее поведение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в точках, бесконечно удаленных от поверхности S. Выясним, каким должно быть это дополнительное условие.

Пусть на поверхности S выполняется одно из условий (4.6.1)—(4.6.4). Предположим, что имеется два решения задачи $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, и введем в рассмотрение разностное поле $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{H}_3$ по ф-лам (4.6.6). Как и в случае внутренней задачи электродинамики, векторы $\dot{\mathbf{E}}_3$ и $\dot{\mathbf{H}}_3$ удовлетворяют уравнениям Максвелла (4.4.23) и одному из условий (4.6.9)—(4.6.12) на поверхности S.

Из произвольной точки O внутри области V мысленно проведем сферу S' радиуса r так, чтобы вся область V и все сторонние источники оказались внутри этой сферы. Объем, заключенный между сферами S и S', обозначим через V' (рис. 4.6.1). Составим уравнение баланса для активной мощности поля $\dot{\mathbf{E}}_3$, $\dot{\mathbf{H}}_3$ применительно к объему V':

$$P_{\text{п ср}} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_S [\dot{\mathbf{E}}_3, \overset{*}{\mathbf{H}}_3]\, d\mathbf{S} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{S'} [\dot{\mathbf{E}}_3, \overset{*}{\mathbf{H}}_3]\, d\mathbf{S} = 0. \tag{4.6.17}$$

Перейдем в ур-нии (4.6.17) к пределу при $r \to \infty$. Тогда область V' распространится на все пространство, внешнее по отношению к области V. Если в пределе третий член ур-ния (4.6.17) окажется равным нулю, то получающееся при этом уравнение

$$\lim_{r\to\infty} P_{\text{п ср}} + \frac{1}{2}\int_S [\dot{\mathbf{E}}_3, \overset{*}{\mathbf{H}}_3]\, d\mathbf{S} = 0 \tag{4.6.18}$$

не будет иметь принципиальных отличий от аналогичного ур-ния (4.6.13) для внутренней задачи электродинамики, и, следовательно, рассматриваемая задача также будет иметь единственное решение. Действительно, при выполнении условий (4.6.1)—(4.6.3) второй член в ур-нии (4.6.18) обращается в нуль и уравнение принимает вид

$$\lim_{r\to\infty} P_{\text{п ср}} = 0. \tag{4.6.19}$$

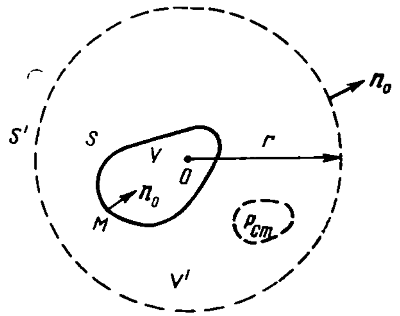


Рис. 4.6.1

В частном случае, когда потери в среде обусловлены только наличием проводимости $\left[\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a\left(1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_a}\right);\ \tilde{\mu} = \mu_a\right]$, ур-ние (4.6.19) записывается в форме

$$\lim_{r\to\infty}\int_{V'} \sigma \dot{\mathbf{E}}_3 \overset{*}{\mathbf{E}}_3\, dV = 0. \tag{4.6.20}$$

Так как $\sigma \neq 0$, а произведение $\dot{\mathbf{E}}_3 \overset{*}{\mathbf{E}}_3$ не может иметь отрицательных значений, то из ур-ния (4.6.20) следует, что $\dot{\mathbf{E}}_3 = 0$. Подставляя во второе уравнение Максвелла $\dot{\mathbf{E}}_3 = 0$, получаем, что $\dot{\mathbf{H}}_3 = 0$. Следовательно, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$; $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$.

Если на поверхности S выполняется условие (4.6.4), то из ур-ния (4.6.18) получаем

$$\lim_{r\to\infty}\int_{V'} \sigma \dot{\mathbf{E}}_3 \overset{*}{\mathbf{E}}_3\, dV + \operatorname{Re}\int_S Z \dot{H}_{3\tau} \overset{*}{H}_{3\tau}\, dS = 0, \tag{4.6.21}$$

откуда также следует единственность решения.

В более **общем случае**, когда $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon''$; $\tilde{\mu}=\mu'-i\mu''$, единственность решения доказывается также на основе ур-ния (4.6.19) для граничных условий (4.6.1)—(4.6.3) и на основе ур-ния (4.6.18) в случае граничного условия (4.6.4). При этом должно быть использовано соотношение (4.5.32).

Найдем условие, при котором

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S'}[\dot{\mathbf{E}}_3,\ \dot{\mathbf{H}}_3]\,d\mathbf{S}=0, \tag{4.6.22}$$

и, следовательно, проведенное выше доказательство справедливо.

При $r\to\infty$ поверхность S' возрастает пропорционально r^2. Следовательно, для выполнения условия (4.6.22) необходимо, чтобы абсолютная величина произведения $[\dot{\mathbf{E}}_3,\dot{\mathbf{H}}_3]$ при $r\to\infty$ убывала быстрее r^{-2}, т. е. чтобы амплитуды векторов $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{H}_3$ убывали быстрее, чем $1/r$. Для этого достаточно потребовать, чтобы искомые векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ убывали быстрее, чем $1/r$.

Таким образом, внешняя задача электродинамики имеет единственное решение, если на поверхности S, ограничивающей область V, выполняется одно из условий (4.6.1)—(4.6.4), и, кроме того, при $r\to\infty$ $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ убывают быстрее, чем $1/r$. Последнее всегда имеет место, так как в любых реальных средах имеются потери энергии.

Отметим, что теорему единственности для внешней задачи электродинамики можно доказать и в случае среды без потерь, если вместо условия убывания векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при $r\to\infty$ быстрее $1/r$ потребовать выполнения следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{E}}}{\partial r}+i\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\,\dot{\mathbf{E}}\right)=0\\ \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial r}+i\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\,\dot{\mathbf{H}}\right)=0\end{aligned}\right\}. \tag{4.6.23}$$

Предельные соотношения (4.6.23) называются *условиями излучения*. Физически они эквивалентны требованию, чтобы при $r\to\infty$ поле имело характер сферических волн, расходящихся от источника. (Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в гл. 5, 8 и 12.)

Из приведенного выше доказательства единственности решения следует, что при отсутствии затухания решение внутренней задачи может быть не единственным. Физически это означает, что в такой системе, помимо полей, созданных непрерывно действующими сторонними источниками, могут существовать незатухающие поля, созданные когда-то действовавшими сторонними источниками (но в рассматриваемое время переставшими действовать). Эти поля из-за отсутствия потерь в среде могут существовать сколь угодно долго (например, собственные колебания идеального объемного резонатора).

ГЛАВА 5

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

5.1. Волновые уравнения

Большинство задач электродинамики можно отнести к двум классам. В задачах первого класса требуется найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам (прямые задачи электродинамики). В задачах второго класса, наоборот, по заданному распределению поля требуется найти его источники (обратные задачи электродинамики). В данной главе будут рассмотрены некоторые методы подхода к решению задач первого класса.

Определение векторов поля непосредственно из уравнений Максвелла затруднительно, поэтому целесообразно преобразовать их таким образом, чтобы получить дифференциальные уравнения, более удобные для решения указанных задач.

Предположим, что среда является *линейной*, *однородной* и *изотропной*. Рассмотрим систему уравнений Максвелла (2.8.1) совместно с уравнениями состояния (2.8.2). Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения Максвелла и изменим порядок дифференцирования по времени и координатам. Учитывая соотношение $\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}$, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{j}+\varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{5.1.1}$$

Левую часть ур-ния (5.1.1) преобразуем с помощью известного из векторного анализа тождества

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\nabla^2\mathbf{a}, \tag{5.1.2}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

В декартовой системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5.1.3}$$

Так как $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, то $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H}-\nabla^2\mathbf{H}=-\nabla^2\mathbf{H}$. Учитывая, кроме того, что $\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu_a\partial\mathbf{H}/\partial t$, перепишем ур-ние (5.1.1) в форме

$$\nabla^2\mathbf{H}-\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=-\operatorname{rot}\mathbf{j}. \tag{5.1.4}$$

Уравнение (5.1.4) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 H_x - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial j_y}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial y}\\ \nabla^2 H_y - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial j_z}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial z}\\ \nabla^2 H_z - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial j_y}{dx} - \frac{\partial j_x}{\partial y}\end{aligned}\right\}, \qquad (5.1.5)$$

которые относятся к уравнениям вида

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, z, t). \qquad (5.1.6)$$

Как известно, уравнения вида (5.1.6) описывают волновые процессы, причем параметр v равен скорости этого процесса.

Такие уравнения принято называть *неоднородными уравнениями Даламбера*, или *неоднородными волновыми уравнениями*. Аналогичные уравнения с правой частью $f(x, y, z, t)=0$ называют *однородными уравнениями Даламбера*, или *однородными волновыми уравнениями*. Уравнение (5.1.4) отличается от (5.1.6) только тем, что входящие в него функции являются векторными. Поэтому уравнения такого типа называют *неоднородными векторными уравнениями Даламбера*. Соответствующие уравнения, правые части которых равны нулю, называют *однородными векторными уравнениями Даламбера*.

Для вектора **E** также можно вывести уравнение вида (5.1.4), взяв ротор от обеих частей второго уравнения Максвелла и выполнив аналогичные преобразования. Учитывая, что

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_a}\,\mathrm{grad}\,\rho - \nabla^2 \mathbf{E}$$

и используя первое уравнение Максвелла, получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_a}\,\mathrm{grad}\,\rho. \qquad (5.1.7)$$

В дальнейшем будет показано, что входящий в ур-ния (5.1.4) и (5.1.7) параметр $1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, являющийся аналогом параметра v, входящего в ур-ние (5.1.6), в случае среды без потерь также играет роль скорости распространения электромагнитного поля и равен скорости света v_0 в рассматриваемой среде. Этот результат не является неожиданным, так как свет — это электромагнитные колебания определенного диапазона частот.

Если в исследуемой области пространства имеются сторонние токи и заряды, то, преобразовав аналогичным образом соответствующую систему уравнений Максвелла (разд. 2.10), придем к следующим уравнениям для векторов **E** и **H**:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E}-\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_a \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{j}+\mathbf{j}^{\text{ст}})+\frac{1}{\varepsilon_a}\operatorname{grad}(\rho+\rho^{\text{ст}})\\ \nabla^2 \mathbf{H}-\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\operatorname{rot}(\mathbf{j}+\mathbf{j}^{\text{ст}})\end{aligned}\right\}. \tag{5.1.8}$$

Обычно ур-ния (5.1.8) записывают в несколько иной форме. Используя равенство $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ и второе уравнение Максвелла, можно входящие в (5.1.8) выражения $\mu_a=\partial\mathbf{j}/\partial t$ и $-\operatorname{rot}\mathbf{j}$ привести к виду $\mu_a\sigma=\partial\mathbf{E}/\partial t$ и $\mu_a\sigma\partial\mathbf{H}/\partial t$ соответственно. Ограничиваясь рассмотрением установившихся электромагнитных процессов (в этом случае $\rho=0$), получаем

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E}-\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu_a\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_a \frac{\partial \mathbf{j}^{\text{ст}}}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon_a}\operatorname{grad}\rho^{\text{ст}}\\ \nabla^2 \mathbf{H}-\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}-\mu_a\sigma\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\operatorname{rot}\mathbf{j}^{\text{ст}}\end{aligned}\right\}. \tag{5.1.9}$$

В случае монохроматического поля, переходя в ур-ниях (5.1.9) к комплексным векторам $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, получаем

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}+\omega^2\tilde{\varepsilon}\mu_a\dot{\mathbf{E}}=\mathrm{i}\,\omega\,\mu_a\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}+\frac{1}{\varepsilon_a}\operatorname{grad}\dot{\rho}^{\text{ст}}; \tag{5.1.10}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}+\omega^2\tilde{\varepsilon}\mu_a\dot{\mathbf{H}}=-\operatorname{rot}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}, \tag{5.1.11}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды, определяемая соотношением (4.4.13).

Отметим, что ур-ния (5.1.10) и (5.1.11) можно получить непосредственно из уравнений Максвелла для монохроматического поля (4.4.28). Поэтому они справедливы и в общем случае, когда диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость среды являются комплексными величинами, определяемыми выражениями (4.4.16) и (4.4.18) соответственно.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют сторонние источники ($\dot{\rho}^{\text{ст}}=0$, $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}=0$), то ур-ния (5.1.10) и (5.1.11) упрощаются. Введя вместо μ_a комплексную магнитную проницаемость $\tilde{\mu}$, окончательно получим:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}+\omega^2\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\dot{\mathbf{E}}=0; \tag{5.1.12}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}+\omega^2\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}\dot{\mathbf{H}}=0. \tag{5.1.13}$$

Уравнения такого вида принято называть *однородными уравнениями Гельмгольца*. Соответственно ур-ния (5.1.10) и (5.1.11) называют неоднородными уравнениями Гельмгольца.

5.2. Векторный и скалярный потенциалы. Вектор Герца

Выведенные в разд. 5.1 ур-ния (5.1.9)—(5.1.11) позволяют, в принципе, найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам. Однако из-за сложности правых частей эти уравнения оказываются неудобными для решения задачи. Обычно их используют в тех случаях, когда в рассматриваемой области нет сторонних источников, т. е. когда они являются однородными.

В общем случае для определения векторов поля по заданным источникам обычно применяют искусственный прием: сначала находят вспомогательные функции, а потом через них вычисляют векторы **E** и **H**. Эти вспомогательные функции принято называть ***электродинамическими потенциалами***. Их можно ввести различным образом в зависимости от специфических особенностей анализируемой задачи, однако принцип их построения один и тот же.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла (2.8.1)—(2.8.2). Так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю ($\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0$), то из четвертого уравнения Максвелла ($\operatorname{div}\mathbf{B}=0$) следует, что вектор **B** можно представить в виде ротора некоторого вектора **A**:

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{5.2.1}$$

При этом вектор

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{5.2.2}$$

При известном векторе **A** ур-ние (5.2.1) позволяет однозначно найти вектор **B**. Однако оно допускает некоторый произвол в определении вектора **A** по заданному вектору **B**. Действительно, если вместо вектора **A** взять вектор $\mathbf{A}_1$, отличающийся от **A** на градиент произвольной скалярной функции ψ, т. е. $\mathbf{A}_1=A+\operatorname{grad}\psi$, то значение вектора **B** не изменится, так как

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi=0. \tag{5.2.3}$$

Таким образом, вектор **A** определен ур-нием (5.2.1) с точностью до градиента произвольной скалярной функции[1]).

Подставим ур-ние (5.2.1) во второе уравнение Максвелла и изменим порядок дифференцирования по времени и пространственным координатам. Объединив затем векторы **E** и $d\mathbf{A}/dt$ под знаком ротора, получим

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{5.2.4}$$

Учитывая тождество (5.2.3), можно положить, что стоящее под знаком ротора выражение $\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t$ равно $-\operatorname{grad}u$, где u — неко-

---

[1]) Неоднозначность вектора **A** будет использована в дальнейшем при составлении дифференциального уравнения для вектора **A**.

торая скалярная функция, или

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{5.2.5}$$

При этом

$$\mathbf{D} = -\varepsilon_a \left(\operatorname{grad} u + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{5.2.6}$$

Знак минус перед $\operatorname{grad} u$ в ф-ле (5.2.5) введен, чтобы в случае электростатического поля функция u совпадала с обычным выражением для электростатического потенциала.

Таким образом, все векторы, характеризующие электромагнитное поле (**E**, **D**, **B**, **H**), выражаются через две функции: векторный потенциал **A** и скалярный потенциал u. Следовательно, задача состоит теперь в том, чтобы найти функции **A** и u.

Подставляя ф-лы (5.2.2) и (5.2.6) в первое уравнение Максвелла и ограничиваясь случаем однородной изотропной среды, получаем

$$\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{j} - \varepsilon_a \left(\operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right). \tag{5.2.7}$$

Преобразовав левую часть ур-ния (5.2.7) с помощью тождества (5.1.2), придем к равенству

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{5.2.8}$$

Упростим ур-ние (5.2.8). Как уже отмечалось, вектор **A** был определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Следовательно, можно потребовать, чтобы вектор удовлетворял добавочному условию. Потребуем, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{5.2.9}$$

Уравнение (5.2.9) принято называть *условием калибровки*.

С учетом (5.2.9) ур-ние (5.2.8) принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{j}. \tag{5.2.10}$$

Аналогичное уравнение получается и для скалярного потенциала u. Подставив ф-лу (5.2.6) в третье уравнение Максвелла, получим

$$-\varepsilon_a \left(\operatorname{div}\operatorname{grad} u + \frac{\partial}{dt} \operatorname{div} \mathbf{A}\right) = \rho. \tag{5.2.11}$$

Используя условие калибровки (5.2.9) и тождество $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla^2 u$, приходим к уравнению

$$\nabla^2 u - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 u}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \tag{5.2.12}$$

Таким образом, векторный и скалярный потенциалы, как и векторы **E** и **H**, удовлетворяют неоднородным уравнениям Даламбера. Однако правые части уравнений для потенциалов имеют более простой вид. Поэтому ур-ния (5.2.10) и (5.2.12) оказываются более удобными при решении конкретных задач.

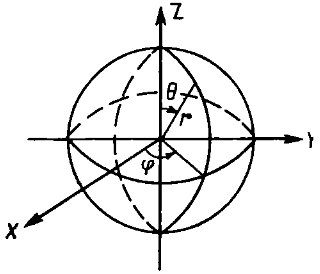


Рис. 5.2.1

Найдем частные решения ур-ний (5.2.10) и (5.2.12), считая функции **j** и ρ известными. Сначала рассмотрим ур-ние (5.2.12). Предположим, что электрическое поле создается точечным неподвижным зарядом постоянной величины $Q=\mathrm{const}$, расположенным в начале координат. Вектор **E** в этом случае определяется выражением (1.2.13). Так как поле не должно зависеть от времени, то $\partial \mathbf{A}/\partial t=0$ и соотношение (5.2.5) принимает вид $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\, u$. Расписывая $\mathrm{grad}\, u$ в сферической системе координат r; θ; φ (рис. 5.2.1) и учитывая, что вектор **E** в рассматриваемом случае может зависеть только от расстояния r (от заряда Q до точки наблюдения), получаем

$$\mathbf{E}=-\mathbf{r}_0 \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{5.2.13}$$

где $\mathbf{r}_0$ — орт радиуса-вектора, проведенного из начала координат в точку наблюдения.

Подставляя выражение (1.2.13) в (5.2.13) и выполняя интегрирование по переменной r, находим функцию u:

$$u=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r}. \tag{5.2.14}$$

Постоянная интегрирования в ф-ле (5.2.14) принята равной нулю, чтобы при $r=\infty$ функция u обращалась в нуль. Формула (5.2.14) полностью совпадает с известным из курса общей физики выражением для электростатического потенциала точечного заряда [ср. замечание по поводу выбора знака перед $\mathrm{grad}\, u$ в выражении (5.2.5)].

Если заряд сосредоточен в малом элементе объема dV с плотностью ρ, то ф-лу (5.2.14) следует переписать в виде

$$u=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_a R}dV, \tag{5.2.15}$$

где R — расстояние от элемента dV до точки наблюдения.

От ф-лы (5.2.15) легко перейти к выражению для электрического потенциала, создаваемого произвольным распределением зарядов в объеме V. В соответствии с принципом суперпозиции получаем

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho}{R}\,dV. \qquad (5.2.16)$$

Значение u, определяемое ф-лой (5.2.16), можно рассматривать как решение уравнения

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \qquad (5.2.17)$$

получающегося из (5.2.12), если в последнем положить $\partial^2 u/\partial t^2 = 0$. Уравнение (5.2.17) называется *уравнением Пуассона.*

Предположим теперь, что поле также создается точечным зарядом, расположенным в начале координат, но величина этого заряда меняется со временем $Q = Q(t)$. Тогда в любой точке, кроме начала координат, потенциал u будет удовлетворять однородному уравнению Даламбера:

$$\nabla^2 u - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (5.2.18)$$

Для решения ур-ния (5.2.18) удобно использовать сферическую систему координат r, θ, φ (рис. 5.2.1). Оператор Лапласа в этой системе координат имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Так как поле создается точечным зарядом, расположенным в начале координат, то потенциал u не должен зависеть от углов θ и φ. Поэтому ур-ние (5.2.18) можно переписать в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Учитывая, что $1/\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = v_0$, и переходя от функции u к функции u_1, связанной с u соотношением $u_1 = ru$, получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \qquad (5.2.19)$$

Общее решение ур-ния (5.2.19) имеет вид

$$u_1 = f_1\left(t - \frac{r}{v_0}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v_0}\right),$$

где $f_1\left(t - \frac{r}{v_0}\right)$ и $f_2\left(t + \frac{r}{v_0}\right)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции аргументов $t - \frac{r}{v_0}$ и $t + \frac{r}{v_0}$ соответственно.

В том, что функции $f_1\left(t - \frac{r}{v_0}\right)$ и $f_2\left(t + \frac{r}{v_0}\right)$ удовлетворяют ур-нию (5.2.19), можно убедиться непосредственной подстановкой их в это уравнение.

Таким образом, скалярный потенциал u можно представить в виде

$$u=\frac{f_1\left(t-\frac{r}{v_0}\right)}{r}+\frac{f_2\left(t+\frac{r}{v_0}\right)}{r}. \tag{5.2.20}$$

Первое слагаемое в выражении (5.2.20) представляет собой волну, распространяющуюся из начала координат вдоль радиусов r со скоростью света $v_0=1/\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$. Действительно, функция $f_1\left(t-\frac{r}{v_0}\right)$ в фиксированный момент времени t имеет одинаковые значения на сфере радиуса $r=\text{const}$. В момент времени $t+\Delta t$ функция $f_1\left(t-\frac{r}{v_0}\right)$ принимает то же значение на сфере радиуса $r+v_0\Delta t$, так как $t+\Delta t-\frac{r+v_0\Delta t}{v_0}=t-\frac{r}{v_0}$. Волны типа $\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r}{v_0}\right)$ принято называть *расходящимися сферическими волнами.* Соответственно второе слагаемое в выражении (5.2.20) представляет собой сферическую волну, распространяющуюся из бесконечности со скоростью света v_0 и сходящуюся в начале координат.

Отметим существенную особенность функций, описывающих волновые процессы. Они всегда содержат множители вида $f\left(t\pm\frac{r}{v}\right)$, характер зависимости которых от расстояния вдоль направления распространения волны в фиксированный момент времени повторяет характер их зависимости от времени в фиксированной точке пространства.

Если источники поля сосредоточены в конечной области, то сходящаяся сферическая волна может возникнуть только в результате отражения расходящейся сферической волны. Так как пространство считается однородным, то отраженной волны быть не может. Поэтому функцию $f_2\left(t+\frac{r}{v_0}\right)$ нужно считать равной нулю. Следовательно,

$$u=\frac{f_1\left(t-\frac{r}{v_0}\right)}{r}. \tag{5.2.21}$$

Очевидно, значения потенциала u должны быть связаны с интенсивностью источников поля. В рассматриваемом случае источником поля является точечный заряд $Q(t)$. Выражение (5.2.21) должно быть справедливым при любом законе изменения функции $Q(t)$. Так как в статическом случае потенциал u определяется ф-лой (5.2.14), то естественно предположить, что $f_1\left(t-\frac{r}{v_0}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}Q\left(t-\frac{r}{v_0}\right)$. Тогда

$$u=\frac{Q\left(t-\frac{r}{v_0}\right)}{4\pi\varepsilon_a r}. \tag{5.2.22}$$

Если заряд сосредоточен в малом элементе объема dV с плотностью $\rho=\rho(t)$, то по аналогии с ф-лой (5.2.15) скалярный потенциал u можно представить в виде

$$u=\frac{\rho\left(t-\frac{R}{v_0}\right)dV}{4\pi\varepsilon_a R}, \tag{5.2.23}$$

где R — как и ранее, расстояние от элемента dV до точки наблюдения.

От ф-лы (5.2.23) легко перейти к выражению для скалярного потенциала, обусловленного произвольным распределением зарядов в объеме V:

$$u=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho\left(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ t-\frac{R}{v_0}\right)dV}{R}, \tag{5.2.24}$$

где $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$; ξ, η, ζ — декартовы координаты элемента dV; x, y, z — декартовы координаты точки наблюдения N; элемент объема $dV=d\xi d\eta d\zeta$ (рис. 5.2.2).

Выражение (5.2.24) является частным решением неоднородного уравнения Даламбера (5.2.12). Отметим, что приведенный здесь вывод не является строгим, он имеет лишь наводящий характер. Строгий вывод ф-лы (5.2.24) можно найти, например, в [27].

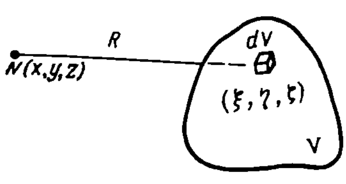


Рис. 5.2.2

Аналогичное решение можно записать и для ур-ния (5.2.10). Для этого нужно в ф-ле (5.2.24) заменить ε_a на $1/\mu_a$, а ρ на $\mathbf{j}$. В результате получим

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}\left(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ t-\frac{R}{v_0}\right)dV}{R}. \tag{5.2.25}$$

Из ф-л (5.2.24) и (5.2.25) следует, что для вычисления электродинамических потенциалов $\mathbf{A}$ и u в произвольной точке пространства в момент времени t нужно брать значения токов и зарядов в каждом элементе dV в более ранний по сравнению с t момент времени $t'=t-\frac{R}{v_0}$, определяемый расстоянием R от элемента dV до точки наблюдения $N(x,\ y,\ z)$ (рис. 5.2.2). Иными словами, влияние источников электромагнитного поля сказывается не мгновенно: требуется некоторое время $\Delta t=\frac{R}{v_0}$, за которое электромагнитные колебания, вызванные зарядами и токами в элементе dV, успеют распространиться от элемента dV до точки наблюдения.

Функции $\mathbf{A}$ и u в форме (5.2.24) и (5.2.25) часто называют *запаздывающими потенциалами.*

Кроме электродинамических потенциалов $\mathbf{A}$ и u, используют также и другие потенциалы, например, *вектор Герца* Γ. Этот вектор связан с потенциалами $\mathbf{A}$ и u соотношениями:

$$\mathbf{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t}; \quad u = -\operatorname{div} \mathbf{\Gamma}. \tag{5.2.26}$$

5.3. Электродинамические потенциалы монохроматического поля

В случае монохроматических электромагнитных полей для определения поля по заданным источникам обычно вводят комплексные электродинамические потенциалы $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{u}$.

Монохроматические электромагнитные поля описываются уравнениями Максвелла (4.4.28). Из второго уравнения систе… (4.4.28), а также из ф-л (5.2.2) и (5.2.5) следует, что векто… и $\dot{\mathbf{H}}$ можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}};$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \dot{u} - \mathrm{i}\,\omega \dot{\mathbf{A}},$$

причем вектор $\dot{\mathbf{A}}$ определяется ур-нием (5.3.1) с точностью д… диента произвольной скалярной функции.

Подставляя ур-ния (5.3.1) и (5.3.2) в первое уравнение … мы (4.4.28) и накладывая дополнительное условие[1]), связ… щее потенциалы $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{u}$ (условие калибровки):

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{A}} + \mathrm{i}\,\omega \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \dot{u} = 0, \qquad (5.3$$

получаем уравнение

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + \omega^2 \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \dot{\mathbf{A}} = -\tilde{\mu} \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}. \qquad (5.…$$

Аналогичное уравнение[2]) получается из (4.4.26) для потенциала …

$$\triangle^2 \dot{u} + \omega^2 \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \dot{u} = -\frac{\dot{\rho}^{\text{ст}}}{\varepsilon_a}.$$

Отметим, что в случае монохроматического поля можно исключить из рассмотрения скалярный потенциал $\dot{u}$ и ограничиться рассмотрением одного векторного потенциала $\dot{\mathbf{A}}$. Действительно, выражая из ф-лы (5.3.3) $\dot{u}$ через $\dot{\mathbf{A}}$ и подставляя в (5.3.2) получаем

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}} - \mathrm{i}\,\omega \dot{\mathbf{A}}. \tag{5.3.6}$$

---

[1]) Условие (5.3.3) аналогично условию (5.2.9).

[2]) Предполагается, что $\tilde{\varepsilon}$ определяется соотношением (4.4.13).

ГЛАВА 6

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

6.1. Основные уравнения электростатики

Электростатическое поле описывается системой дифференциальных ур-ний (2.9.1), которая получается из системы уравнений Максвелла в предположении, что векторы поля не зависят от времени и отсутствует перемещение зарядов ($\mathbf{j}=0$). Аналогично нахо- основные уравнения электростатики в интегральной форме:

$$\left.\begin{aligned} &\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0 \\ &\oint_{S} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_{V} \rho\, dV \end{aligned}\right\}. \qquad (6.1.1)$$

лектростатическое поле обладает рядом специфических ств. В частности, непосредственно из ур-ний (2.9.1) следует, оно является потенциальным, а его силовые линии имеют истоки и стоки: они начинаются и заканчиваются на зарядах.

6.2. Электростатический потенциал

В случае электростатического поля вектор $\mathbf{E}$ можно представить в виде градиента скалярной функции u, называемой электростатическим потенциалом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u. \qquad (6.2.1)$$

Соотношение (6.2.1) получается из ф-лы (5.2.5), если в последней положить $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$, а также непосредственно следует из первого уравнения системы (2.9.1). Оно определяет функцию u неоднозначно. Величина вектора $\mathbf{E}$ не изменится, если вместо потенциала u ввести функцию u', отличающуюся от u на произвольную постоянную. При решении конкретных задач обычно сначала находят потенциал u, а затем вычисляют вектор $\mathbf{E}$. При этом обычно произвольную постоянную выбирают таким образом, чтобы потенциал в бесконечно удаленных точках равнялся нулю.

Выясним физический смысл электростатического потенциала. Вычислим работу A, совершаемую при перемещении заряда q из точки N_1 в точку N_2 по контуру Г (рис. 6.2.1). Так как напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля определяется как сила, с которой поле действует на единичный точечный положительный заряд, то

Рис. 6.2.1

$$A = -q \int\limits_{N_1}^{N_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \tag{6.2.2}$$

Знак минус в ф-ле (6.2.2) означает, что *положительная работа* совершается в том случае, когда заряд перемещается против сил поля.

Подынтегральное выражение в ф-ле (6.2.2) можно представить в виде

$$\mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\operatorname{grad} u\, d\mathbf{l} = -du, \tag{6.2.3}$$

где du — полный дифференциал u.

Второе равенство в ф-ле (6.2.3) представляет собой известное тождество векторного анализа. Для его доказательства достаточно $\operatorname{grad} u$ и $d\mathbf{l}$ разложить по ортам декартовой системы координат

$$\left(\operatorname{grad} u = \mathbf{x}_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial u}{\partial z};\ d\mathbf{l} = \mathbf{x}_0\, dx + \mathbf{y}_0\, dy + \mathbf{z}_0\, dz\right)$$

и вычислить скалярное произведение. Подставляя ф-лу (6.2.3) в (6.2.2), получаем

$$A = q(u_2 - u_1), \tag{6.2.4}$$

где u_1 и u_2 — значения потенциала u в точках N_1 и N_2 соответственно.

Полагая $q = 1\kappa$, получаем, что работа при перемещении единичного точечного положительного заряда в электростатическом поле равна разности потенциалов в конечной и начальной точках пути. Она не зависит от формы пути, по которому перемещается заряд, и от абсолютного значения потенциала. Если потенциалы бесконечно удаленных точек считать равными нулю, то потенциал u в точке N можно определить как работу, которую нужно совершить для перемещения единичного точечного положительного заряда из бесконечности в точку N. Потенциал измеряется в вольтах, что легко устанавливается из ф-лы (6.2.1) или (6.2.4).

Сравнивая ф-лы (6.2.4) и (6.2.2), находим связь между разностью потенциалов в точках N_1 и N_2 и напряженностью электростатического поля

$$u_1 - u_2 = \int\limits_{N_1}^{N_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \tag{6.2.5}$$

Если потенциалы бесконечно удаленных точек считаются равными нулю, то выражение (6.2.5) принимает вид:

$$u = -\int\limits_{\infty}^{N} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{N}^{\infty} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}. \tag{6.2.6}$$

В разд. 5.2 было показано, что в случае однородных сред $\varepsilon_a = \text{const}$ электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (5.2.17):

$$\nabla^2 u = -\rho/\varepsilon_a.$$

Если в рассматриваемой части пространства заряды отсутствуют ($\rho = 0$), то ур-ние (5.2.17) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 u = 0. \tag{6.2.7}$$

Решение ур-ния (5.2.17) было получено в разд. 5.2. В тех случаях, когда заряды распределены в ограниченной области V с плотностью ρ (ρ — функция координат), потенциал u определяется выражением (5.2.16).

В случае поверхностных зарядов, распределенных с плотностью ρ_S на поверхности S, нужно вместо ф-лы (5.2.16) использовать формулу

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_S \frac{\rho_S}{R}\, dS, \tag{6.2.8}$$

где R — расстояние от элемента dS до точки, в которой вычисляется потенциал (рис. 5.3.1).

Если поле создается заряженной нитью конечных размеров, т. е. зарядами, распределенными вдоль линии, то потенциал u выражается формулой

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_\Gamma \frac{\tau}{R}\, dl, \tag{6.2.9}$$

где интегрирование осуществляется вдоль нити (контур Γ); R — расстояние от элемента dl до точки, в которой вычисляется потенциал (рис. 5.3.2), а τ — линейная плотность заряда, определяемая выражением

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \ \frac{\text{к}}{\text{м}}. \tag{6.2.10}$$

Соотношения (5.2.16), (6.2.8) и (6.2.9) позволяют определить потенциал, а следовательно, и векторы электростатического поля в однородном изотропном пространстве по заданному распределению зарядов. Однако во многих практически важных случаях распределение зарядов нельзя считать известным заранее. Вопрос о постановке и возможности решения такого рода задач будет рассмотрен отдельно.

Чтобы получить наглядное представление об электростатическом поле, его иногда изображают графически. При этом, обычно, помимо силовых линий (разд. 1.4), рассматривают его *эквипотенциальные поверхности,* т. е. поверхности равного потенциала. Выясним связь между поверхностями равного потенциала и силовыми линиями электростатического поля.

W

На эквипотенциальной поверхности потенциал u постоянен и, следовательно, $du=0$. При этом согласно соотношению (6.2.3) должно выполняться равенство

$$\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0, \tag{6.2.11}$$

где вектор $d\mathbf{l}$ совпадает по направлению с касательной к эквипотенциальной поверхности.

Равенство (6.2.11) означает, что поверхности равного потенциала и силовые линии электростатического поля пересекаются под прямым углом. Зная семейство эквипотенциальных поверхностей, можно построить силовые линии и, наоборот, зная силовые линии, можно построить эквипотенциальные поверхности.

6.3. Граничные условия

До сих пор рассматривалось поле в однородном пространстве. Если имеются две (или более) разнородных среды, то для определения поля необходимо знать граничные условия для составляющих векторов **E** и **D** и потенциала u на границе раздела.

Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля, общие свойства которого были рассмотрены в предыдущих главах. Поэтому граничные условия для векторов **E** и **D**, выведенные в разд. 3.2, должны выполняться и для электростатического поля. Эти условия имеют вид:

$$E_{1\tau}=E_{2\tau}, \quad D_{1\tau}=\frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}D_{2\tau}; \tag{6.3.1}$$

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S, \quad \varepsilon_{a1}E_{1n}-\varepsilon_{a2}E_{2n}=\rho_S. \tag{6.3.2}$$

Напомним, что при выводе граничных условий нормаль $\mathbf{n}_0$ считалась направленной из второй среды в первую.

Так как при решении конкретных задач, как правило, оперируют с функцией u, то от условий для векторов **E** и **D** нужно перейти к граничным условиям для потенциала u. Используя соотношение (6.2.1) и учитывая, что проекция $\mathrm{grad}\,u$ на произвольное направление $\mathbf{l}_0$ равна производной функции u по этому направлению, получаем из ф-л (6.3.1) следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_1=\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_2, \tag{6.3.3}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \tau}$ означает дифференцирование по любому направлению в плоскости, касательной к поверхности раздела в рассматриваемой точке.

Интегрируя равенство (6.3.3) по τ, получаем

$$u_1=u_2+A, \tag{6.3.4}$$

где A — произвольная постоянная, а u_1 и u_2 — значения потенциала u на поверхности раздела в первой и второй средах соответственно.

Постоянную A в большинстве случаев можно считать равной нулю. Действительно, потенциал u, созданный объемными или поверхностными зарядами [см. ф-лы (5.2.16), (6.2.8) и (6.2.9)], является непрерывной функцией. При этом из равенства (6.3.4) следует, что

$$u_1 = u_2. \tag{6.3.5}$$

Соотношение (6.3.5) нарушается, если на поверхности раздела имеется двойной заряженный слой. Этот слой можно представить следующим образом. Рассмотрим две параллельные поверхности S_1 и S_2, на одной из которых распределены поверхностные заряды с плотностью ρ_S, а на другой — такие же заряды, но противоположного знака. Расстояние между поверхностями S_1 и S_2 обозначим через l (рис. 6.3.1). Если считать, что поверхности неограниченно приближаются друг к другу, а поверхностная плотность зарядов при этом возрастает (причем произведение $\rho_S l$ остается постоянным), то в пределе получим двойной заряженный слой. Параметр $\rho_S l$ называют мощностью слоя. При переходе через двойной заряженный слой потенциал претерпевает разрыв, величина которого зависит от мощности слоя. В дальнейшем будет предполагаться, что в рассматриваемой области отсутствуют двойные заряженные слои.

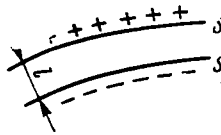


Рис. 6.3.1

Переходя в ф-лах (6.3.2) к функции u, получаем второе граничное условие для электростатического потенциала:

$$\varepsilon_{a2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2 - \varepsilon_{a1}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 = \rho_S, \tag{6.3.6}$$

где $\partial/\partial n$ — означает дифференцирование по нормали к поверхности раздела, направленной из второй среды в первую.

Если одна из сред является проводником, то граничные условия принимают более простой вид. В самом деле, при анализе макроскопических свойств поля проводник можно рассматривать, как замкнутую область, внутри которой возможно свободное перемещение зарядов. Плотность потока зарядов, т. е. плотность тока проводимости в проводнике, пропорциональна напряженности электрического поля (закон Ома): $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В электростатике перемещение зарядов отсутствует ($\mathbf{j} = 0$). Так как $\sigma \neq 0$, то напряженность электростатического поля внутри проводника должна быть равна нулю. Это — одна из особенностей электростатического поля. В разд. 3.4 было показано, что переменное электромагнитное поле не проникает в идеальный металл. Электростатическое поле равно нулю внутри любого реального проводника.

Напряженность электростатического поля связана с потенциалом u соотношением (6.2.1). Полагая в (6.2.1) $\mathbf{E} = 0$, получаем, что внутри проводника $\operatorname{grad} u = 0$, откуда $u = \mathrm{const}$. Следовательно, в электростатике все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Это позволяет говорить о потенциале проводника. Потенциалы изолированных друг от друга проводников могут, конечно, иметь разные значения.

Граничные условия на поверхности проводника для составляющих векторов **E** и **D** находятся из ф-л (6.3.1) и (6.3.2). Пусть первая среда является диэлектриком, а вторая — проводником. Тогда, полагая $\mathbf{E}_2=\mathbf{D}_2=0$, получаем:

$$E_{1\tau}=0,\quad D_{1\tau}=0; \tag{6.3.7}$$

$$D_{1n}=\rho_S,\quad E_{1n}=\frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}}\,. \tag{6.3.8}$$

Условия (6.3.7) и (6.3.8) можно переписать в векторной форме:

$$\mathbf{D}_1=\mathbf{n}_0\,\rho_S;\quad \mathbf{E}_1=\mathbf{n}_0\frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}}\,. \tag{6.3.9}$$

Отметим, что аналогичные условия для переменного электромагнитного поля (разд. 3.4) выполняются только на поверхности идеального металла, в то время как соотношения (6.3.7)—(6.3.9) справедливы для любого проводника.

Граничные условия для потенциала u на поверхности проводника получаются из ф-л (6.3.5) и (6.3.6):

$$u|_S=\mathrm{const}; \tag{6.3.10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=-\frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}}\,. \tag{6.3.11}$$

Нормаль $\mathbf{n}_0$ является внешней по отношению к проводящей среде.

Из условия (6.3.10) следует, что поверхность проводника всегда эквипотенциальна.

6.4. Энергия электростатического поля

Из общего выражения для энергии электромагнитного поля (4.1.11) следует, что энергия электростатического поля в объеме V равна

$$W_э=\frac{1}{2}\int\limits_V \varepsilon_a E^2\,dV=\frac{1}{2}\int\limits_V \mathbf{E}\,\mathbf{D}\,dV. \tag{6.4.1}$$

Формулу (6.4.1) можно преобразовать таким образом, чтобы электростатическая энергия была выражена через заряды. Заменяя вектор **E** через $\mathrm{grad}\,u$ и используя тождество $\mathrm{div}(\psi\mathbf{a})=\psi\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\,\mathrm{grad}\,\psi$, где **a** и ψ—произвольные векторная и скалярная функции, имеющие первые производные, получаем

$$W_э=-\frac{1}{2}\int\limits_V \mathbf{D}\,\mathrm{grad}\,u\,dV=\frac{1}{2}\int\limits_V u\,\mathrm{div}\,\mathbf{D}\,dV-\frac{1}{2}\int\limits_V \mathrm{div}\,(u\,\mathbf{D})\,dV. \tag{6.4.2}$$

Второй интеграл в ф-ле (6.4.2) преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_V \operatorname{div}(u\mathbf{D})\,dV = \oint\limits_S u\,\mathbf{D}\,d\mathbf{S}, \tag{6.4.3}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V.

Предположим, что заряды, создающие электростатическое поле, сосредоточены в ограниченной области, и распространим интегрирование в ф-ле (6.4.2) на все пространство. При этом поверхность S будет удалена в бесконечность и в пределе интеграл (6.4.3) окажется равным нулю. Действительно, из ф-лы (5.2.16) следует, что потенциал зарядов, распределенных в ограниченной области V_0, на большом (по сравнению с размерами области) расстоянии убывает пропорционально $1/r$, где r расстояние от некоторой точки внутри области V_0 до точки наблюдения. Вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ убывает как $1/r^2$, а поверхность S возрастает пропорционально r^2. Таким образом, интеграл (6.4.3) при $S \to \infty$ убывает как $1/r$ и в пределе равен нулю. Учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$, получаем окончательное выражение для электростатической энергии:

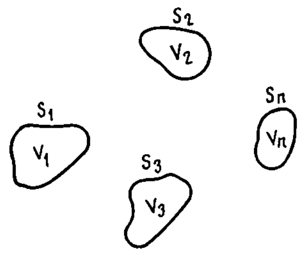


Рис. 6.4.1

$$W_э = \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} \rho u\,dV. \tag{6.4.4}$$

Если электростатическое поле создается поверхностными зарядами, распределенными по поверхности S_0 с плотностью ρ_S, то выражение для электростатической энергии принимает вид

$$W_э = \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} \rho_S u\,dS. \tag{6.4.5}$$

В случае распределения зарядов вдоль контура Г с плотностью τ (заряженная нить) электростатическая энергия выражается формулой

$$W_э = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \tau u\,dl. \tag{6.4.6}$$

В общем случае при наличии зарядов всех трех типов

$$W_э = \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} \rho u\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} \rho_S u\,dS + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \tau u\,dl. \tag{6.4.7}$$

Рассмотрим частный случай, когда электростатическое поле создается зарядами, расположенными на проводниках. Пусть имеется n проводников (рис. 6.4.1), потенциалы которых равны соответственно $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Так как потенциал проводника постоянен во всех его точках, а заряды распределены по его поверхности, применяя ф-лу (6.4.5), получаем

$$W_э = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} u_m Q_m^{\cdot}, \tag{6.4.8}$$

где

$$Q_m^{\cdot} = \int\limits_{S_m} \rho_S^{(m)} dS \tag{6.4.9}$$

— полный заряд m-го проводника, а $\rho_S^{(m)}$ — плотность поверхностных зарядов, с которой заряд Q_m распределен по поверхности S_m рассматриваемого проводника.

Выражение для энергии уединенного проводника, т. е. бесконечно удаленного от других тел и зарядов, находится из ф-лы (6.4.8) как частный случай. Полагая в (6.4.8) $n=1$, получаем

$$W_э = \frac{1}{2} u Q. \tag{6.4.10}$$

На энергию электростатического поля не распространяется принцип суперпозиции. Поэтому энергия системы проводников не равна суммарной энергии уединенных проводников. Представим потенциал m-го проводника в виде суммы

$$u_m = u_m^0 + u_m', \tag{6.4.11}$$

где u_m^0 — потенциал уединенного проводника, а u_m' — потенциал, создаваемый действием всех остальных проводников.

Подставив ф-лу (6.4.11) в (6.4.8), получим

$$W_э = W_э^0 + W_э', \tag{6.4.12}$$

где

$$W_э^0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} u_m^0 Q_m, \quad W_э' = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} u_m' Q_m. \tag{6.4.13}$$

Величину $W_э^0$ принято называть *собственной* энергией системы проводников, а $W_э'$ — *взаимной* энергией.

Можно показать, что *заряды, находящиеся на системе заданных проводников, расположенных в диэлектрике, распределяются по поверхности этих проводников таким образом, что энергия получающегося в результате электростатического поля минимальна.* Это важное утверждение известно под названием *теоремы Томсона.*

6.5. Емкость

Потенциал уединенного проводника зависит от его размеров и формы, а также от величины имеющегося на нем заряда. При равных потенциалах уединенные тела разной формы (или размеров) обладают зарядами разной величины. Отношение величины заряда к потенциалу при условии, что потенциалы бесконечно удаленных точек считаются равными нулю, называется емкостью уединенного проводника:

$$C = \frac{Q}{u}. \tag{6.5.1}$$

Емкость измеряют в фарадах ($\phi = \kappa/в$). С учетом ф-лы (6.5.1) выражение для электростатической энергии уединенного проводника (6.4.11) принимает вид

$$W_э = \frac{Cu^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \tag{6.5.2}$$

Если проводник не уединен, то потенциал, приобретаемый им при сообщении ему какого-либо заряда, существенно зависит от формы и расположения других проводников. Заряженные тела создают электрическое поле, под действием которого заряды на всех соседних проводящих телах перераспределяются. Перераспределение продолжается до тех пор, пока суммарное электростатическое поле внутри каждого проводника не станет равным нулю.

Рассмотрим систему из n проводников с зарядами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ соответственно. Потенциал каждого проводника линейно зависит от величины зарядов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \ldots + a_{1m}Q_m + \ldots + a_{1n}Q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = a_{m1}Q_1 + a_{m2}Q_2 + \ldots + a_{mm}Q_m + \ldots + a_{mn}Q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \ldots + a_{nm}Q_m + \ldots + a_{nn}Q_n \end{array}\right\}, \tag{6.5.3}$$

где u_i — потенциал i-го проводника, а a_{in} — некоторые постоянные, называемые *потенциальными коэффициентами*, зависящие от размеров, формы и взаимного расположения проводников.

Коэффициент a_{ik} численно равен потенциалу i-го проводника, наведенному зарядом k-го проводника при условии, что заряд последнего равен 1 κ, а заряды остальных — нулю. Например, a_{13} численно равен потенциалу проводника *1*, наведенному единичным зарядом проводника *3* при отсутствии зарядов на остальных проводниках.

Система ур-ний (6.5.3) определяет потенциалы проводников через заряды Q_i и потенциальные коэффициенты a_{ik}. Если потенциалы $u_1; u_2; \ldots; u_n$ проводников и потенциальные коэффициенты a_{ik} известны, то система (6.5.3) позволяет однозначно найти заряды проводников:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = c_{11} u_1 + c_{12} u_2 + \ \ldots + c_{1m} u_m + \ \ldots + c_{1n} u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_m = c_{m1} u_1 + c_{m2} u_2 + \ \ldots + c_{mm} u_m + \ \ldots + c_{mn} u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n = c_{n1} u_1 + c_{n2} u_2 + \ \ldots + c_{nm} u_m + \ \ldots + c_{nn} u_n \end{array}\right\}. \qquad (6.5.4)$$

Постоянные коэффициенты c_{ik} однозначно определяются потенциальными коэффициентами a_{jp} и находятся при решении системы (6.5.3) относительно зарядов $Q_1; Q_2; \ldots; Q_n$. Из ур-ний (6.5.4) следует, что коэффициент c_{ik} численно равен заряду i-го проводника, если потенциал k-го проводника равен единице, а потенциалы остальных проводников — нулю.

Отметим, что потенциальные коэффициенты a_{ik} и коэффициенты c_{ik} удовлетворяют *правилу взаимности:*

$$a_{ik} = a_{ki} \text{ и } c_{ik} = c_{ki}. \qquad (6.5.5)$$

Обычно систему ур-ний (6.5.4) записывают в несколько иной форме. Прибавим к правой части первого уравнения выражение $c_{12}u_1 + c_{13}u_1 + \ldots + c_{1n}u_1 - c_{12}u_1 - c_{13}u_1 - \ldots - c_{1n}u_1 \equiv 0$. Соответственно к правой части i-го уравнения добавим равное нулю выражение $c_{i1} u_i + c_{i2} u_i + \ldots + c_{i,\, i-1} u_i + c_{i,\, i+1} u_i + \ldots + c_{in} u_i - c_{i1} u_i - c_{i2} u_i - \ldots - c_{in} u$.

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_{11}u_1 + C_{12}(u_1 - u_2) + \ \ldots + C_{1n}(u_1 - u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_m = C_{m1}(u_m - u_1) + \ \ldots + C_{mm}u_m + \ \ldots + C_{mn}(u_m - u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n = C_{n1}(u_n - u_1) + \ \ldots + C_{nm}(u_n - u_m) + \ \ldots + C_{nn}u_n \end{array}\right\}, \qquad (6.5.6)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} C_{ii} = c_{i1} + c_{i2} + \ \ldots + c_{im} + \ \ldots + c_{in} \\ C_{ik} = -c_{ik} \text{ при } i \neq k \end{array}\right\}. \qquad (6.5.7)$$

Коэффициенты C_{ik} называют *частичными емкостями*. Иногда вводят различные названия для коэффициентов с одинаковыми и разными индексами, а именно: коэффициент C_{ii} называют *собственной емкостью* i-го проводника, а C_{ik} — *взаимной емкостью* i- и k-го проводников. Отметим, что собственные емкости уединенных проводников могут отличаться от коэффициентов C_{ii}. Аналогично взаимные емкости двух проводников, отделенных от остальных, могут отличаться от соответствующих коэффициентов C_{ik}, так как частичные емкости (C_{ik} и C_{ii}) определяются не только рассматриваемыми проводниками, но и всеми остальными проводниками системы.

Из ф-л (6.5.7) и (6.5.5) следует, что частичные емкости также удовлетворяют *правилу взаимности*:

$$C_{ik} = C_{ki}. \tag{6.5.8}$$

6.6. Постановка и методы решения задач электростатики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая задача электростатики заключается в определении векторов поля по заданному распределению зарядов. При этом область пространства, в которой требуется определить поле, может быть как ограниченной, так и неограниченной.

Наиболее просто такая задача решается в том случае, когда рассматриваемая область представляет собой неограниченное пространство, заполненное однородной изотропной средой, а заряды сосредоточены внутри некоторого объема конечных размеров (т. е. отсутствуют заряды в бесконечно удаленных точках). Математически она формулируется следующим образом. Задана объемная плотность заряда ρ как функция координат. Требуется найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Пуассона (5.2.17) и обращающуюся в нуль в бесконечно удаленных точках. Эта задача была рассмотрена в разд. 5.2 и 6.2. Ее решением является выражение (5.2.16). Если заряды распределены на поверхности конечных размеров S с плотностью ρ_S, то соответствующий им потенциал определяется ф-лой (6.2.8). Если же поле создается зарядами, распределенными с линейной плотностью τ вдоль контура конечных размеров Γ, искомая функция u определяется (6.2.9).

В том случае, когда система зарядов не может быть охвачена описанной вокруг начала координат сферой конечного радиуса, т. е. она содержит также заряды в бесконечно удаленных точках (например, бесконечно длинная заряженная нить), то ф-лы (5.2.16), (6.2.8) и (6.2.9) могут оказаться непригодными. Это, в частности, имеет место при решении так называемой плоской задачи электростатики, т. е. при одинаковом распределении заряда (и поля) в любой плоскости, перпендикулярной к некоторой прямой линии, например к одной из осей декартовой системы координат. Такую систему зарядов можно представить как бы состоящей из тонких, равномерно заряженных по длине бесконечно протяженных прямолинейных нитей. Поэтому для определения поля, создаваемого подобной системой зарядов, нужно знать потенциал, создаваемый одной нитью.

Пусть имеется бесконечно тонкая равномерно заряженная с плотностью $\tau=\mathrm{const}$ нить. Введем цилиндрическую систему координат r; φ; z, ось Z которой совпадает с нитью, и рассмотрим поток вектора $\mathbf{D}$ через поверхность кругового цилиндра радиуса r и длиной Δl, ось которого совпадает с осью Z (рис. 6.6.1). Из условия задачи очевидно, что поле должно обладать осевой симметрией, а векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ должны быть перпендикулярны к боковой поверхности цилиндра. Поэтому поток вектора $\mathbf{D}$ через основания цилиндра отсутствует, а поток через боковую поверхность равен $D\cdot 2\pi r\Delta l$. Используя теорему Гаусса и учитывая, что полный заряд внутри рассматриваемого цилиндра равен произведению τ на Δl, получаем

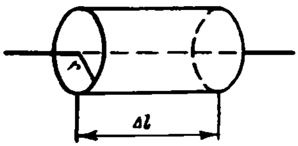


Рис. 6.6.1

$$\mathbf{D}=\mathbf{r}_0\frac{\tau}{2\pi r} \quad \text{или} \quad \mathbf{E}=\mathbf{r}_0\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a r}, \tag{6.6.1}$$

где $\mathbf{r}_0$ — орт радиуса вектора цилиндрической системы координат.

Поскольку в рассматриваемом случае поле не зависит от переменных φ и z (т. е. производные потенциала u по переменным φ и z должны быть равны нулю), то из определения электростатического потенциала (6.2.1) и ф-лы (6.6.1) имеем

$$u=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln r+B, \tag{6.6.2}$$

где B — произвольная постоянная. Обычно постоянную B полагают равной нулю и потенциал нити определяют выражением

$$u=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln r. \tag{6.6.3}$$

Если вместо нити имеется тонкий бесконечно длинный параллелепипед с площадью сечения dS, равномерно заряженный с объемной плотностью ρ, то ф-лу (6.6.3) следует представить в виде

$$u=-\frac{\rho\, dS}{2\pi\varepsilon_a}\ln R, \tag{6.6.4}$$

где $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ — расстояние от элемента dS, характеризуемого координатами ξ; η, до точки N с координатами x; y, в которой вычисляется потенциал.

От ф-лы (6.6.4) нетрудно перейти к выражению для потенциала, созданного произвольным двумерным (не зависящим от z) распределением зарядов с плотностью ρ

$$u=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\int\limits_S \rho\ln R dS. \tag{6.6.5}$$

В ф-ле (6.6.5) S — площадь пересечения данной системы зарядов с плоскостью, перпендикулярной к оси Z (рис. 6.6.2).

Функцию u, определяемую соотношениями (6.6.3)—(6.6.5), принято называть *логарифмическим потенциалом.*

Если поле создается зарядами, распределенными по цилиндрической поверхности S, образующие которой параллельны оси Z, а плотность поверхностных зарядов ρ_S не зависит от координаты z, то соответствующий логарифмический потенциал принимает вид

$$u = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\int_{\Gamma} \rho_S \ln R\,dl, \tag{6.6.6}$$

где Г — линия пересечения поверхности S с плоскостью, перпендикулярной оси Z, а R — расстояние от элемента dl до точки N, в которой вычисляется потенциал (рис. 6.6.3).

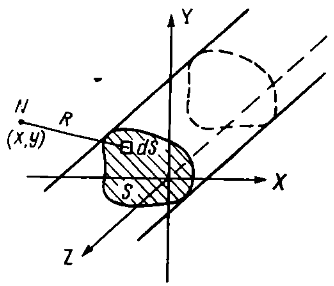


Рис. 6.6.2

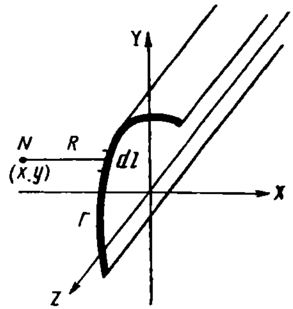


Рис. 6.6.3

Из ф-л (6.6.3)—(6.6.6) следует, что логарифмический потенциал на бесконечности нельзя принять равным нулю не только в направлении оси Z, но и в перпендикулярных к ней плоскостях. Исключение составляет случай, когда полный заряд системы равен нулю.

Поле, соответствующее потенциалам (6.6.5) и (6.6.6), убывает на бесконечности пропорционально $\frac{1}{r}$ (или быстрее), если поверхность S (или контур Г) ограничена. Если поверхность S (или контур Г) не ограничена, то векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ на бесконечности могут иметь конечное значение (например, поле равномерно заряженной плоскости).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Выше был рассмотрен вопрос об определении поля в однородном изотропном пространстве по известному распределению зарядов. Однако на практике часто встречаются задачи другого типа, например: задано расположение и форма всех проводников, находящихся в однородном диэлектрике: требуется найти поле в этом диэлектрике, если известен потенциал каждого проводника (задача 1) или общий заряд каждого проводника (задача 2). Такие задачи называют *краевыми задачами электростатики.*

Если поле создается зарядами, распределенными по цилиндрической поверхности S, образующие которой параллельны оси Z, а плотность поверхностных зарядов ρ_S не зависит от координаты z, то соответствующий логарифмический потенциал принимает вид

$$u = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_a}\int_{\Gamma}\rho_S \ln R dl, \tag{6.6.6}$$

где Γ — линия пересечения поверхности S с плоскостью, перпендикулярной оси Z, а R — расстояние от элемента dl до точки N, в которой вычисляется потенциал (рис. 6.6.3).

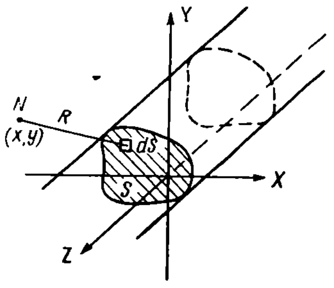


Рис. 6.6.2

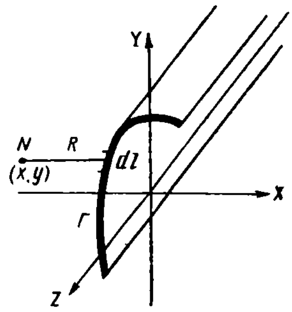


Рис. 6.6.3

Из ф-л (6.6.3)—(6.6.6) следует, что логарифмический потенциал на бесконечности нельзя принять равным нулю не только в направлении оси Z, но и в перпендикулярных к ней плоскостях. Исключение составляет случай, когда полный заряд системы равен нулю.

Поле, соответствующее потенциалам (6.6.5) и (6.6.6), убывает на бесконечности пропорционально $\frac{1}{r}$ (или быстрее), если поверхность S (или контур Γ) ограничена. Если поверхность S (или контур Γ) не ограничена, то векторы **E** и **D** на бесконечности могут иметь конечное значение (например, поле равномерно заряженной плоскости).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Выше был рассмотрен вопрос об определении поля в однородном изотропном пространстве по известному распределению зарядов. Однако на практике часто встречаются задачи другого типа, например: задано расположение и форма всех проводников, находящихся в однородном диэлектрике: требуется найти поле в этом диэлектрике, если известен потенциал каждого проводника (задача 1) или общий заряд каждого проводника (задача 2). Такие задачи называют *краевыми задачами электростатики.*

Область V, в которой требуется найти поле, либо ограничена поверхностями проводников (рис. 6.6.4) либо простирается до бесконечности. Во втором случае проводящие тела целиком лежат внутри области V (рис. 6.6.5). Потенциал в бесконечно удаленных точках считается равным нулю.

Покажем, что указанные задачи имеют единственное решение. Сначала рассмотрим задачу 1. Для ее решения достаточно найти функцию u, удовлетворяющую уравнению Пуассона (5.2.17), если

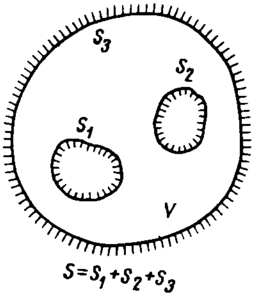


Рис. 6.6.4

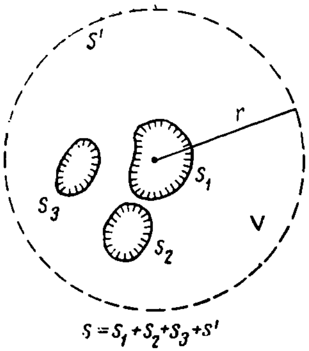


Рис. 6.6.5

в диэлектрике имеются свободные заряды, или уравнению Лапласа (6.2.7), если заряды отсутствуют. На поверхности проводников потенциал u должен принимать заданные значения, а на бесконечности обращаться в нуль.

Предположим, что имеются две функции u_1 и u_2, отвечающие указанным требованиям, и рассмотрим функцию $u_3=u_1-u_2$. Функция u_3 удовлетворяет уравнению Лапласа (6.2.7), а на поверхности проводников обращается в нуль.

Для доказательства единственности решения задачи 1 необходимо показать, что функция u_3 тождественно равна нулю. Воспользуемся теоремой Грина, утверждающей, что для произвольных дважды дифференцируемых скалярных функций v и w справедливо соотношение

$$\int\limits_V [v\nabla^2 w + (\operatorname{grad} v)(\operatorname{grad} w)]\, dV = \oint\limits_S v\frac{\partial w}{\partial n}\, dS, \tag{6.6.7}$$

где V — произвольная область, в которой определены функции v и w; S — полная поверхность, ограничивающая объем V, а $\mathbf{n}_0$ — внешняя по отношению к V единичная нормаль к поверхности S.

Если область V простирается до бесконечности, то поверхность S складывается из поверхности проводников и поверхности сферы бесконечно большого радиуса ($r\to\infty$), охватывающей область V

(рис. 6.6.5). Полагая в равенстве (6.6.7) $v=w=u_3$ и выбирая в качестве объема V рассматриваемую область, получаем

$$\int\limits_V (\mathrm{grad}\, u_3)^2\, dV = \oint\limits_S u_3 \frac{\partial u_3}{\partial n}\, dS. \tag{6.6.8}$$

Интеграл в правой части ф-лы (6.6.8) равен нулю. Действительно, на поверхности проводников $u=0$, а в бесконечно удаленных точках, т. е. на поверхности сферы бесконечно большого радиуса, охватывающей область V, потенциал u и его производная $\partial u/\partial n$ стремятся к нулю пропорционально $1/r$ и $1/r^2$ соответственно, в то время как поверхность сферы возрастает пропорционально r^2. Следовательно, соотношение (6.6.8) принимает вид

$$\int\limits_V (\mathrm{grad}\, u_3)^2\, dV = 0. \tag{6.6.9}$$

Подынтегральное выражение в ф-ле (6.6.9) не может быть отрицательной величиной. Следовательно, $\mathrm{grad}\, u_3=0$, т. е. $u_3=\mathrm{const}$. Но на поверхности проводников функция u_3 обращается в нуль. Таким образом, $u_3=0$ во всей области V и $u_1=u_2$, а это означает, что задача 1 имеет единственное решение.

Доказательство единственности решения задачи 2 аналогично предыдущему. В качестве поверхности S в этом случае можно рассматривать только поверхность проводников, так как интеграл по поверхности сферы бесконечно большого радиуса, как уже было показано, обращается в нуль. На поверхности проводников производная потенциала u по нормали пропорциональна плотности поверхностных зарядов ρ_S (разд. 6.3). Обозначим поверхностные плотности зарядов, соответствующие потенциалам u_1 и u_2, через $\rho_S^{(1)}$ и $\rho_S^{(2)}$. Учитывая, что в рассматриваемом случае, в отличие от (6.3.11), нормаль $\mathbf{n}_0$ считается направленной из диэлектрика в металл, получаем

$$\varepsilon_a \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_S = \rho_S^{(1)};\ \varepsilon_a \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_S = \rho_S^{(2)}. \tag{6.6.10}$$

Поверхность

$$S = \sum_{(m)} S_m, \tag{6.6.11}$$

где S_m — поверхность m-го проводника, граничащего с областью V.

На поверхности каждого проводника S_m потенциал u имеет постоянное значение. Поэтому разность $u_1-u_2=u_3$ на S_m также будет иметь постоянное значение: $u_3|_{S_m}=u_{3m}$ (в рассматриваемом случае уже нельзя считать, что $u_3|_{S_m}=0$). С учетом изложенного получаем

$$\oint\limits_S u_3 \frac{\partial u_3}{\partial n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_a} \sum_{(m)} u_{3m} \int\limits_{S_m} \left(\rho_S^{(1)} - \rho_S^{(2)}\right) dS = \frac{1}{\varepsilon_a} \sum_{(m)} u_{3m} \left(Q_m^{(1)} - Q_m^{(2)}\right), \tag{6.6.12}$$

где Q_m^1 и $Q_m^{(2)}$ — полные заряды m-го проводника, соответствующие решениям u_1 и u_2.

По условию задачи 2 полный заряд каждого проводника заранее известен, т. е. $Q_m^{(1)}=Q_m^{(2)}$. Следовательно, интеграл в правой части ф-лы (6.6.8) равен нулю и должно выполняться соотношение (6.6.9). Рассуждая далее так же, как в задаче 1, приходим к выводу, что $u_3=u_1-u_2=\text{const}$. Таким образом, различные решения задачи 2 могут отличаться на постоянную величину в выражениях для электростатического потенциала. Однако это различие несущественно при вычислении векторов поля. Следовательно, задача 2 также имеет единственное решение.

Нетрудно показать, что в задачах смешанного типа, когда на каком-либо проводнике (или нескольких проводниках) задан потенциал, а для других известен полный заряд, функция u определяется однозначно. Отметим, что построение строгого решения краевой задачи электростатики во многих случаях сопряжено со значительными математическими трудностями. Практически его удается найти лишь при достаточно простой форме проводящих тел. Подробное изложение методов решения задач электростатики имеется в [21].

6.7. Примеры расчета электростатических полей

ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРЫ

Пусть заряд Q равномерно распределен по поверхности сферы радиуса a, находящейся в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε_a. Введем сферическую систему координат r; θ; φ, начало которой совпадает с центром сферы. Из симметрии задачи очевидно, что поле в этом случае может зависеть только от координаты r, причем векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ могут иметь только радиальную компоненту. Применяя теорему Гаусса к сфере радиуса r и учитывая, что заряды равномерно распределены по поверхности сферы радиуса a, получаем

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\mathbf{r}_0\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2} & \text{при } r\geqslant a;\\ 0 & \text{при } r<a.\end{cases} \tag{6.7.1}$$

Отсюда следует, что поле равномерно заряженной сферы в области $r\geqslant a$ совпадает с полем точечного заряда величины $q=Q$, расположенного в начале координат.

Электростатический потенциал в этом случае определяется выражением

$$u=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_a r} & \text{при } r\geqslant a;\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_a a} & \text{при } r\leqslant a.\end{cases} \tag{6.7.2}$$

Из ф-лы (6.7.2) получаем

$$C=\frac{Q}{u|_{r=a}}=4\pi\varepsilon_a a. \tag{6.7.3}$$

ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ЦИЛИНДРА

Пусть заряд равномерно распределен по поверхности бесконечного кругового цилиндра радиуса a с плотностью $\rho_S=\mathrm{const}$. Из соображений симметрии очевидно, что векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в этом случае будут направлены перпендикулярно оси цилиндра. Рассмотрим поток вектора $\mathbf{D}$ через поверхность цилиндра длины l и радиуса r, ось которого совпадает с осью основного цилиндра. Учитывая, что поток вектора $\mathbf{D}$ через основания этого цилиндра равен нулю, получаем

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\mathbf{r}_0\dfrac{\rho_S}{\varepsilon_a}\dfrac{a}{r} & \text{при } r\geqslant a;\\ 0 & \text{при } r<a,\end{cases} \tag{6.7.4}$$

где $\mathbf{r}_0$ — орт радиуса r цилиндрической системы координат, а ε_a — диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

Отметим, что поле равномерно заряженного цилиндра в области $r\geqslant a$ совпадает с полем равномерно заряженной нити с линейной плотностью

$$\tau=2\pi a\rho_S. \tag{6.7.5}$$

ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

Как уже отмечалось (разд. 1.2), электрическим диполем называется система из двух близлежащих равных по величине точечных разноименных зарядов $+q$ и $-q$ (рис. 6.7.1). Диполи характеризуются дипольным моментом

$$\mathbf{p}=q\,\mathbf{l}, \tag{6.7.6}$$

где q — абсолютная величина каждого из зарядов, а $\mathbf{l}$ — вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, по абсолютной величине равный расстоянию между зарядами l.

Если сближать заряды, одновременно увеличивая их значения так, чтобы вектор $\mathbf{p}$ оставался неизменным, то в пределе получится точечный или *идеальный* диполь с тем же моментом.

Вычислим поле электрического диполя.

Введем сферическую систему координат r, θ, φ так, чтобы полярная ось проходила через оба заряда, а начало координат находилось на равном расстоянии от них (рис. 6.7.2). Потенциал диполя найдем по принципу суперпозиции как сумму потенциалов, создаваемых зарядами $+q$ и $-q$:

$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \tag{6.7.7}$$

где R_1 и R_2 — расстояния соответственно от зарядов $+q$ и $-q$ до точки, в которой вычисляется потенциал:

$$R_1=\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl\cos\theta};\quad R_2=\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+rl\cos\theta}. \tag{6.7.8}$$

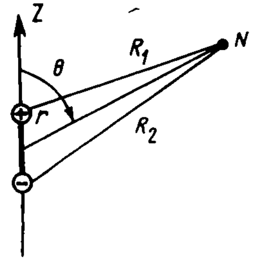


Рис. 6.7.1

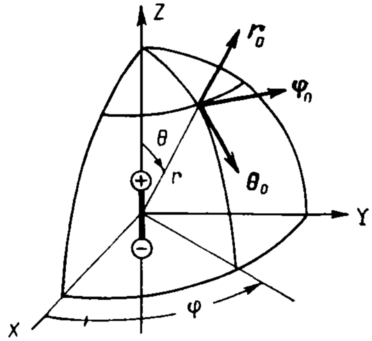


Рис. 6.7.2

При вычислении поля будем считать, что расстояние r от центра диполя до точки наблюдения велико по сравнению с расстоянием между зарядами l. При этом условии справедливы следующие приближенные равенства:

$$R_1\approx r-\frac{l}{2}\cos\theta;\quad R_2\approx r+\frac{l}{2}\cos\theta. \tag{6.7.9}$$

С учетом равенств (6.7.9) разность $\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}=\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\approx\frac{l\cos\theta}{r^2}. \tag{6.7.10}$$

Подставляя ф-лу (6.7.10) в (6.7.7), получаем

$$u=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a r^2}=\frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{4\pi\varepsilon_a r^2}, \tag{6.7.11}$$

где $\mathbf{r}_0$ — орт направления $\mathbf{r}$.

Для определения напряженности электрического поля воспользуемся соотношением (6.2.1). В сферической системе координат

$$\operatorname{grad}u=\mathbf{r}_0\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{\Theta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \tag{6.7.12}$$

Направления единичных векторов $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{\Theta}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ показаны на рис. 6.7.2. Выполняя указанные в (6.7.12) действия и учитывая, что в данном случае благодаря осевой симметрии $\partial u/\partial\varphi=0$, получаем

$$\mathbf{E}=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_a r^3}(\mathbf{r}_0\, 2\cos\theta+\mathbf{\Theta}_0\sin\theta). \qquad (6.7.13)$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля не зависит от угла φ (поле обладает осевой симметрией) и имеет две составляющие E_r и E_θ:

$$\left.\begin{aligned} E_r&=\frac{ql}{2\pi\varepsilon_a r^3}\cos\theta\\ E_\theta&=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_a r^3}\sin\theta \end{aligned}\right\}. \qquad (6.7.14)$$

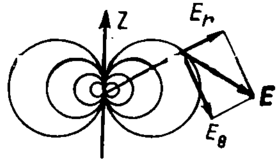


Рис. 6.7.3

Силовые линии электрического поля диполя показаны на рис. 6.7.3.

ПОЛЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОТИВОПОЛОЖНО ЗАРЯЖЕННЫХ НИТЕЙ

Вычислим поле двух параллельных бесконечно тонких равномерно заряженных нитей с линейной плотностью $+\tau$ и $-\tau$ соответственно, расположенных на расстоянии l друг от друга (рис. 6.7.4). Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, ось Z которой параллельна нитям и лежит в плоскости, проходящей через обе нити, на равном расстоянии от них.

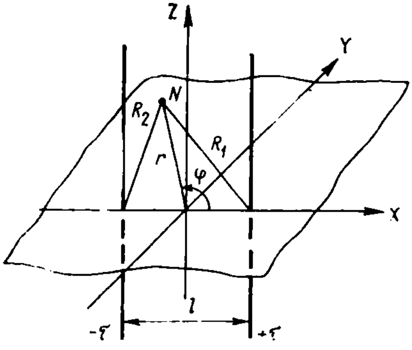


Рис. 6.7.4

По принципу суперпозиции потенциал u системы нитей равен сумме потенциалов каждой из нитей. Потенциал одной нити определяется ф-лой (6.6.2). Выбирая постоянную B так, чтобы на оси Z потенциал u был равен нулю, получаем

$$u=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{R_2}{R_1}, \qquad (6.7.15)$$

где R_1 и R_2 — расстояния от положительно и отрицательно заряженной нити соответственно до точки N, в которой вычисляется потенциал (рис. 6.7.4).

Напряженность электрического поля также можно определить как суперпозицию напряженностей полей, создаваемых каждой из нитей в отдельности. Если расстояние r от оси Z до точки наблюдения N велико по сравнению с расстоянием между нитями l, то выражение для вектора $\mathbf{E}$ существенно упрощается. В этом случае справедливы приближенные равенства:

$$R_1 \approx r - \frac{l}{2}\cos\varphi;\ R_2 \approx r + \frac{l}{2}\cos\varphi. \qquad (6.7.16)$$

Подставляя ф-лу (6.7.16) в (6.7.15), находим

$$u = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{2r + l\cos\varphi}{2r - l\cos\varphi}. \qquad (6.7.17)$$

Для определения вектора $\mathbf{E}$ воспользуемся соотношением (6.2.1). В цилиндрической системе координат $\operatorname{grad} u$ имеет вид

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{r}_0\frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \mathbf{z}_0\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad (6.7.18)$$

где $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\mathbf{z}_0$ — орты соответствующих координатных направлений.

Выполняя указанные в (6.7.18) действия и учитывая, что в данном случае $\partial u/\partial z = 0$, получаем

$$\mathbf{E} = \frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_a r^2}(\mathbf{r}_0\cos\varphi + \boldsymbol{\varphi}_0\sin\varphi). \qquad (6.7.19)$$

Таким образом, напряженность электрического поля системы двух параллельных противоположно заряженных нитей имеет две составляющие E_r и E_φ, которые вдали от нитей определяются выражениями:

$$E_r = \frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_a r^2}\cos\varphi, \qquad (6.7.20)$$

$$E_\varphi = \frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_a r^2}\sin\varphi. \qquad (6.7.21)$$

Найдем эквипотенциальные поверхности рассматриваемой системы зарядов. Потенциал (6.7.15) постоянен, если отношение расстояний от рассматриваемых точек до нитей равно постоянной величине

$$\frac{R_2}{R_1} = b = \text{const}. \qquad (6.7.22)$$

Следовательно, эквипотенциальными поверхностями будут поверхности круговых цилиндров, параллельных оси Z. Найдем местоположение их осей и радиусы. Введем декартову систему координат x, y, z, ось Z которой совпадает с осью Z цилиндрической системы координат, а плоскость XOZ проходит через обе нити (рис. 6.7.4). В данной системе координат

$$R_1 = \sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2},\ R_2 = \sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Подставляя в (6.7.22) вместо R_1 и R_2 их значения, получаем уравнение

$$x^2 - \frac{b^2+1}{b^2-1} lx + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + y^2 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left(x - \frac{b^2+1}{b^2-1} \cdot \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{lb}{b^2-1}\right)^2. \tag{6.7.23}$$

Уравнение (6.7.23) описывает семейство окружностей, образующихся при пересечении эквипотенциальных поверхностей с плоскостью XOY. Центры окружностей расположены на оси X и имеют координаты:

$$x_0 = \frac{b^2+1}{b^2-1} \cdot \frac{l}{2}\ ;\ y_0 = 0, \tag{6.7.24}$$

а их радиусы

$$r_0 = \left|\frac{bl}{b^2-1}\right|. \tag{6.7.25}$$

У окружностей, расположенных симметрично относительно оси Y, параметр b будет выражаться обратными числами (например, b_0 и $\frac{1}{b_0}$). Величины r_0, l и x_0 связаны простым соотношением

$$x_0^2 - r_0^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2, \tag{6.7.26}$$

являющимся следствием (6.7.24) и (6.7.25).

Решая ур-ние (6.7.25) относительно b и используя равенства (6.7.24) и (6.7.26), получаем следующие значения параметра b и потенциала u_0 на соответствующей эквипотенциальной поверхности:

$$b = \frac{x_0 \pm l/2}{r_0}\ ; \tag{6.7.27}$$

$$u_0 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{x_0 \pm l/2}{r_0}. \tag{6.7.28}$$

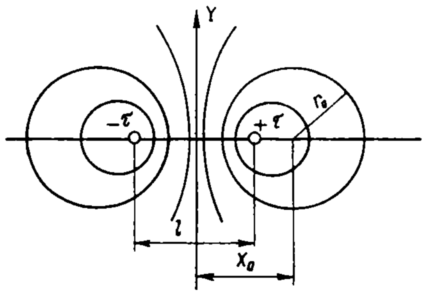


Рис. 6.7.5

В ф-лах (6.7.27) и (6.7.28) знак «+» выбирают для точек, находящихся справа от оси Y, а знак «—» — для точек, лежащих слева от оси Y.

Структура эквипотенциальных поверхностей показана на рис. 6.7.5.

Рассмотрим электростатическое поле двухпроводной линии (рис. 6.7.6), т. е. поле двух параллельных противоположно заряженных бесконечных цилиндров радиуса a, расстояние между осями которых равно $2h$. Потенциалы проводников будем считать известными и равными $+U$ и $-U$ соответственно. Заряды цилиндров на единицу длины равны по величине и противоположны по знаку.

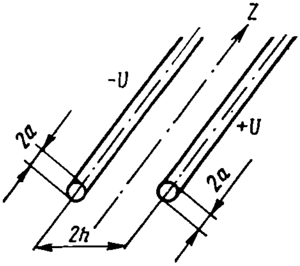


Рис. 6.7.6

Математически задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется найти функцию u, которая во внешнем по отношению к цилиндрам пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа (6.2.7), на поверхностях цилиндров принимает заданные значения ($+U$ и $-U$), а в направлениях, перпендикулярных осям цилиндров (оси Z), на бесконечности обращается в нуль. В силу теоремы единственности существует только одна функция u, удовлетворяющая указанным требованиям. Для построения функции u применим искусственный прием.

Выше было показано, что эквипотенциальные поверхности поля двух параллельных противоположно заряженных нитей образуют семейство поверхностей круговых цилиндров. Найдем расстояние между нитями, при котором две эквипотенциальные поверхности будут совпадать с поверхностями цилиндров, образующих двухпроводную линию.

Полагая в ф-ле (6.7.26) $x_0=h$ и $r_0=a$, получаем

$$\frac{l}{2}=\sqrt{h^2-a^2}. \qquad (6.7.29)$$

Потребуем, кроме того, чтобы потенциалы этих поверхностей равнялись $+U$ и $-U$ соответственно. Из ф-лы (6.7.28) с учетом (6.7.29) находим

$$\pm U=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{h\pm\sqrt{h^2-a^2}}{a}. \qquad (6.7.30)$$

Отсюда следует, что

$$\tau=\frac{2\pi\varepsilon_a U}{\ln\dfrac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}}. \qquad (6.7.31)$$

Потенциал таких двух нитей (их называют электрическими осями проводов), определяемый выражением (6.7.15), во внешнем по отношению к проводам линии пространстве отвечает всем поставленным требованиям, т. е. является решением задачи и определяет электростатическое поле двухпроводной линии.

Подчеркнем, что потенциал найденных таким образом эквивалентных заряженных линий (электрических осей проводов) совпадает с искомым потенциалом только вне цилиндров, образующих двухпроводную линию. Внутри цилиндров истинный потенциал имеет постоянное значение ($\pm U$), т. е. принципиально отличается от определяемого выражением (6.7.15).

Вектор **E** находится из соотношения $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,u$, где u определяется ф-лой (6.7.15), в которую вместо τ и l нужно подставить их значения из (6.7.31) и (6.7.29) соответственно.

Определим емкость C_1 на единицу длины рассматриваемой системы проводов как отношение заряда, приходящегося на единицу длины одного из проводов к разности потенциалов между проводами. Разность потенциалов между проводами

$$u_1-u_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{h-\sqrt{h^2-a^2}}=\frac{\tau}{\pi\varepsilon_a}\ln\frac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}\,. \quad (6.7.32)$$

Из ф-л (6.7.32) и (6.7.31) получаем

$$C_1=\frac{\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}}\,. \quad (6.7.33)$$

В случае тонких проводов ($a\ll h$) справедливо приближенное равенство

$$C_1=\frac{\pi\varepsilon_a}{\ln\dfrac{2h}{a}}\,. \quad (6.7.34)$$

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ (МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ)

Рассмотрим еще раз поле двух разноименных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии $2h$ друг от друга. Создаваемый ими потенциал выражается ф-лой (6.7.7), если в последней положить $l=2h$. Очевидно, что плоскость $A-B$, расположенная симметрично относительно зарядов $+q$ и $-q$ (рис. 6.7.7), является эквипотенциальной поверхностью с нулевым потенциалом. На основании теоремы единственности можно утверждать, что поле над этой плоскостью не изменится, если ее заменить металлической плоскостью или заполнить нижнее (см. рисунок) полупространство проводящей средой. Иными словами, задача определения поля точечного заряда, расположенного над проводящей плоскостью, эквивалентна задаче определения поля двух зарядов: заданного и некоторого дополнительного (фиктивного) заряда, являющегося как бы зеркальным изображением первого, находящихся в неограниченном диэлектрике.

Пусть заряд q расположен на высоте h над металлической плоскостью $A-B$ (рис. 6.7.7). Найдем величину и распределение заряда, индуцированного на плоскости $A—B$. Введем цилиндрическую систему координат R; φ; z, ось Z которой проходит через заряды q и $—q$, а начало координат находится на плоскости $A—B$ (рис. 6.7.7). В этой системе координат потенциал u в области $z\geqslant 0$ также выражается ф-лой (6.7.7), если считать, что $R_1 = \sqrt{R^2+(z-h)^2}$ и $R_2=\sqrt{R^2+(z+h)^2}$. В области $z\leqslant 0$ потенциал $u=0$. Из граничного условия (6.3.11) получаем, что плотность поверхностных зарядов, наведенных на плоскости $z=0$, определяется выражением

$$\rho_S = \frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{qh}{4\pi\,(h^2+R^2)^{3/2}}\,. \qquad (6.7.35)$$

Интегрируя (6.7.35) по всей плоскости, получаем, что полный заряд, наведенный на плоскости, равен $—q$. Таким образом, введение фиктивного сосредоточенного заряда эквивалентно учету всех зарядов, наведенных на плоскости.

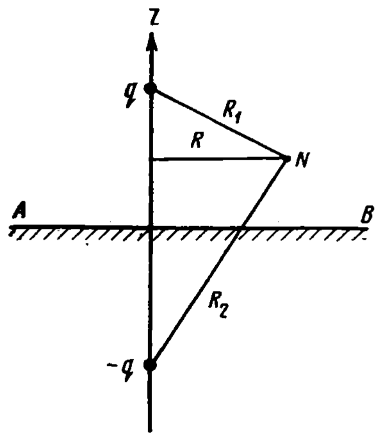


Рис. 6.7.7

Отметим, что полученные выше ф-лы (6.7.13) и (6.7.14) можно использовать для вычисления вектора $\mathbf{E}$ в области $z\geqslant 0$ (в верхнем полупространстве), если в них положить $l/2=h$.

Метод замены проводящей поверхности фиктивным сосредоточенным зарядом получил название *метода зеркальных изображений.*

Очевидно, что в силу принципа суперпозиции метод зеркальных изображений можно обобщить на случай произвольной системы зарядов, расположенных над проводящей плоскостью. Таким об-

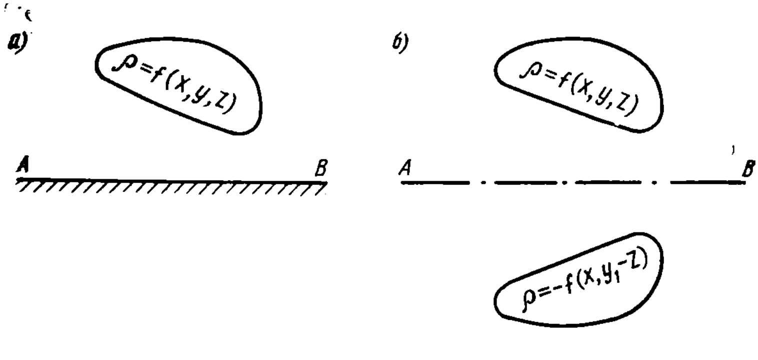


Рис. 6.7.8

разом, если над бесконечной проводящей плоскостью заряды распределены по закону $\rho=f(x, y, z)$ (рис. 6.7.8*а*), то создаваемый ими потенциал (а следовательно, и напряженность электрического поля) в верхнем полупространстве будет равен потенциалу (напряженности электрического поля), создаваемому этими зарядами и системой зарядов, являющихся их зеркальным изображением (рис. 6.7.8*б*).

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ ДВУМЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПРОВОДЯЩИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Если две проводящие плоскости пересекаются под углом $\alpha=\pi/n$, где n — целое число (рис. 6.7.9), то для определения поля точечного заряда, расположенного между ними, также можно использовать метод зеркальных изображений. Однако в этом случае нужно ввести уже не один фиктивный заряд, а $2n-1$ фиктивных зарядов. В качестве примера на рис. 6.7.10*а* показана система зарядов для случая $\alpha=\pi/2$, а на рис. 6.7.10*б* — система зарядов для случая $\alpha=\pi/3$.

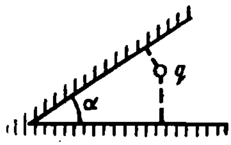


Рис. 6.7.9

Поле образованной таким образом системы зарядов в рассматриваемой области, т. е. между проводящими плоскостями, удовлетворяет всем необходимым требованиям (потенциал на проводящих плоскостях и в бесконечно удаленных точках равен нулю) и, следовательно, является решением исходной задачи.

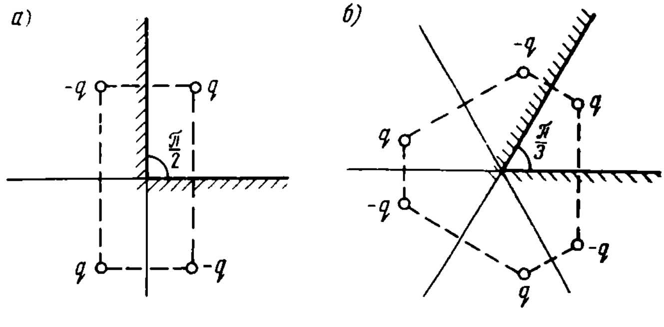


Рис. 6.7.10

Если угол между проводящими плоскостями не равен целой части от π, то метод зеркальных изображений требует введения бесчисленного множества фиктивных зарядов.

6.8. Конденсаторы

ЕМКОСТЬ КОНДЕНСАТОРА

Конденсатором в электростатике называют систему двух проводников, изолированных от внешнего влияния. Идеальным является конденсатор, в котором один проводник образует замкнутую полость, а второй находится внутри этой полости. Если второму проводнику сообщен заряд Q, то на внутренней поверхности первого проводника возникнет заряд противоположного знака $-Q$. Абсолютную величину отношения заряда одного из проводников к разности потенциалов между проводниками называют *емкостью конденсатора*:

$$C = \left| \frac{Q}{U_1 - U_2} \right|. \qquad (6.8.1)$$

Рассмотрим конденсаторы простейших типов.

ПЛОСКИЙ КОНДЕНСАТОР

Две одинаковые проводящие плоские пластины, расположенные параллельно друг другу и имеющие равные по величине и противоположные по знаку заряды, образуют плоский конденсатор (рис. 6.8.1). Если размеры пластин велики по сравнению с расстоянием d между ними, можно пренебречь искажением поля у краев пластин и считать, что оно такое же, как между двумя параллельными противоположно заряженными с плотностью $\rho_S = Q/S$ безграничными плоскостями[1]:

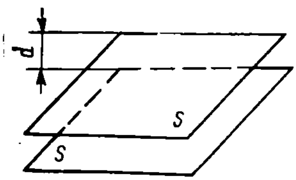


Рис. 6.8.1

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}_0 \frac{Q}{S\varepsilon_a}, \qquad (6.8.2)$$

где S — площадь одной пластины, а $\mathbf{n}_0$ — единичная нормаль, направленная от положительно заряженной плоскости к отрицательно заряженной.

Разность потенциалов между пластинами (обкладками) конденсатора определяется формулой:

$$U_1 - U_2 = \int_0^d \mathbf{E}d\mathbf{l} = \frac{Qd}{S\varepsilon_a}. \qquad (6.8.3)$$

Подставляя ф-лу (6.8.3) в (6.8.1), находим емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{S}{d}. \qquad (6.8.4)$$

Если размеры пластин нельзя считать большими по сравнению с d, то ф-ла (6.8.4) становится неточной. Действительная емкость несколько больше емкости, получаемой по этой формуле.

---

[1] Формула (6.8.2) легко получается с помощью теоремы Гаусса.

Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего провода радиуса a_1 и коаксиальной с ним цилиндрической оболочки с внутренним радиусом a_2 (рис. 6.8.2). Пусть заряд внутреннего проводника на единицу длины равен τ. Поле в пространстве между проводниками определяется вытекающим из ф-лы (6.7.4) выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \cdot \frac{1}{r}. \tag{6.8.5}$$

Разность потенциалов между проводниками

$$U_1 - U_2 = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{a_2}{a_1}. \tag{6.8.6}$$

Следовательно, емкость на единицу длины бесконечного цилиндрического конденсатора определяется формулой

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln(a_2/a_1)}. \tag{6.8.7}$$

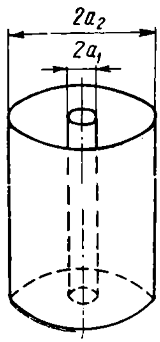


Рис. 6.8.2

Формула (6.8.7) достаточно точна для практических целей только в случае конденсаторов, длина проводников которых велика по сравнению с зазором между ними. В конденсаторах с короткими проводниками поле между ними нельзя считать равномерным, и ф-ла (6.8.7) дает емкость, меньшую действительной.

СФЕРИЧЕСКИЙ КОНДЕНСАТОР

Сферический конденсатор состоит из двух проводящих концентрических сфер с радиусами a_1 и a_2. Напряженность электрического поля в пространстве между сферами и потенциал u определяются выражениями:

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r^2}, \quad a_1 \leqslant r \leqslant a_2; \tag{6.8.8}$$

$$u = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_a r}, \quad a_1 \leqslant r \leqslant a_2, \tag{6.8.9}$$

где q — заряд внутренней сферы, а $\mathbf{r}_0$ — орт радиуса-вектора сферической системы координат.

Полагая в ф-ле (6.8.9) $r = a_1$ и $r = a_2$, найдем разность потенциалов между проводниками и емкость сферического конденсатора:

$$U_1 - U_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_a} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right); \tag{6.8.10}$$

$$C = \frac{4\pi a_1 a_2 \varepsilon_a}{a_2 - a_1}. \tag{6.8.11}$$

ГЛАВА 7

СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

7.1. Основные уравнения стационарного электромагнитного поля

Стационарным называют неизменное во времени электромагнитное поле, существующее при наличии постоянного тока. Оно описывается системой дифференциальных ур-ний (2.9.3). Как уже отмечалось (см. разд. 2.9), в системе (2.9.3) можно выделить две группы уравнений (*а* и *б*), одна из которых (*б*) содержит только электрические векторы (**E** и **D**), а другая (*а*) — только магнитные (**B** и **H**). При наличии постоянного тока эти группы уравнений связаны соотношением $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$. Из уравнений группы *б* следует, что электрическое поле постоянного тока, как и электростатическое, является потенциальным, а из уравнений группы *а* следует, что магнитное поле постоянного тока является вихревым.

Уравнения стационарного электромагнитного поля в интегральной форме получаются из ур-ний (2.8.3), если входящие в них величины считать не зависящими от времени. При этом интегральные соотношения, соответствующие уравнениям группы *б*, совпадают с уравнениями электростатики в интегральной форме (6.1.1), а интегральные соотношения, соответствующие уравнениям группы *а*, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{H}d\mathbf{l} = I = \int\limits_{S} \mathbf{j}d\mathbf{S} \\ &\oint\limits_{S} \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7.1.1)$$

Полагая в уравнении непрерывности (2.5.1) $\partial\rho/\partial t$, получаем, что плотность постоянного тока удовлетворяет условию

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \qquad (7.1.2)$$

Следовательно, в стационарном поле линии тока являются непрерывными.

Вытекающая из (2.9.3) относительная независимость электрических и магнитных векторов позволяет рассматривать отдельно электрическое и магнитное поля, что существенно упрощает изучение стационарных электромагнитных процессов.

Отметим, что для существования постоянного тока в однородной проводящей среде недостаточно действия одного потенциального электрического поля, удовлетворяющего соотношениям (6.1.1). В самом деле, рассмотрим замкнутый проводник длины l и постоянного сечения S, образующий контур Г (рис. 7.1.1*а*). Пусть по этому проводнику течет ток I, равномерно распределенный по сечению. Вектор плотности тока $\mathbf{j}=\mathbf{l}_0 I/S$, где $\mathbf{l}_0$ — орт касательной к линии тока. Предположим, что в проводнике действует только потенциальное электрическое поле. Тогда во всех точках проводника выполняется соотношение $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$. Из ур-ния (6.1.1), следует, что

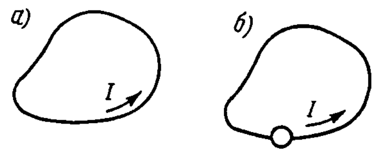


Рис. 7.1.1

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \frac{I}{\sigma S}\oint\limits_{\Gamma} dl = \frac{Il}{\sigma S} = IR = 0, \tag{7.1.3}$$

где R — сопротивление проводника.

Так как величина $R=l/\sigma S$ заведомо отлична от нуля, то равенство (7.1.3) возможно лишь при $I=0$. Действительно, при перемещении заряда по замкнутому контуру в потенциальном электрическом поле работа не совершается. Поэтому ток, представляющий собой упорядоченное движение заряженных частиц, не может расходовать энергию потенциального электрического поля $\mathbf{E}$. Для создания тока в цепи должен действовать источник энергии неэлектрического происхождения, так называемая *сторонняя эдс*. На рис. 7.1.1*б* этот источник условно показан кружком.

Пусть напряженность электрического поля, создаваемого сторонней эдс, равна $\mathbf{E}^{\text{ст}}$. Закон Ома (2.6.2) в этом случае записывается в форме

$$\mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}}\right). \tag{7.1.4}$$

С учетом ф-лы (7.1.4) соотношение (7.1.3) принимает вид

$$e^{\text{ст}} = \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{ст}}\, dl = IR, \tag{7.1.5}$$

где $e^{\text{ст}}$ — действующая в цепи сторонняя эдс.

Уравнение (7.1.5) представляет собой закон Ома для цепи постоянного тока.

Сторонние эдс вызываются различными причинами, например, они возникают на границе раздела проводящих сред, химически воздействующих друг на друга (гальванические эдс).

7.2. Магнитостатика

Изучение магнитных явлений начнем с наиболее простого случая. Предположим, что в каждой точке рассматриваемой области плотность тока проводимости равна нулю ($\mathbf{j}=0$), а сама область не охватывает тока. Кольцевые области, сцепленные с током (рис. 7.2.1), в данном разделе не анализируются.

Уравнения группы *а* в (2.9.3), описывающие магнитное поле, в этом случае не зависят от уравнений группы *б* и переходят в ур-ния (2.9.2). Как уже отмечалось, магнитное поле, определяемое ур-ниями (2.9.2), принято называть магнитостатическим, а соответствующий раздел теории электромагнитного поля — *магнитостатикой*. Интегральные соотношения магнитостатики получаются из ур-ний (7.1.1), если в последних положить $\mathbf{j}=0$. При этом второе ур-ние остается без изменений, а первое принимает вид

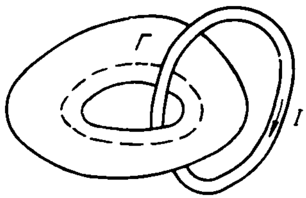


Рис. 7.2.1

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0. \tag{7.2.1}$$

Так как в рассматриваемом случае $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$, то по аналогии с электростатикой можно ввести в рассмотрение скалярную функцию $u^{\text{м}}$, называемую *магнитостатическим потенциалом* и связанную с вектором $\mathbf{H}$ соотношением

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} u^{\text{м}}. \tag{7.2.2}$$

В однородной среде магнитостатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 u^{\text{м}} = 0. \tag{7.2.3}$$

Разность значений магнитостатического потенциала между точками N_1 и N_2 можно по аналогии с (6.2.5) представить в форме

$$u_1^{\text{м}} - u_2^{\text{м}} = \int_{N_1}^{N_2} \mathbf{H} d\mathbf{l}. \tag{7.2.4}$$

На границе раздела двух сред с разными магнитными проницаемостями (μ_{a1} и μ_{a2}) должны выполняться общие граничные условия (см. гл. 3) для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$:

$$B_{1n} = B_{2n}, \ \mu_{a1} H_{1n} = \mu_{a2} H_{2n}; \tag{7.2.5}$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \ \mu_{a2} B_{1\tau} = \mu_{a1} B_{2\tau}. \tag{7.2.6}$$

Таким образом, напряженность магнитостатического поля $\mathbf{H}$ и напряженность электростатического поля $\mathbf{E}$ в области без зарядов удовлетворяют одинаковым уравнениям и однотипным граничным условиям. Следовательно, решение задач магнитостатики можно получить из решений аналогичных задач электростатики простой заменой в них $\mathbf{E}$ на $\mathbf{H}$ и ε_a на μ_a.

7.3. Магнитное поле и постоянный ток

В тех случаях, когда в рассматриваемой области имеется ток ($\mathbf{j} \neq 0$) или область охватывает ток (рис. 7.2.1), магнитостатический потенциал $u^{\text{м}}$ становится неоднозначной функцией. Разность его значений между точками N_1 и N_2 зависит от контура, по которому выполняется интегрирование в ф-ле (7.2.4), а именно, при каждом обходе контура вокруг тока I в положительном направлении (так, чтобы контур образовывал с током правовинтовую систему) значение интеграла в (7.2.4) возрастает на величину I.

Таким образом, магнитостатический потенциал $u^{\text{м}}$ не позволяет установить связь между стационарным магнитным полем и создающим его постоянным током. Для определения стационарного поля обычно вводят векторный потенциал $\mathbf{A}$ (разд. 5.2), связанный с векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ соотношениями:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{7.3.1}$$

Основные формулы для вектора $\mathbf{A}$, характеризующего стационарное магнитное поле, можно получить непосредственно из формул для электродинамического потенциала $\mathbf{A}$, выведенных в разд. 5.2, если в последних считать все величины не зависящими от времени.

Векторный потенциал стационарного поля удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \mathbf{j}, \tag{7.3.2}$$

вытекающему из (5.2.10), и условию калибровки

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{7.3.3}$$

которое следует из (5.2.9).

Если токи сосредоточены в ограниченной области V, то решение ур-ния (7.3.2) можно получить из ф-лы (5.2.25):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int\limits_V \frac{\mathbf{j}\, dV}{R}, \tag{7.3.4}$$

где R — расстояние от элемента dV до точки, в которой вычисляется потенциал.

Если токи распределены по поверхности S с плотностью $\mathbf{j}_S$, равенство (7.3.4) следует заменить выражением

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int\limits_S \frac{\mathbf{j}_S\, dS}{R}, \tag{7.3.5}$$

а в случае линейного тока I, протекающего по контуру Г, — формулой

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int\limits_\Gamma \frac{d\mathbf{l}}{R}. \tag{7.3.6}$$

В ф-лах (7.3.5) и (7.3.6) R — расстояние от элементов dS и $d\mathbf{l}$ соответственно до точки, в которой вычисляется потенциал.

Перейдем от векторного потенциала **A** к напряженности магнитного поля **H**. Предполагая, что пространство заполнено однородной изотропной средой, получаем

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_a}\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{R}\,dV. \tag{7.3.7}$$

Учитывая, что плотность тока $\mathbf{j}$ не зависит от координат точки, в которой вычисляется поле, и используя тождество $\operatorname{rot}(\psi, \mathbf{a})=\psi\operatorname{rot}\mathbf{a}+[\operatorname{grad}\psi, \mathbf{a}]$, преобразуем подынтегральное выражение в ф-ле (7.3.7):

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{R}=\left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}, \mathbf{j}\right]=\frac{1}{R^2}[\mathbf{j}, \mathbf{R}_0], \tag{7.3.8}$$

где $\mathbf{R}_0=\dfrac{\mathbf{R}}{R}$ — орт вектора, проведенного из dV в точку наблюдения.

Подставляя ф-лу (7.3.8) в (7.3.7), получаем

$$\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{R}_0]}{R^2}\,dV. \tag{7.3.9}$$

К аналогичным выражениям для вектора **H** приводят ф-лы (7.3.5) и (7.3.6) в случае поверхностных и линейных токов:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{[\mathbf{j}_S, \mathbf{R}_0]}{R^2}\,dS; \tag{7.3.10}$$

$$\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi}\int\limits_\Gamma \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{R}_0]}{R^2}. \tag{7.3.11}$$

Соотношения (7.3.9), (7.3.10) и (7.3.11) представляют собой закон Био—Савара в интегральной форме:

$$d\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi R^2}[d\mathbf{l}, \mathbf{R}_0]. \tag{7.3.12}$$

Закон Био—Савара характеризует магнитное поле $d\mathbf{H}$, создаваемое элементом тока $I\,d\mathbf{l}$. Связь ф-л (7.3.11) и (7.3.12) очевидна. Покажем, что поля, определяемые выражениями (7.3.9) и (7.3.10), также можно представить в виде суперпозиции элементарных полей $d\mathbf{H}$, определяемых соотношением (7.3.12), от отдельных «элементарных токов». Преобразуем подынтегральное выражение в ф-ле (7.3.9). Выберем в качестве элемента dV элемент токовой трубки длиной dl, ось которой направлена по току, а сечение равно dS. Обозначив через $I=j\,dS$ полный ток, протекающий по трубке, и учитывая множитель $\frac{1}{4\pi}$ перед интегралом, получим выражение

$$\frac{1}{4\pi}\frac{[\mathbf{j},\ \mathbf{R}_0]}{R^2}dV = \frac{I dS}{4\pi}\frac{[d\mathbf{l},\ \mathbf{R}_0]}{R^2} = \frac{I}{4\pi R^2}[d\mathbf{l},\ \mathbf{R}_0], \qquad (7.3.13)$$

полностью совпадающее с правой частью ф-лы (7.3.12).

Связь ф-л (7.3.10) и (7.3.12) доказывается аналогично.

Часто при решении практических задач для упрощения расчета предполагается, что ток вдоль одной из координатных осей остается неизменным, т. е. что линии тока по этой координате уходят в бесконечность. Такие предположения обычно делаются при определении поля, создаваемого линейным током, который протекает вдоль длинной нити, или токами, протекающими вдоль длинного цилиндра. Предположение о бесконечной протяженности линий тока не позволяет использовать ф-лы (7.3.4) — (7.3.6). Рассмотрим эти особые случаи.

Найдем магнитное поле и векторный потенциал бесконечной уединенной нити, обтекаемой постоянным током. Пусть эта нить совпадает с осью Z цилиндрической системы координат. Очевидно, что напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в этом случае имеет одну составляющую H_φ и не зависит от переменных z и φ. Выбирая в качестве контура Γ в ф-ле (7.1.1) окружность радиуса r, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси Z, получаем, что напряженность магнитного поля нити

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varphi}_0\frac{I}{2\pi r}. \qquad (7.3.14)$$

За направление тока в ф-ле (7.3.14) принято направление оси Z.

Векторный потенциал рассматриваемой нити должен иметь только z-ю составляющую ($\mathbf{A}=\mathbf{z}_0 A$), величина которой зависит от координаты r. Учитывая ф-лу (7.3.1) и расписывая $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ в цилиндрической системе координат, получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{\mu_a}\frac{dA}{dr},$$

откуда следует, что

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{\mu_a I}{2\pi r}. \qquad (7.3.15)$$

Интегрируя выражение (7.3.15) по r, находим

$$A = -\frac{\mu_a I}{2\pi}\ln r + C. \qquad (7.3.16)$$

Постоянную C в ф-ле (7.3.16) обычно полагают равной нулю. Тогда

$$\mathbf{A} = -\mathbf{z}_0\frac{\mu_a I}{2\pi}\ln r. \qquad (7.3.17)$$

От ф-лы (7.3.17) нетрудно перейти к выражению для потенциала, создаваемого токами, неизменными вдоль оси Z, которые протекают по цилиндру произвольного сечения S:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_a}{2\pi}\int\limits_S \mathbf{j}(\xi,\ \eta)\ln R dS, \qquad (7.3.18)$$

где $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ — расстояние от элемента dS, характеризуемого координатами ξ; η, до точки наблюдения $N(x;\ y)$ (рис. 6.6.2); $dS=d\xi d\eta$.

Если поле создано поверхностными токами, распределенными по некоторой цилиндрической поверхности S, образующие которой параллельны оси Z, а плотность поверхностных токов не зависит от координаты z, то векторный потенциал $\mathbf{A}$ выражается формулой

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_a}{2\pi}\int\limits_\Gamma \mathbf{j}_S \ln R dl, \qquad (7.3.19)$$

где Γ — линия пересечения поверхности S с плоскостью, перпендикулярной к оси Z, а R — расстояние от элемента dl до точки N, в которой вычисляется потенциал (рис. 6.6.3).

7.4. Энергия стационарного магнитного поля

Общее выражение для энергии магнитного поля (см. гл. 4), сосредоточенной в некотором объеме V, остается справедливым и в случае стационарных процессов:

$$W_м = \frac{1}{2}\int\limits_V \mu_a H^2 dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \mathbf{HB}\, dV. \qquad (7.4.1)$$

Формулу (7.4.1) можно преобразовать таким образом, чтобы магнитная энергия была выражена через токи, создающие магнитное поле. Для этого заменим в ф-ле (7.4.1) вектор $\mathbf{B}$ его представлением через векторный потенциал $\mathbf{A}$. Используя тождество $\mathbf{HB}=\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathrm{div}\,[\mathbf{A},\ \mathbf{H}]+\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, получаем

$$W_м = \frac{1}{2}\int\limits_V \mathrm{div}\,[\mathbf{A},\ \mathbf{H}]\, dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\, dV. \qquad (7.4.2)$$

Первый интеграл в ур-нии (7.4.2) преобразуем в поверхностный интеграл, используя теорему Остроградского—Гаусса, а во втором интеграле выразим $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ через плотность токов $\mathbf{j}$ с помощью равенства $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\mathbf{j}$. Тогда ур-ние (7.4.2) примет вид

$$W_м = \frac{1}{2}\oint\limits_S [\mathbf{A},\ \mathbf{H}]\, d\mathbf{S} + \frac{1}{2}\int\limits_V \mathbf{A}\,\mathbf{j}\, dV, \qquad (7.4.3)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V.

Выберем в качестве поверхности S сферу радиуса r и устремим r к бесконечности, т. е. распространим интегрирование в ур-нии (7.4.3) на все пространство.

Любая пространственно ограниченная система токов, как следует из ф-л (7.3.4)—(7.3.6) и (7.3.9)—(7.3.11), создает магнитное поле, напряженность **H** и векторный потенциал **A** которого при $r \to \infty$ убывает пропорционально $1/r^2$ и $1/r$ соответственно (или еще быстрее). При этом поверхность S возрастает пропорционально r^2. Следовательно, в пределе при $r \to \infty$ первый интеграл в ур-нии (7.4.3) будет равен нулю. В результате получим

$$W_м = \frac{1}{2} \int\limits_{V_0} \mathbf{A}\,\mathbf{j}\, dV. \qquad (7.4.4)$$

В отличие от исходного выражения (7.4.1), интегрирование в (7.4.4) распространяется лишь на ту область пространства V_0, в которой имеются токи. В ф-ле (7.4.4) можно исключить векторный потенциал **A**. Для этого нужно заменить вектор **A** его представлением в виде интеграла (7.3.4).

В случае линейных токов выражение для магнитной энергии упрощается. Рассмотрим сначала уединенный контур Г с током I. Формула (7.4.4) для этого контура принимает вид

$$W_м = \frac{I}{2} \oint\limits_{Г} \mathbf{A} d\mathbf{l}. \qquad (7.4.5)$$

Применим к интегралу в (7.4.5) теорему Стокса:

$$\oint\limits_{Г} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int\limits_{S} \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int\limits_{S} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi, \qquad (7.4.6)$$

где Φ — магнитный поток через поверхность S, опирающуюся на контур Г. Подставляя ф-лу (7.4.6) в (7.4.5), получаем

$$W_м = \frac{I\Phi}{2}. \qquad (7.4.7)$$

В случае N контуров ($Г_1$, $Г_2$, ..., $Г_N$) выражение для магнитной энергии (7.4.5) записывается следующим образом:

$$W_м = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n \oint\limits_{Г_n} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n \Phi_n, \qquad (7.4.8)$$

где Φ_n — магнитный поток, сцепленный с контуром $Г_n$, а I_n — ток в контуре $Г_n$.

В ф-ле (7.4.8) векторный потенциал **A** и поток Φ_n обусловлены не только током I_n, но и токами в остальных контурах. В силу принципа суперпозиции можно записать следующее равенство:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{A}_k, \qquad (7.4.9)$$

где $\mathbf{A}_k$ — векторный потенциал, создаваемый в рассматриваемой точке током I_k, протекающим в контуре $Г_k$.

Выделим в сумме (7.4.9) векторный потенциал $\mathbf{A}_n$, соответствующий току I_n:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_n+\sum_{k=1}^{N}\delta_{nk}\mathbf{A}_k, \text{ где } \delta_{nk}=\begin{cases}0 \text{ при } k=n;\\ 1 \text{ при } k\neq n\end{cases} \qquad (7.4.10)$$

и подставим ф-лу (7.4.10) в (7.4.8). В результате получим

$$W_{\text{м}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}I_n\oint_{\Gamma_n}\mathbf{A}_n d\mathbf{l}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}I_n\sum_{k=1}^{N}\delta_{nk}\oint_{\Gamma_n}\mathbf{A}_k d\mathbf{l}. \qquad (7.4.11)$$

Преобразовав интегралы в полученном выражении с помощью теоремы Стокса, перепишем его в виде

$$W_{\text{м}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}I_n\Phi_{nn}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}I_n\sum_{k=1}^{N}\delta_{nk}\Phi_{nk}, \qquad (7.4.12)$$

где Φ_{nk} — поток, сцепленный с контуром Γ_n, который обусловлен током I_k контура Γ_k.

Первое слагаемое в правой части ф-лы (7.4.12) определяет *собственную* энергию контуров системы а второе — *взаимную* энергию.

7.5. Индуктивность

Поток Φ, пронизывающий уединенный контур Γ, пропорционален току в этом контуре:

$$\Phi=LI. \qquad (7.5.1)$$

Коэффициент L зависит от конфигурации и размеров контура Γ и называется его *индуктивностью*. Индуктивность измеряется в генри *(гн)*. Из закона индукции Фарадея (2.2.1) и ф-лы (7.5.1) следует, что индуктивность уединенного контура численно равна величине эдс, наводимой в этом контуре при линейном изменении его тока на 1 *а* за 1 *сек*.

Подставляя ф-лу (7.5.1) в (7.4.7), получаем

$$W_{\text{м}}=\frac{LI^2}{2}. \qquad (7.5.2)$$

В случае N контуров поток Φ_{nk} пропорционален току I_k:

$$\Phi_{nk}=M_{nk}I_k. \qquad (7.5.3)$$

Коэффициент пропорциональности M_{nk} при $k\neq n$ называют *взаимной индуктивностью контуров* Γ_k и Γ_n, а коэффициент $M_{kk}=L_k$ — *собственной индуктивностью* контура Γ_k.

Коэффициент M_{nk} при $k \neq n$ можно определить следующим образом. Воспользовавшись ф-лами (7.4.6) и (7.3.6), представим выражение для потока Φ_{nk} в виде

$$\Phi_{nk} = \int\limits_{\Gamma_n} \mathbf{A}_k d\mathbf{l}_n = \frac{\mu_a}{4\pi} I_k \int\limits_{\Gamma_n}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}, \qquad (7.5.4)$$

где $d\mathbf{l}_n$ и $d\mathbf{l}_k$ — элементы контуров Γ_n, а R — расстояние между этими элементами.

Приравнивая правые части ф-л (7.5.4) и (7.5.3), получаем

$$M_{nk} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_n}\int\limits_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}. \qquad (7.5.5)$$

Из ф-лы (7.5.5) следует, что взаимная индуктивность контуров Γ_n и Γ_k зависит только от их формы и взаимного расположения и не изменяется при перестановке индексов (свойство взаимности):

$$M_{nk} = M_{kn}. \qquad (7.5.6)$$

Из закона индукции Фарадея (2.2.1) и ф-лы (7.5.3) следует, что взаимная индуктивность двух контуров численно равна эдс, наводимой в одном из них при линейном изменении тока в другом на 1 *а* за 1 *сек.*

Для определения собственной индуктивности контура ф-ла (7.5.5) непригодна. Обычно вместо нее используют соотношения (7.5.1) и (7.5.2).

Преобразуем выражение для магнитной энергии системы линейных токов (7.4.12), подставив в него ф-лу (7.5.3):

$$W_м = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} L_n I_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{nk} M_{nk} I_n I_k; \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = n; \\ 1 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

Таким образом, для определения магнитной энергии системы линейных токов достаточно знать собственные и взаимные индуктивности контуров и токи в них.

7.6. Примеры расчета магнитных полей

ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА

Вычислим магнитное поле бесконечно длинного цилиндрического проводника радиуса a. Будем считать для простоты, что ток I распределен равномерно по сечению проводника. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, ось Z которой совпадает с осью проводника. Ввиду симметрии задачи поле не зависит от угла φ. Поле также не зависит от z, поэтому для определения вектора $\mathbf{H}$ можно использовать закон Ампера [первое ур-ние

(7.1.1)]. Выбирая в качестве контура Г окружность радиуса $r \geqslant a$, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси Z с центром на оси Z, получаем

$$\mathbf{H} = \varphi_0 \frac{I}{2\pi r} \text{ при } r \geqslant a. \tag{7.6.1}$$

Для определения магнитного поля внутри провода выберем в качестве контура Г окружность радиуса $r<a$. Учитывая, что ток, охватываемый контуром Г, в этом случае равен $I\left(\frac{r}{a}\right)^2$, получаем

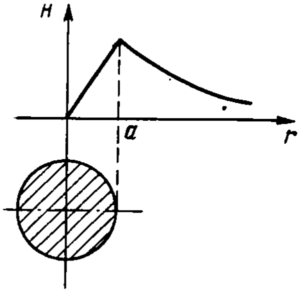


Рис. 7.6.1

$$\mathbf{H} = \varphi_0 \frac{Ir}{2\pi a^2} \text{ при } r \leqslant a. \tag{7.6.2}$$

Таким образом, поле цилиндрического проводника в области $0 \leqslant r \leqslant a$ линейно возрастает от нуля до некоторого максимального значения (рис. 7.6.1), равного $I/2\pi a$, а при $r \geqslant a$ совпадает с полем прямолинейного тока величиной I, определяемым ф-лой (7.3.14).

Вычислим магнитную энергию $W_м^{(i)}$, сосредоточенную внутри проводника на участке единичной длины. Используя определение магнитной энергии (7.4.1) и выражение (7.6.2), получаем

$$W_м^{(i)} = \frac{\mu_а I^2}{16\pi}. \tag{7.6.3}$$

По аналогии с ф-лой (7.5.2) величину

$$L_i = \frac{2W_м^{(i)}}{I^2} \tag{7.6.4}$$

называют *внутренней индуктивностью* на единицу длины цилиндрического проводника. Из ф-лы (7.6.3) получаем

$$L_i = \frac{\mu_а}{8\pi}. \tag{7.6.5}$$

Таким образом, внутренняя индуктивность на единицу длины цилиндрического проводника при равномерном распределении тока по его сечению не зависит от диаметра проводника.

ПОЛЕ КОАКСИАЛЬНОГО КАБЕЛЯ

Пусть ток, протекающий по внутреннему проводу коаксиального кабеля (рис. 7.6.2), равен I, а ток внешнего проводника $-I$. Распределение тока по сечениям проводников будем считать равномерным. Поступая так же, как и в случае уединенного проводника, придем к следующим выражениям для напряженности магнитного поля:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H} &= \varphi_0 \frac{Ir}{2\pi a^2} \text{ при } 0 \leqslant r \leqslant a_1 \\ \mathbf{H} &= \varphi_0 \frac{I}{2\pi r} \text{ при } a_1 \leqslant r \leqslant a_2 \\ \mathbf{H} &= \varphi_0 \frac{I}{2\pi r} \frac{a_3^2 - r^2}{a_3^2 - a_2^2} \text{ при } a_2 \leqslant r \leqslant a_3 \\ \mathbf{H} &= 0 \text{ при } r \geqslant a_3 \end{aligned}\right\}. \tag{7.6.6}$$

Радиусы проводников a_1, a_2 и a_3 указаны на рис. 7.6.2. Там же приведена кривая, характеризующая зависимость напряженности магнитного поля коаксиального кабеля от координаты r.

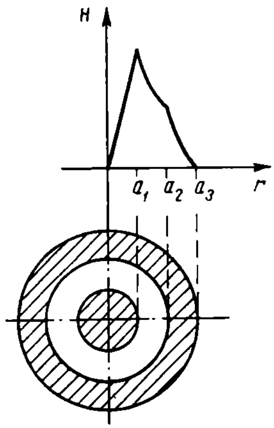


Рис. 7.6.2

Для вычисления индуктивности L_1 на единицу длины коаксиального кабеля представим ее в виде суммы трех слагаемых:

$$L_1 = L_i' + L_i'' + L_{\text{в}}, \tag{7.6.7}$$

где L_i', L_i'' — внутренние индуктивности на единицу длины центрального и наружного проводников соответственно, а $L_{\text{в}}$ — так называемая внешняя индуктивность на единицу длины коаксиального кабеля, определяемая магнитным потоком между проводниками.

Величины L_i' и L_i'' вычисляются по ф-ле (7.6.4). Опуская очевидные преобразования, выпишем окончательные результаты:

$$L_i' = \frac{\mu_a}{8\pi}; \tag{7.6.8}$$

$$L_i'' = \frac{\mu_a}{2\pi\left(a_3^2 - a_2^2\right)}\left(\frac{a_3^4}{a_3^2 - a_2^2}\ln\frac{a_3}{a_2} - \frac{3a_3^2 - a_2^2}{4}\right), \tag{7.6.9}$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость проводника. Как следует из ф-лы (7.6.8), внутренняя индуктивность на единицу длины центрального проводника коаксиального кабеля совпадает с внутренней индуктивностью на единицу длины уединенного цилиндрического проводника [см. ф-лу (7.6.5)].

Внешнюю индуктивность $L_{\text{в}}$ определим в соответствии с ф-лой (7.5.2) следующим образом:

$$L_{\text{в}} = 2W_{\text{м}}^{(\text{в})}/I^2 \tag{7.6.10}$$

где $W_м^{(в)}$ — энергия магнитного поля, сосредоточенного в зазоре между проводниками, приходящаяся на единицу длины коаксиального кабеля. Вычисляя $W_м^{(в)}$ по ф-ле (7.4.1)

$$W_м^{(в)} = \frac{1}{2}\int\limits_V \mu_0 H^2 dV = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a_1}^{a_2} \mu_0 H^2 r dr = \mu_0 \frac{I^2}{4\pi} \ln\frac{a_2}{a_1},$$

получаем [1])

$$L_в = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\frac{a_2}{a_1}. \tag{7.6.11}$$

ПОЛЕ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим сначала поле двух линейных противоположно направленных токов I и $-I$, т. е. токов, протекающих по бесконечно тонким прямолинейным нитям, расположенным на расстоянии $2h$ друг от друга (рис. 7.6.3). Магнитные силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных оси Z, и определяются (разд. 1.4) уравнением

$$H_y dx - H_x dy = 0. \tag{7.6.12}$$

Векторный потенциал имеет только составляющую, параллельную оси Z, и в силу принципа суперпозиции равен сумме потенциалов каждого из токов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 A = -\mathbf{z}_0 \frac{\mu_а I}{2\pi}(\ln R_1 - \ln R_2) = \mathbf{z}_0 \frac{\mu_а I}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}, \tag{7.6.13}$$

где $R_1 = \sqrt{(x-h)^2 + y^2}$; $R_2 = \sqrt{(x+h)^2 + y^2}$.

Учитывая соотношения (7.3.1), перепишем ур-ние (7.6.12) в виде

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0. \tag{7.6.14}$$

Левая часть выражения (7.6.14) является полным дифференциалом функции A, т. е. это выражение эквивалентно равенству $dA=0$. Следовательно, векторный потенциал **A** не изменяется вдоль магнитной силовой линии. Это означает, что магнитные силовые линии совпадают с линиями пересечения поверхностей равного векторного потенциала с плоскостями, перпендикулярными оси Z. Поверхности, на которых векторный потенциал (7.6.13) имеет постоянное значение, определяются из условия

$$\frac{R_2}{R_1} = \text{const}. \tag{7.6.15}$$

---

[1]) Предполагается, что магнитная проницаемость среды, заполняющей коаксиальный кабель, равна μ_0.

Такому же условию удовлетворяют эквипотенциальные поверхности системы двух параллельных противоположно заряженных нитей (6.7.22). Следовательно, поверхности равного векторного потенциала являются поверхностями круговых цилиндров, параллельных оси Z, местоположение осей и радиусы которых определяются ф-лами (6.7.24) и (6.7.25), а магнитные силовые линии образуют семейство окружностей, возникающих при пересечении

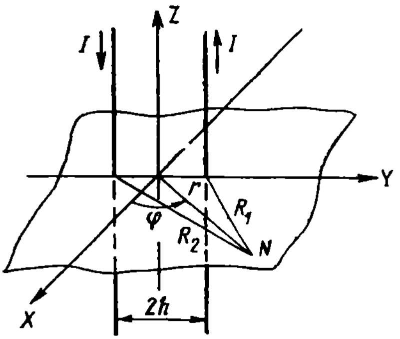


Рис. 7.6.3

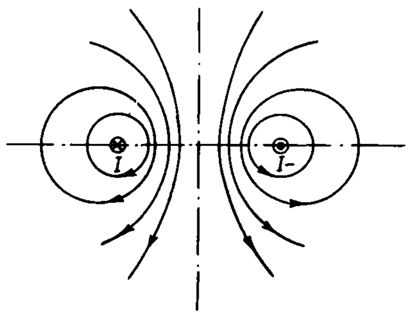


Рис. 7.6.4

этих цилиндрических поверхностей с плоскостями, перпендикулярными оси Z (рис. 7.6.4).

В случае реальной двухпроводной линии проводники имеют круговые сечения конечных размеров. Однако, если магнитная проницаемость проводов равна магнитной проницаемости внешней среды, поле *вне* проводов не отличается от поля линейных токов, совпадающих с геометрическими осями проводов. Это объясняется тем, что постоянное магнитное поле одного провода не наводит в другом эдс и, следовательно, не изменяет распределения токов в нем. Поэтому все сказанное выше применимо к реальной двухпроводной линии.

Вычислим индуктивность на единицу длины двухпроводной линии. Для простоты ограничимся случаем тонких проводов, когда расстояние между осями проводов $2h$ велико по сравнению с их радиусом a. Воспользуемся ф-лой (7.5.1). В рассматриваемом случае $2h \gg a$. Поэтому магнитный поток, сцепленный с двухпроводной линией, приходящийся на единицу ее длины, практически равен магнитному потоку, пронизывающему прямоугольный контур $ABCD$ (рис. 7.6.5), расположенный в плоскости XOZ, проходящей через оси проводов. Стороны AB и CD, параллельные оси Z, имеют единичную длину и лежат на поверхности проводов ($x=a-h$ на AB и $x=h-a$ на CD соответственно). Используя соотношение (7.6.13) и учитывая (7.3.1), находим значения вектора **B** в плоскости XOZ:

$$\mathbf{B}=\mathbf{y}_0\frac{\mu_a I}{2\pi}\,\frac{h}{h^2-x^2}\ \text{при}\ |x|\leqslant h-a\ \text{и}\ |x|\geqslant h+a. \qquad (7.6.16)$$

Вычислим магнитный поток, пронизывающий контур $ABCD$:

$$\Phi=\frac{\mu_a I}{\pi}\ln\frac{2h-a}{a}\approx\frac{\mu_a I}{\pi}\ln\frac{2h}{a}. \qquad (7.6.17)$$

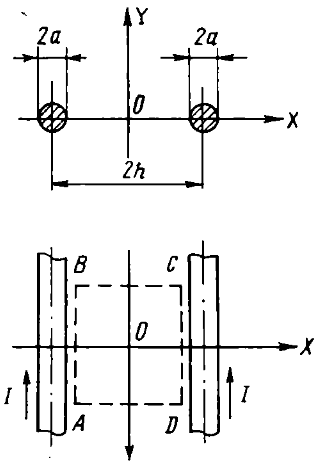


Рис. 7.6.5

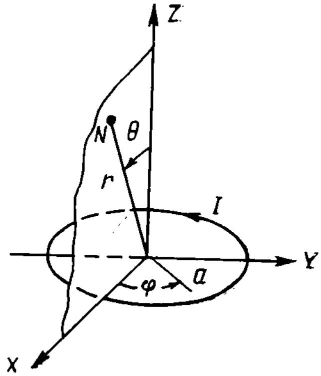


Рис. 7.6.6

Следовательно, индуктивность на единицу длины двухпроводной линии в случае $2h\gg a$ определяется выражением

$$L_1\approx\frac{\mu_a}{\pi}\ln\frac{2h}{a}. \qquad (7.6.18)$$

ПОЛЕ КРУГОВОГО КОНТУРА С ТОКОМ

Вычислим поле линейного тока I, образующего круговой виток радиуса a (рис. 7.6.6). Введем сферическую систему координат r, θ, φ, полярная ось которой совпадает с осью симметрии, а начало координат — с центром витка. Благодаря симметрии задачи начало отсчета угла φ можно выбрать произвольно. Будем отсчитывать его от плоскости, проходящей через полярную ось и точку наблюдения $N(r,\ \theta,\ 0)$, в которой вычисляется поле. Для определения векторного потенциала воспользуемся выражением (7.3.6). Проектируя вектор $\mathbf{dl}$ на направления $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\theta}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$, соответствующие точке наблюдения $N(r,\ \theta,\ 0)$, получаем

$$\mathbf{dl}=[-(\mathbf{r}_0\sin\theta+\boldsymbol{\theta}_0\cos\theta)\sin\varphi+\boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi]\,a\,d\varphi.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a Ia}{4\pi}\left\{-(\mathbf{r}_0\sin\theta+\mathbf{\Theta}_0\cos\theta)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{R}+\boldsymbol{\varphi}_0\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{R}\right\} =$$

$$= \boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu_a Ia}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{R} = \boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu_a Ia}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{R}, \qquad (7.6.19)$$

где $R=\sqrt{r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\varphi}$.

Переходя в интеграле (7.6.19) к новой переменной интегрирования $\beta=\frac{1}{2}(\pi-\varphi)$ и вводя обозначение $b^2=\frac{4ar\sin\theta}{r^2+a^2+2ra\sin\theta}$; $0\leqslant b\leqslant 1$, получаем

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu_a I}{2\pi\, b}\sqrt{\frac{a}{r\sin\theta}}\,[(2-b^2)K(b)-2E(b)], \qquad (7.6.20)$$

где $K(b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\beta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\beta}}$; $E(b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-b^2\sin^2\beta}\,d\beta$

— полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Эллиптические интегралы не выражаются через элементарные функции, однако они подробно изучены, и имеются таблицы их значений в зависимости от величины b, называемой *модулем* этих интегралов.

Для вычисления вектора **H** воспользуемся соотношением (7.3.1). В сферической системе координат выражение для rot **A** имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{\mathbf{r}_0}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+\frac{\mathbf{\Theta}_0}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]+$$

$$+\frac{\boldsymbol{\varphi}_0}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]. \qquad (7.6.21)$$

Так как векторный потенциал **A** имеет только одну составляющую $\mathbf{A}=\boldsymbol{\varphi}_0 A$, не зависящую от угла φ, из ф-лы (7.6.21) следует, что напряженность магнитного поля имеет две составляющие H_r и H_θ, связанные соотношениями:

$$H_r=\frac{1}{\mu_a r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A); \qquad (7.6.22)$$

$$H_\theta=-\frac{1}{\mu_a r}\frac{\partial}{\partial r}(rA). \qquad (7.6.23)$$

При дифференцировании полных эллиптических интегралов $K(b)$ и $E(b)$, входящих в ф-лу (7.6.20), удобно пользоваться формулами:

$$\frac{dK(b)}{db}=\frac{E(b)}{b(b')^2}-\frac{K(b)}{b}; \quad \frac{dE(d)}{db}=\frac{E(b)-K(b)}{b},$$

где $b'=\sqrt{1-b^2}$ — так называемый *дополнительный модуль* эллиптических интегралов.

Отметим, что выведенные формулы можно использовать и в случае кольцевого проводника конечной толщины, если радиус витка и расстояние до точки, в которой вычисляется поле, велики по сравнению с поперечными размерами сечения проводника.

ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

Рассмотрим поле кругового витка, считая, что точки наблюдения находятся на больших по сравнению с радиусом витка расстояниях от его центра ($r\gg a$). В этом случае выражение для векторного потенциала (7.6.19) существенно упрощается. Разложим входящую под знак интеграла величину $1/R$ в ряд по степеням отношения a/r и пренебрежем членами порядка $(a/r)^2$ по сравнению с единицей:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r\,[1+(a/r)^2-2\,(a/r)\sin\theta\cos\varphi]^{1/2}}\approx\frac{1}{r\,[1-(a/r)\sin\theta\cos\varphi]}\approx$$

$$\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi\right). \tag{7.6.24}$$

Подставляя ф-лу (7.6.24) в (7.6.19), получаем

$$\mathbf{A}\approx\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu_a Ia}{4\pi r}\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi\right)\cos\varphi\,d\varphi=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu_a Ia^2}{4\pi r^2}\sin\theta. \tag{7.6.25}$$

Напряженность магнитного поля имеет две составляющие H_r и H_θ, определяемые соотношениями (7.6.22) и (7.6.23). Выполняя дифференцирование, получаем:

$$H_r=\frac{Ia^2}{4r^3}\cos\theta;\quad H_\theta=\frac{Ia^2}{4r^3}\sin\theta, \tag{7.6.26}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{H}=\frac{Ia^2}{4r^3}(\mathbf{r}_0\,2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\sin\theta). \tag{7.6.27}$$

Введя обозначение

$$p_м=I\pi a^2\mu_a, \tag{7.6.28}$$

перепишем ф-лу (7.6.27) в виде

$$\mathbf{H}=\frac{p_м}{4\pi\mu_a r^3}(\mathbf{r}_0\,2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\sin\theta). \tag{7.6.29}$$

В области, где справедливо равенство (7.6.29), плотность тока проводимости равна нулю ($\mathbf{j}=0$), а любой принадлежащий ей контур не охватывает тока, т. е. выполняются ур-ния (2.9.2). Следовательно, поле, определяемое ф-лой (7.6.29), является магнитостатическим. Каждой магнитостатической задаче можно сопоставить некоторую электростатическую задачу, для перехода к которой достаточно все магнитные величины заменить на соответствующие электрические (разд. 7.2). Заменим в ф-ле (7.6.29) **H** на **E**, μ_a на ε_a, а вместо $p_м$ введем (пока формально) величину p, равную абсолютному значению момента электрического диполя ($p=ql$). После этих преобразований ф-ла (7.6.29) будет полностью совпадать с выражением (6.7.13) для напряженности электростатического поля, создаваемого электрическим диполем с моментом $\mathbf{p}=\mathbf{z}_0 p$. Следовательно, выражение (7.6.29) является магнитостатическим аналогом ф-лы (6.7.13).

По аналогии с электрическим диполем можно ввести понятие о *магнитном диполе* (т. е. о системе двух *магнитных зарядов* $+q^м$ и $-q^м$, расположенных на расстоянии l друг от друга), поле которого определяется выражением (7.6.29). При этом входящий в (7.6.29) параметр $p_м$ равен абсолютной величине момента магнитного диполя

$$p_м = q^м l. \tag{7.6.30}$$

Момент магнитного диполя $\mathbf{p}_м$, как и момент электрического диполя $\mathbf{p}$, является векторной величиной:

$$\mathbf{p}_м = q^м \mathbf{l} = p_м \mathbf{l}_0, \tag{7.6.31}$$

где $\mathbf{l}$ — вектор, направленный от отрицательного магнитного заряда ($-q^м$) к положительному ($+q^м$), по абсолютной величине равный расстоянию между зарядами l, а $\mathbf{l}_0$ — орт вектора $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}=l\mathbf{l}_0$).

Подчеркнем, что *свободных магнитных зарядов* в природе не существует. Это следует из основных законов электродинамики, в частности, из ур-ния (2.4.1). Однако введение *связанных магнитных зарядов*, удовлетворяющих равенству (2.4.1), часто оказывается удобным при анализе электромагнитных полей.

Соотношение (7.6.29) было получено из выражения (7.6.27) для магнитного поля кругового витка (рамки) с током I. Следовательно, рамка с током I, расположенная в плоскости $z=0$ симметрично относительно оси Z, создает на больших по сравнению с его радиусом расстояниях такое же поле, как магнитный диполь с моментом

$$\mathbf{p}_м = \mathbf{z}_0 \mu_a \pi a^2 I, \tag{7.6.32}$$

помещенный в начале координат.

Выражение (7.6.32) можно представить в виде

$$\mathbf{p}_м = \mathbf{n}_0 \mu_a S I, \tag{7.6.33}$$

где S — площадь рамки, а $\mathbf{n}_0$ — орт нормали к плоскости рамки (рис. 1.2.3).

Соотношение (7.6.33) справедливо для плоских рамок произвольной формы.

Отметим, что вектор $\mathbf{p}_м$ связан с введенным ранее (см. разд. 1.2) магнитным моментом рамки $\mathbf{m}$ соотношением

$$\mathbf{p}_м = \mu_а \mathbf{m}. \qquad (7.6.34)$$

7.7. Электрическое поле постоянного тока

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ, ОКРУЖАЮЩЕМ ПРОВОДНИКИ С ПОСТОЯННЫМИ ТОКАМИ

Постоянный ток, помимо магнитного поля, создает также электрическое поле. Рассмотрим его основные свойства.

Электрическое поле в изотропном диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами, описывается системой уравнений (2.9.3б). Следовательно, оно является потенциальным, и для его характеристики можно ввести скалярный потенциал u, связанный с вектором $\mathbf{E}$ соотношением (6.2.1). Если рассматриваемая среда является однородной ($\varepsilon_а = \mathrm{const}$) и в ней отсутствуют свободные заряды ($\rho = 0$), то потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа (6.2.7), а система уравнений (2.9.3б) принимает вид:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0; \ \mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0; \ \mathbf{D} = \varepsilon_а \mathbf{E}. \qquad (7.7.1)$$

Таким образом, уравнения, описывающие электрическое поле постоянного тока в идеальном диэлектрике, окружающем проводники, совпадают с уравнениями, описывающими электростатическое поле. Однако электрическое поле постоянного тока отличается от электростатического. Электрическое поле постоянного тока существует и в проводящей среде. В этом случае вектор $\mathbf{E}$ связан с вектором $\mathbf{j}$ соотношением $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

Это приводит к изменению граничных условий на поверхности проводника по сравнению с граничными условиями в случае электростатики. Так как электрический ток в проводнике создает падение потенциала, то поверхность проводника уже не будет эквипотенциальной и на ней появится отличная от нуля касательная составляющая напряженности электрического поля. При определении поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами, это в большинстве случаев несущественно, так как касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$ пренебрежимо мала по сравнению с нормальной составляющей.

Рассмотрим в качестве примера соотношение между нормальной и касательной составляющими вектора $\mathbf{E}$ в воздухе у поверхности проводов двухпроводной линии передачи (рис. 7.6.5). Пусть проводники расположены на расстоянии $2h=10$ *см* друг от друга при разности потенциалов между ними в 200 *в* и плотностью тока $j=2$ *а/мм²*. Проводники предполагаются выполненными из меди ($\sigma=5{,}65\cdot10^7$ *сим/м*). Касательную составляющую вектора **E** определим из закона Ома: $E_\tau=j/\sigma=0{,}035$ *в/м*. Для оценки величины нормальной составляющей вектора **E** найдем отношение разности потенциалов между проводами к расстоянию $2h$ между ними: $\Delta u/2h=2000$ *в/м*. В действительности поле между проводами является неоднородным, причем наиболее сильное поле сосредоточено около проводов, поэтому истинное значение E_n будет больше $\Delta u/2h$. Отношение E_n к E_τ, таким образом, даже для рассматриваемого случая линии низкого напряжения имеет порядок 10^5. Это позволяет в большинстве практически интересных случаев при вычислении поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами, пренебречь касательной составляющей, т. е. считать, что граничные условия являются такими же, как в электростатике, и для определения поля использовать решения соответствующих электростатических задач.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Если в рассматриваемой области отсутствуют сторонние эдс, то электрическое поле постоянного тока в проводящей среде описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0;\quad \mathbf{j}=\sigma\mathbf{E};\quad \operatorname{div}\mathbf{j}=0. \tag{7.7.2}$$

Соответствующие интегральные соотношения имеют вид

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0;\qquad \oint_S \mathbf{j}d\mathbf{S}=0. \tag{7.7.3}$$

Второе уравнение системы (7.7.3) является следствием закона сохранения заряда (2.5.2), так как в случае стационарного электромагнитного поля $\partial Q/\partial t$. Из этого уравнения следует, что на границе раздела двух сред с различными удельными проводимостями нормальная составляющая вектора **j** является непрерывной:

$$j_{1n}=j_{2n}, \tag{7.7.4}$$

а касательные составляющие вектора **j** связаны соотношением¹)

$$j_{1\tau}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,j_{2\tau}. \tag{7.7.5}$$

В ряде практически важных случаев требуется найти токи, которые возникают в среде, изолирующей проводники друг от друга (токи утечки). Удельная проводимость изоляции во много раз

---

¹) Равенство (7.7.4) выводится так же, как граничное условие для нормальной составляющей вектора **B** (разд. 3.3), а ф-ла (7.7.5) является следствием соотношения (3.2.15): $E_{1\tau}=E_{2\tau}$.

меньше удельной проводимости металла. Поэтому вектор плотности тока утечки можно считать перпендикулярным к поверхности проводников. Действительно, пусть угол между вектором j и нормалью к поверхности раздела в первой среде (в изоляции) равен θ_1, а второй (в металле) — θ_2. Из ф-л (7.7.4) и (7.7.5) получается следующее соотношение между углами θ_1 и θ_2:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\operatorname{tg}\theta_2. \tag{7.7.6}$$

Так как отношение σ_1/σ_2 очень мало (например, для кабельной бумаги и меди оно примерно равно $1{,}7\cdot 10^{-21}$), угол θ_1 можно считать равным нулю при любом угле θ_2.

АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Из ур-ний (7.7.3) следует, что электрическое поле постоянного тока является потенциальным, т. е. вектор **E** можно представить в виде $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$. В случае однородной проводящей среды ($\sigma = \mathrm{const}$) условие $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ эквивалентно условию $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Следовательно, в однородной проводящей среде потенциал u электрического поля постоянного тока в области, в которой отсутствуют сторонние эдс, удовлетворяет уравнению Лапласа ($\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$, т. е. $\Delta u = 0$). Если на границе рассматриваемой области значения потенциала u известны, то задача определения электрического поля постоянного тока в однородной проводящей среде сводится к нахождению потенциала u, удовлетворяющего уравнению Лапласа (6.2.7) и заданным граничным условиям. К такой же задаче сводится задача определения электростатического поля в однородном диэлектрике, когда внутри рассматриваемой области отсутствуют заряды. Как известно (разд. 6.6), такая задача имеет единственное решение. Следовательно, электрическое поле постоянного тока в однородной проводящей среде аналогично электростатическому полю в однородном диэлектрике, если конфигурация рассматриваемых областей в обоих случаях одинакова и, кроме того, одинаковы граничные условия для потенциалов. Эта аналогия позволяет использовать известные решения электростатических задач для нахождения электрического поля постоянного тока и наоборот.

В качестве примера применения указанной аналогии вычислим сопротивление R между электродами, находящимися в однородной проводящей среде. Пусть потенциалы электродов равны U_1 и U_2, причем $U_1 > U_2$. Согласно закону Ома

$$R = \frac{U_1 - U_2}{I}, \tag{7.7.7}$$

где I — ток между электродами. Очевидно,

$$I = \left|\oint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}\right|, \tag{7.7.8}$$

где S — замкнутая поверхность, охватывающая один из электродов. Подставляя ф-лу (7.7.8) в (7.7.7) и учитывая, что $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, получаем

$$R = \frac{U_1 - U_2}{\sigma \left| \oint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \right|}. \tag{7.7.9}$$

Для определения величины $\left| \oint\limits_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} \right|$ рассмотрим другую задачу. Пусть такие же электроды находятся в однородном идеальном диэлектрике, характеризуемом диэлектрической проницаемостью ε_a. Поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность S при этом, согласно теореме Гаусса, равен

$$\oint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_a}, \tag{7.7.10}$$

где Q — заряд электрода, находящегося внутри поверхности S.

Если потенциалы электродов в этом случае также равны U_1 и U_2, то на основе указанной аналогии можно утверждать, что интеграл $\oint\limits_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S}$ в ф-лах (7.7.9) и (7.7.10) имеет одно и то же значение. Так как из определения емкости C системы двух проводников [ф-ла (6.8.1)] следует, что $Q=C|U_1-U_2|$, то

$$\left| \oint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \right| = \frac{C(U_1 - U_2)}{\varepsilon_a}. \tag{7.7.11}$$

Подставляя ф-лу (7.7.11) в (7.7.9), получаем

$$R = \frac{\varepsilon_a}{\sigma C}. \tag{7.7.12}$$

Используем ф-лу (7.7.12) для определения сопротивления утечки изоляции коаксиального кабеля. Емкость на единицу длины коаксиального кабеля или, что то же самое, емкость на единицу длины цилиндрического конденсатора (рис. 6.8.2) определяется ф-лой (6.8.7). Подставляя эту ф-лу в (7.7.12), получаем, что сопротивление утечки на единицу длины коаксиального кабеля

$$R_1 = \frac{\ln(a_2/a_1)}{2\pi\sigma}, \tag{7.7.13}$$

где σ — удельная проводимость изоляции кабеля; a_1 — радиус внутреннего провода кабеля, а a_2 — внутренний радиус оболочки кабеля (рис. 6.8.2).

2. Излучение и распространение электромагнитных волн

ГЛАВА 8

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

8.1. Простейшие излучатели

Возможность излучения и распространения электромагнитной энергии в пространстве, по существу, непосредственно следует из положения Максвелла, согласно которому электрический ток может циркулировать в диэлектрике и свободном пространстве в виде тока смещения. При этом ток смещения, как и ток проводимости, создает вокруг себя магнитное поле. Своим предположением, основанным на опытах Фарадея, Максвелл как бы приписал диэлектрику и свободному пространству свойства проводника — проводника тока смещения. Распространение в пространстве тока смещения связано с распространением электромагнитной энергии[1]), так как соответствующее этому току поле является носителем электромагнитной энергии. Таким образом, любая электрическая схема, способная создавать в пространстве токи смещения, является излучателем электромагнитной энергии, или, как принято говорить, излучателем электромагнитных волн. Рассмотрим, например, конденсатор, питаемый источником переменной эдс (рис. 8.1.1). В пространстве между обкладками конденсатора циркулирует ток смещения. Так как пространство, окружающее конденсатор, обладает способностью проводить ток смещения, то последний должен ответвляться в него так же, как ответвлялся бы ток проводимости, если бы конденсатор находился в пространстве, обладающем проводимостью. Процесс ответвления токов смещения и, следовательно, электромагнитной энергии в пространство, окружающее конденсатор, является с точки зрения теории Максвелла таким же естественным, как и процесс ответвления энергии в провода, присоединенные к какому-либо источнику эдс.

---

[1]) Принципиальная возможность ответвления (излучения) электромагнитной энергии в пространство доказывается теоремой Пойнтинга (см. разд. 4.1), являющейся прямым следствием уравнений Максвелла.

Практически в качестве излучателей электромагнитных волн (антенн) применяют схемы, удовлетворяющие определенным требованиям. Основным требованием, предъявляемым к практическому излучателю, является минимум связанной с ним энергии, т. е. не излучаемой в окружающее пространство (ее называют реактивной). Чем больше связанная (реактивная) энергия, тем больше потери и у́же полоса пропускания антенны.

Показанная на рис. 8.1.1 схема излучателя в виде конденсатора из двух параллельных пластин может служить примером неудачной в указанном смысле схемы. В этой схеме связанная часть энергии относительно велика. Энергия в основном сосредоточена в пространстве между пластинами. Связанная часть энергии уменьшается при повороте пластин конденсатора и расположении их так, как показано на рис. 8.1.2.

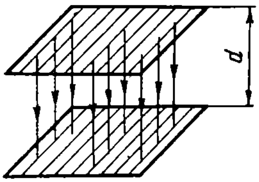


Рис. 8.1.1

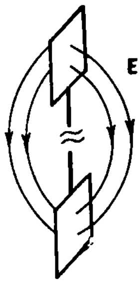


Рис. 8.1.2

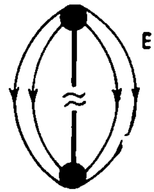


Рис. 8.1.3

Один из вариантов схемы, обеспечивающей интенсивное излучение при сравнительно малой связанной части энергии, показан на рис. 8.1.3. Эта схема, в которой пластины заменены тонкими проводами с шарами на концах, была впервые осуществлена Генрихом Герцем и известна под названием диполя Герца.

Инициатива и практическое решение вопроса применения радиоволн в качестве средства связи принадлежит А. С. Попову, который впервые в мире осуществил сеанс радиосвязи. Им же были предложены и осуществлены передающие и приемные антенны в виде несимметричных вибраторов.

8.2. Элементарный электрический вибратор

Элементарным электрическим вибратором называют короткий по сравнению с длиной волны провод, по всей длине которого ток имеет постоянные амплитуду и фазу (рис. 8.2.1). Этот вибратор является, по существу, идеализированной, удобной для анализа излучающей системой, так как практически создание вибратора с неизменными по всей длине амплитудой и фазой тока невозможно. Однако вибратор Герца (рис. 8.1.3) оказывается весьма близким по своим свойствам к элементарному электрическому вибратору. Благодаря имеющимся на его концах металлическим шарам, которые обладают значительной емкостью, амплитуда тока слабо изменяется вдоль провода.

Изучение элементарного вибратора крайне важно для понимания процесса излучения антенн. Любое проводящее тело, обтекаемое токами, можно считать как бы состоящим из множества элементарных электрических вибраторов, а при определении поля, создаваемого этими токами, воспользоваться принципом суперпозиции, т. е. рассматривать его как сумму полей элементарных вибраторов.

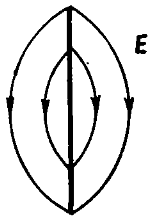


Рис. 8.2.1

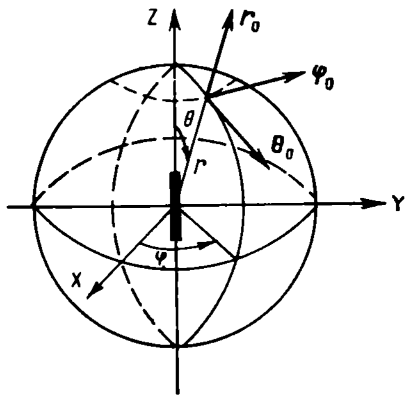


Рис. 8.2.2

Перейдем к анализу поля элементарного электрического вибратора, расположенного в безграничной однородной изотропной непроводящей среде, характеризуемой параметрами ε_a, μ_a. Ток в вибраторе будем считать известным, т. е. сторонним током, изменяющимся по закону $I^{\text{ст}}=I^{\text{ст}}_m \cos \omega t$, где $I^{\text{ст}}_m$ — его амплитуда. Так как поле, создаваемое вибратором, в рассматриваемом случае является монохроматическим, удобно воспользоваться методом комплексных амплитуд. Вместо тока $I^{\text{ст}}$ введем комплексную величину $\dot{I}^{\text{ст}}=I^{\text{ст}}_m e^{i\omega t}$, связанную с $I^{\text{ст}}$ соотношением $I^{\text{ст}}=\operatorname{Re}\dot{I}^{\text{ст}}$.

Таким образом, задача сводится к нахождению поля по заданному распределению тока. Сначала найдем векторный потенциал $\dot{\mathbf{A}}$. Введем сферическую систему координат r, θ, φ, полярная ось которой (ось Z) совпадает с осью вибратора, а начало координат находится в его центре (рис. 8.2.2).

Векторный потенциал монохроматического поля $\dot{\mathbf{A}}$ при произвольном распределении токов в объеме V определяется ф-лой (5.3.8). Входящие в нее параметры $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ в рассматриваемом случае являются действительными числами: $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_a$; $\tilde{\mu}=\mu_a$. Разобьем интегрирование по объему V на интегрирование по площади поперечного сечения вибратора ΔS и по его длине l. Считая, что сечение вибратора ΔS очень мало и учитывая, что $\int\limits_{\Delta S} \mathbf{j}_m^{\text{ст}}\, dS = \mathbf{z}_0 I_m^{\text{ст}}$, представим ф-лу (5.3.8) в виде

$$\dot{\mathbf{A}}_m' = \mathbf{z}_0 \frac{\mu_a}{4\pi} I_m^{\text{ст}} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{e^{-ikR}}{R}\, d\xi, \tag{8.2.1}$$

где $R = \sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta}$, а $-\frac{l}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{l}{2}$ (рис. 8.2.3).

При вычислении интеграла (8.2.1) ограничимся случаем, когда расстояние от вибратора до точек, в которых определяется поле, велико по сравнению с длиной вибратора $r \gg l$. Тогда в знаменателе подынтегрального выражения величину R можно считать равной r и вынести за знак интеграла. Так как, кроме того, длина вибратора l мала по сравнению с длиной волны $l \ll \lambda$, а $k = 2\pi/\lambda$ [см. разд. 5.3], то выражение e^{-ikR} можно заменить на e^{-ikr} и также вынести за знак интеграла. Действительно, при выполнении неравенств $r \gg l$ и $l \ll \lambda$, получаем $e^{-ikR} \approx e^{-ikr} e^{ik\xi\cos\theta} \approx e^{-ikr}\left(1 + i\frac{2\pi\xi}{\lambda}\cos\theta\right) \approx e^{-ikr}$. С учетом изложенного ф-ла (8.2.1) принимает вид:

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \mathbf{z}_0 \frac{\mu_a I_m^{\text{ст}}}{4\pi r} e^{-ikr} = \mathbf{z}_0 \dot{A}_{zm}. \tag{8.2.2}$$

Вектор $\dot{\mathbf{H}}_m$ связан с векторным потенциалом $\dot{A}_m$ (разд. 5.3) соотношением

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_m. \tag{8.2.3}$$

Вектор $\dot{\mathbf{E}}$ можно вычислить по ф-ле (5.3.6), однако несколько проще, найдя напряженность магнитного поля по ф-ле (8.2.3), определить вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ из первого уравнения Максвелла:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\frac{i}{\omega\varepsilon_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m. \tag{8.2.4}$$

В сферической системе координат $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_m$ выражается формулой

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\mathbf{r}_0}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, \dot{A}_{\varphi m}) - \frac{\partial \dot{A}_{\theta m}}{\partial\varphi}\right] + \frac{\boldsymbol{\theta}_0}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \dot{A}_{rm}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{A}_{\varphi m}\right)\right] + \frac{\boldsymbol{\varphi}_0}{r}\left[\frac{\partial\left(r\dot{A}_{\theta m}\right)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_{rm}}{\partial\theta}\right]. \tag{8.2.5}$$

В рассматриваемом случае вектор $\dot{\mathbf{A}}_m$ параллелен оси Z. Чтобы воспользоваться ф-лой (8.2.5), нужно найти проекции вектора $\dot{\mathbf{A}}_m$ на орты $\mathbf{r}_0, \mathbf{\Theta}_0$ и $\boldsymbol{\varphi}_0$ (рис. 8.2.3). Так как вектор $\boldsymbol{\varphi}_0$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси Z, а углы между осью Z и ортами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{\Theta}_0$ равны соответственно θ и $\theta+\frac{\pi}{2}$, то

$$\dot{A}_{rm}=\dot{A}_{zm}\cos\theta;\ \dot{A}_{\theta m}=-\dot{A}_{zm}\sin\theta;\ \dot{A}_{\varphi m}=0. \tag{8.2.6}$$

Подставляя ф-лы (8.2.6) в (8.2.5) и учитывая, что все составляющие вектора $\dot{\mathbf{A}}_m$ не зависят от переменной φ, получаем, что вектор $\dot{\mathbf{H}}_m$ имеет только азимутальную составляющую:

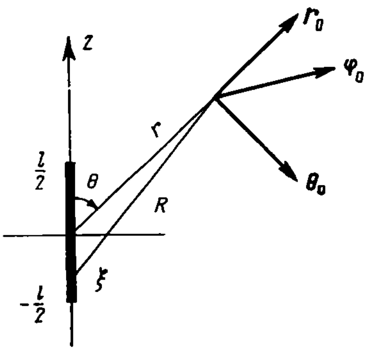


Рис. 8.2.3

$$\dot{\mathbf{H}}_m=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{\mu_a r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{A}_{\theta m}\right)-\frac{\partial\dot{A}_{rm}}{\partial\theta}\right\}.$$

Этот результат можно было предвидеть из физических соображений, так как прямолинейный ток вибратора может создать только кольцевые магнитные силовые линии, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вибратора.

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_m=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mathrm{i}\,I_m^{\text{ст}}\,lk^2}{4\pi}\left[\frac{1}{kr}-\mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}. \tag{8.2.7}$$

Для определения вектора $\dot{\mathbf{E}}_m$ подставим ф-лу (8.2.7) в (8.2.4). Учитывая, что $\partial\dot{H}_{\varphi m}/\partial\varphi=\dot{H}_{rm}=\dot{H}_{\theta m}=0$, приходим к выражению

$$\dot{\mathbf{E}}_m=\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a}\left\{\frac{\mathbf{r}_0}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dot{H}_{\varphi m}\right)-\mathbf{\Theta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{H}_{\varphi m}\right)\right\}. \tag{8.2.8}$$

После дифференцирования имеем

$$\dot{\mathbf{E}}_m=\mathbf{r}_0\dot{E}_{rm}+\mathbf{\Theta}_0\dot{E}_{\theta m}, \tag{8.2.9}$$

где

$$\dot{E}_{rm}=\frac{I_m^{\text{ст}}\,lk^3}{2\pi\omega\varepsilon_a}\left[\left(\frac{1}{kr}\right)^2-\mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}; \tag{8.2.10}$$

$$\dot{E}_{\theta m}=\frac{\mathrm{i}\,I_m^{\text{ст}}\,lk^3}{4\pi\omega\varepsilon_a}\left[\frac{1}{kr}-\mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^2-\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}. \tag{8.2.11}$$

Подчеркнем, что эти формулы выведены для комплексных амплитуд векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Для перехода к мгновенным значениям

Коэффициент R_Σ измеряется в омах и называется *сопротивлением излучения*. В свободном пространстве

$$R_\Sigma = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \qquad (8.5.6)$$

8.6. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла

Рассмотрим систему уравнений Максвелла для монохроматического поля (4.4.23). Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ входят в эти уравнения одинаковым образом. Поэтому, если заменить

$$\dot{\mathbf{E}} \text{ на } \dot{\mathbf{H}},\ \dot{\mathbf{H}} \text{ на } \dot{\mathbf{E}},\ \tilde{\varepsilon} \text{ на} - \tilde{\mu},\ \tilde{\mu} \text{ на} - \tilde{\varepsilon}, \qquad (8.6.1)$$

то первое уравнение перейдет во второе, второе — в первое, а в целом система (4.4.23) останется прежней.

Возможность преобразований (8.6.1) позволяет сделать важный вывод. Пусть имеются две электродинамические задачи, сформулированные таким образом, что все условия для вектора $\dot{\mathbf{E}}$ (или $\dot{\mathbf{H}}$) одной задачи при заменах вида (8.6.1) переходят в условия для вектора $\dot{\mathbf{H}}$ (или $\dot{\mathbf{E}}$) другой задачи, а геометрическая конфигурация области, на границе которой заданы граничные условия, в обоих случаях одинакова. При этом, если одна из задач решена, решение второй задачи можно получить непосредственно из решения первой путем простой замены всех электрических величин на магнитные и наоборот.

Указанное свойство называют *перестановочной двойственностью уравнений Максвелла* и широко используют при решении различных задач. Ниже это свойство используется при анализе элементарного магнитного вибратора.

8.7. Элементарный магнитный вибратор

Прежде чем ввести понятие об элементарном магнитном вибраторе, вернемся еще раз к элементарному электрическому вибратору. Как уже отмечалось, одной из возможных моделей элементарного электрического вибратора является элемент прямолинейного провода (рис. 8.7.1). Для простоты изложения будем считать провод идеально проводящим. Тогда протекающий по вибратору ток окажется поверхностным с плотностью

$$j_S = \frac{I^{\text{ст}}}{L}, \qquad (8.7.1)$$

где L — периметр провода.

На поверхности S вибратора касательная составляющая вектора $\dot{\mathbf{H}}$ неизменна вдоль его длины и связана с плотностью тока $\dot{\mathbf{j}}_S$

соотношением $\dot{j}_S=[n_0, H]$, которое с учетом ф-лы (8.7.1) можно переписать в виде

$$\dot{I}^{ст}=L\dot{H}_\tau\,|_S. \tag{8.7.2}$$

Из этих соотношений следует, что на поверхности вибратора линии вектора **H** перпендикулярны линиям вектора **j** и имеют вид колец, охватывающих вибратор (рис. 8.7.1).

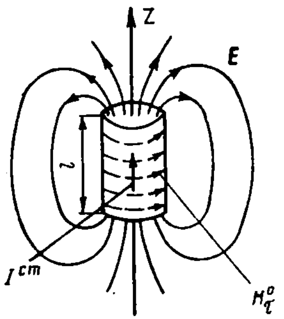


Рис. 8.7.1

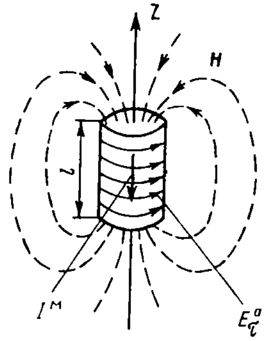


Рис. 8.7.2

Таким образом, элементарный электрический вибратор можно представить в виде стержня, на поверхности S которого задано распределение касательной составляющей вектора **H**. На концах вибратора ток проводимости переходит в ток смещения, которому соответствуют выходящие из торцов электрические силовые линии (рис. 8.7.1). Так как величина касательной составляющей напряженности магнитного поля $\dot{H}_\tau|_S$ на поверхности вибратора однозначно связана с его током [см. (8.7.2)], то поле в пространстве вокруг вибратора можно выразить через значения $\dot{H}_\tau|_S$. Для этого нужно в ф-лах (8.2.7), (8.2.10) и (8.2.11) $\dot{I}^{ст}_m$ заменить выражением $\dot{I}^{ст}_m=L\dot{H}_{m\tau}|_S=L\dot{H}^0_\tau$. В результате получим

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{rm}&=\frac{\dot{H}^0_\tau Llk^3}{2\pi\omega\varepsilon_a}\left[\left(\frac{1}{kr}\right)^2-\mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\cos\theta\, e^{-\mathrm{i}kr}\\
\dot{E}_{\theta m}&=\frac{\mathrm{i}\,\dot{H}^0_\tau Llk^3}{4\pi\omega\varepsilon_a}\left[\frac{1}{kr}-\mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^2-\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\sin\theta\, e^{-\mathrm{i}kr}\\
\dot{H}_{\varphi m}&=\frac{\mathrm{i}\,\dot{H}^0_\tau Llk^2}{4\pi}\left[\frac{1}{kr}-\mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\, e^{-\mathrm{i}kr}
\end{aligned}\right\}. \tag{8.7.3}$$

Рассмотрим теперь систему, аналогичную описанной модели элементарного электрического вибратора, но отличающуюся от нее тем, что на поверхности стержня S выполняется иное граничное условие, а именно касательная составляющая вектора **E** отлична от нуля и неизменна вдоль длины l, причем линии вектора **E** имеют вид колец, охватывающих поверхность S (рис. 8.7.2). Иными словами, данная система отличается от рассмотренной тем, что на поверхности S вместо замкнутых магнитных силовых линий задано распределение замкнутых электрических силовых линий. Линии магнитного поля второй системы совпадают по форме с линиями электрического поля первой системы, но имеют противоположное направление. Различное направление магнитных и электрических линий этих систем следует из уравнений Максвелла [правые части первого и второго ур-ний (4.4.23) имеют разные знаки].

По аналогии с элементарным электрическим вибратором систему, изображенную на рис. 8.7.2, можно назвать *элементарным*

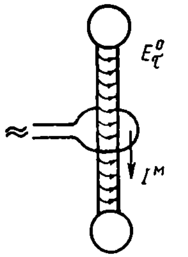


Рис. 8.7.3

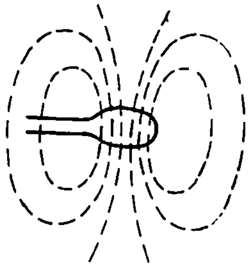


Рис. 8.7.4

магнитным вибратором. Физическую модель элементарного магнитного вибратора можно получить, если стержень выполнить из материала с магнитной проницаемостью μ_2, значительно большей магнитной проницаемости μ_1 окружающей среды, например, из феррита. В качестве возбуждающего устройства можно использовать рамку, обтекаемую током проводимости (рис. 8.7.3).

Благодаря большой величине μ_2 поток линий вектора **B** пронизывает стержень, почти не ответвляясь через его боковую поверхность, т. е. поток линий вектора **B** равномерен по длине стержня. Пронизывающим стержень линиям вектора **B** соответствуют замкнутые линии вектора **E**. Равномерность потока вектора **B** обуславливает равномерное распределение E_τ на поверхности магнитного вибратора. Практически для того, чтобы распределение E_τ на поверхности магнитного вибратора было действительно равномерным, нужно аналогично тому, как это было сделано Герцем в случае электрического вибратора, использовать стержни с шарами или другими концевыми нагрузками (рис. 8.7.3). Элементарным магнитным вибратором можно считать также любой достаточно малый элемент длинного стержня, выполненного из соответствующего материала и возбужденного рамкой.

Следует отметить, что аналогия между физическими моделями элементарных электрического и магнитного вибраторов проявляется не только в распределении H_τ на электрическом и E_τ на магнитном вибраторах. Благодаря высокой проводимости материала электрического вибратора на его поверхности выполняется условие $E_\tau|_S \to 0$. Точно так же при $\mu_2 \gg \mu_1$ на поверхности магнитного вибратора $H_\tau|_S \to 0$. Это следует из второго уравнения Максвелла $[\dot{\mathbf{H}} = (\mathrm{i}/\omega\mu_{a2})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}]$ и условия непрерывности касательной составляющей **H** на границе раздела двух сред.

Если в схеме, изображенной на рис. 8.7.3, изъять стержень, оставив одну рамку, то характер структуры поля не изменится (рис. 8.7.4). Поэтому небольших размеров рамку, обтекаемую током, также можно считать элементарным магнитным вибратором.

Для вычисления поля, создаваемого элементарным магнитным вибратором, воспользуемся изложенным в предыдущем разделе принципом перестановочной двойственности уравнений Максвелла. Применяя к ф-лам (8.7.3) преобразования (8.6.1), т. е. заменяя все электрические величины на магнитные и наоборот, приходим к выражениям для составляющих напряженности электрического и магнитного полей в пространстве вокруг элементарного магнитного вибратора:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{\varphi m} &= \frac{\mathrm{i}\,\dot{E}^0_\tau L l k^2}{4\pi}\left[\frac{1}{kr} - \mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^2\right]\sin\theta\, e^{-\mathrm{i}kr} \\ \dot{H}_{rm} &= -\frac{\mathrm{i}\,\dot{E}^0_\tau L l k^3}{2\pi\omega\mu_a}\left[\left(\frac{1}{kr}\right)^2 - \mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\cos\theta\, e^{-\mathrm{i}kr} \\ \dot{H}_{\theta m} &= -\frac{\mathrm{i}\,\dot{E}^0_\tau L l k^3}{4\pi\omega\mu_a}\left[\frac{1}{kr} - \mathrm{i}\left(\frac{1}{kr}\right)^2 - \left(\frac{1}{kr}\right)^3\right]\sin\theta\, e^{-\mathrm{i}kr} \end{aligned}\right\}. \tag{8.7.4}$$

где $E^0_\tau = E_{m\tau}|_S$ — амплитуда касательной составляющей вектора **E** на поверхности элементарного магнитного вибратора. Отметим, что входящее в выражение (8.7.4) произведение Ll равно площади поверхности, на которой действует касательная составляющая вектора **E**. Аналогично в (8.7.3) произведение Ll — поверхность, на которой действует касательная составляющая вектора **H**.

Как следует из ф-л (8.7.4), напряженность магнитного поля элементарного магнитного вибратора имеет две составляющие H_r и H_θ, а напряженность электрического поля — только одну составляющую E_φ. Иными словами, вектор **E** в этом случае лежит в азимутальных плоскостях, а вектор **H** — в меридианальных.

Магнитным силовым линиям на поверхности электрического вибратора, как уже указывалось, соответствует поверхностный электрический ток с плотностью $\mathbf{j}_S$. В случае магнитного вибратора можно формально, по аналогии с ф-лами (8.7.1) и (8.7.2), ввести понятие о *магнитном токе* $I^{\text{м}}$, равномерно распределенном по поверхности магнитного вибратора с плотностью $\mathbf{j}^{\text{м}}_S$, связанной с вектором **E** на поверхности S соотношением

$$\mathbf{j}^{\text{м}}_S = -[\mathbf{n}_0,\ \mathbf{E}]. \tag{8.7.5}$$

Как уже отмечалось (разд. 2.8), линии вектора $\dot{\mathbf{H}}$ образуют правовинтовую систему с линиями полного электрического тока, а замкнутые линии вектора $\dot{\mathbf{E}}$ образуют левовинтовую систему с линиями вектора $\partial\dot{\mathbf{B}}/\partial t = \mathrm{i}\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}$, который по аналогии с вектором $\partial\dot{\mathbf{D}}/\partial t = \mathrm{i}\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}$ можно назвать плотностью магнитного тока смещения. Поэтому при одинаковом направлении замкнутых электрических и магнитных линий электрический ток I и магнитный ток $I^{\text{м}}$ должны протекать в противоположных направлениях. Этим и объясняется знак «—» в ф-ле (8.7.5).

Так как по предположению плотность поверхностного магнитного тока $\mathbf{j}_S^{\text{м}}$ равномерно распределена по периметру вибратора, то полный магнитный ток вибратора $I^{\text{м}}$ определяется выражением $I_S^{\text{м}} = -LE_\tau|_S$, а его комплексная амплитуда

$$\dot{I}_m^{\text{м}} = -L\dot{E}_{\tau m}|_S = -L\dot{E}_\tau^0. \tag{8.7.6}$$

Понятие магнитного тока, по существу, является формальным. Однако его введение в ряде случаев позволяет существенно упростить анализ структуры поля сложных систем. Подставив (8.7.6) в (8.7.4), получим ф-лы, определяющие поле элементарного магнитного вибратора при заданном магнитном токе $\dot{I}_m^{\text{м}}$. Эти формулы можно также получить непосредственно из выражений для поля элементарного электрического вибратора, если в последних выполнить преобразования (8.6.1) и заменить $I_m^{\text{ст}}$ на $-\dot{I}_m^{\text{м}}$.

Следует отметить, что выражения (8.7.4), определяющие поле элементарного магнитного вибратора, не учитывают поле, создаваемое возбуждающим элементом. Например, в случае вибратора, выполненного по схеме рис. 8.7.3, ф-лы (8.7.4) определяют поле, созданное стержнем, но не учитывают поле, созданное возбуждающим витком[1]).

Как и в случае элементарного электрического вибратора, в выражениях для поля элементарного магнитного вибратора (8.7.4) имеются составляющие, пропорциональные $1/kr$ в первой, второй и третьей степенях. Поэтому при анализе структуры поля элементарного магнитного вибратора окружающее его пространство также удобно разделить на три зоны: ближнюю ($kr \ll 1$), дальнюю ($kr \gg 1$) и промежуточную, где kr соизмеримо с единицей.

Ограничимся анализом дальней зоны. Поступая так же, как и в случае элементарного электрического вибратора, и учитывая ф-лу (8.7.6), получаем:

$$\dot{E}_{\varphi m} = -\frac{\mathrm{i}\,\dot{I}_m^{\text{м}}\,l}{2\lambda\,r}\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}; \tag{8.7.7}$$

---

[1]) В электрическом вибраторе также имеется возбуждающий элемент, который тоже не учитывается ф-лами, выведенными в разд. 8.2.

$$\dot{H}_{\theta m} = \frac{\mathrm{i}\, \dot{I}_m^{\text{м}}\, l}{2\lambda\, r} \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \sin\theta\, e^{-\mathrm{i}kr}. \qquad (8.7.8)$$

Из выражений (8.7.7) и (8.7.8) следует, что поле, создаваемое элементарным магнитным вибратором в дальней зоне, представляет собой сферическую волну, распространяющуюся от вибратора со скоростью света. Поверхности равных фаз образуют концентрические сферы с центром, расположенным в середине вибратора.

Векторы напряженности электрического $\mathbf{E}=\boldsymbol{\varphi}_0 E_\varphi$ и магнитного $\mathbf{H}=\boldsymbol{\theta}_0 H_\theta$ полей перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны. Эти векторы изменяются в фазе.

Распространение электромагнитной волны сопровождается переносом энергии. Энергия распространяется со скоростью света перпендикулярно поверхностям равной фазы, т. е. скорости переноса энергии и фазовая совпадают. Отношение амплитуд напряженности электрического и магнитного полей

$$\frac{\dot{E}_{\varphi m}}{\dot{H}_{\theta m}} = -\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = -Z_c, \qquad (8.7.9)$$

где Z_c — волновое сопротивление среды.

Как и элементарный электрический вибратор, элементарный магнитный вибратор обладает направленными свойствами. Его излучение максимально в экваториальной плоскости $(\theta=\pi/2)$. Вдоль своей оси (оси Z) элементарный магнитный вибратор не излучает. Диаграммы направленности элементарного магнитного вибратора совпадают с диаграммами направленности элементарного электрического вибратора (рис. 8.4.1—8.4.4).

Как уже отмечалось, достаточно малая рамка (виток провода), обтекаемая постоянным по амплитуде электрическим током $(I=I_m\cos\omega t)$, также может рассматриваться как элементарный магнитный вибратор. В этом случае вибратор характеризуется током в рамке I и ее площадью S.

Формулы для поля, создаваемого рамкой, могут быть получены независимо от формул для поля элементарного электрического вибратора. Для этого нужно записать выражение для векторного потенциала кольцевого электрического тока $\dot{\mathbf{A}}$, вычислить входящий в это выражение интеграл в предположении, что расстояние от рамки до точки наблюдения велико по сравнению с размерами рамки, а затем перейти к векторам $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, как это было сделано в случае элементарного электрического вибратора.

Сравнение окончательных выражений для поля, создаваемого рамкой, с формулами для поля элементарного магнитного вибратора показывает, что они переходят друг в друга при замене вида

$$\left.\begin{aligned} L\dot{E}_\tau^0\, l &\rightleftarrows -\mathrm{i}\,\omega\mu_a\, \dot{I}_m S \\ \dot{I}_m^{\text{м}}\, l &\rightleftarrows \mathrm{i}\,\omega\mu_a\, I_m S \end{aligned}\right\}. \qquad (8.7.10)$$

Например, формулы для поля, создаваемого рамкой в дальней зоне, можно получить из (8.7.7) и (8.7.8):

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_\varphi &= \frac{kI_m S Z_c}{2\lambda r}\sin\theta\, e^{-ikr}\\ \dot{H}_\theta &= -\frac{kI_m S}{2\lambda r}\sin\theta\, e^{-ikr}\end{aligned}\right\}. \tag{8.7.11}$$

Из сравнения ф-л (8.7.11) с выражениями (8.3.1) и (8.3.2) следует, что рамка создает в дальней зоне такое же по величине (но не по ориентации векторов **E** и **H**) поле, как и элементарный электрический вибратор, если при равных токах в рамке и вибраторе величина $2\pi S/\lambda = h_д$ равна длине l элементарного электрического вибратора. Поэтому параметр $h_д$ называют *действующей высотой* рамки.

Мощность излучения рамки находится так же, как мощность излучения элементарного электрического вибратора:

$$P_{\Sigma_{ср}} = \frac{1}{2} I_m^2 R_{р\Sigma}, \tag{8.7.12}$$

где $R_{р\Sigma} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{kS}{\lambda}\right)^2 Z_c$ — сопротивление излучения рамки.

8.8. Уравнения Максвелла с учетом магнитных токов и зарядов

По аналогии с магнитными токами, распределенными по поверхности S с плотностью $\mathbf{j}_S^м$, можно ввести магнитные токи, распределенные в некотором объеме V с плотностью $\mathbf{j}^м$. В этом случае система уравнений Максвелла для монохроматического поля примет вид

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} &= i\,\omega\tilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{j}}^{ст}\\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} &= -i\,\omega\tilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{j}}^м\end{aligned}\right\}. \tag{8.8.1}$$

В реальных задачах объемные магнитные токи всегда считаются заданными, т. е. должны рассматриваться как сторонние.

Введение магнитных токов во второе уравнение Максвелла приводит к изменению вида четвертого уравнения Максвелла. В этом случае $\operatorname{div}\dot{\mathbf{B}} = \dot{\rho}^м$, где $\rho^м$ — объемная плотность магнитных зарядов, связанная с вектором $\mathbf{j}^м$ уравнением непрерывности $\operatorname{div}\dot{\mathbf{j}}^м + i\,\omega\dot{\rho}^м = 0$. Таким образом, предполагается, что магнитные токи и заряды связаны уравнением

$$\oint\limits_S \mathbf{j}^м\, d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho^м\, dV, \tag{8.8.2}$$

которое представляет собой закон сохранения магнитных зарядов. Отметим, что уравнение непрерывности для магнитных токов является следствием второго уравнения системы (8.8.1), т. е. последняя является полной системой уравнений Максвелла для монохроматического поля, учитывающей магнитные токи и заряды.

Перейдем к вычислению поля по известным значениям $\dot{\mathbf{j}}^{ст}$ и $\dot{\mathbf{j}}^{м}$. Пусть электрические и магнитные токи сосредоточены в ограниченной области V. Для простоты будем считать, что окружающее пространство заполнено однородной изотропной непоглощающей средой, т. е. $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_a$, $\tilde{\mu}=\mu_a$. Представим искомое поле в виде суперпозиции двух полей:

$$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_1+\dot{\mathbf{E}}_2;\ \dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}_1+\dot{\mathbf{H}}_2, \tag{8.8.3}$$

причем предположим, что поле $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ возбуждается только электрическими источниками, а поле $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ — только магнитными. Тогда система (8.8.1) распадется на две независимые системы:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1=\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}_1+\dot{\mathbf{j}}^{ст},\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_1=-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}_1; \tag{8.8.4}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_2=\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}_2,\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2=-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}_2-\dot{\mathbf{j}}^{м}. \tag{8.8.5}$$

Система ур-ний (8.8.4) аналогична системе ур-ний (4.4.28), решение которой было получено в разд. 5.3. Следовательно, векторы $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_1$ выражаются через векторный потенциал $\dot{\mathbf{A}}$ соотношениями $\dot{\mathbf{E}}_1=-(\mathrm{i}\omega\varepsilon_a\mu_a)\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}-\mathrm{i}\omega\dot{\mathbf{A}}$; $\dot{\mathbf{H}}_1=(1/\mu_a)\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}$, вытекающими из (5.3.6) и (5.3.1). При этом вектор $\dot{\mathbf{A}}$ определяется ф-лой (5.3.8), в которой нужно положить $\tilde{\mu}=\mu_a$ и $k=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$. Система (8.8.5) получается из системы (8.8.4), если в ней выполнить преобразования (8.6.1) и, кроме того, заменить $\dot{\mathbf{j}}^{ст}$ на $\dot{\mathbf{j}}^{м}$. Следовательно, решение системы (8.8.5) также можно записать по аналогии с ф-лами (5.3.6) и (5.3.1): $\dot{\mathbf{E}}_2=\dfrac{1}{\varepsilon_a}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}^{м}$; $\dot{\mathbf{H}}_2=-\dfrac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_a\mu_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}^{м}-\mathrm{i}\,\omega\dot{\mathbf{A}}^{м}$,

где $\dot{\mathbf{A}}^{м}=\dot{\mathbf{A}}_m^{м}\,e^{\mathrm{i}\,\omega t}$;

$$\dot{\mathbf{A}}_m^{м}=\frac{\varepsilon_a}{4\pi}\int\limits_V\dot{\mathbf{j}}_m^{м}\frac{e^{-\mathrm{i}kR}}{R}\,dV. \tag{8.8.6}$$

В ф-ле (8.8.6) через R, как обычно, обозначено расстояние от элемента dV до точки наблюдения (рис. 5.2.2).

Вектор $\dot{\mathbf{A}}^{м}$ принято называть *векторным магнитным потенциалом.* Таким образом, поле $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$, удовлетворяющее системе (8.8.1) в случае среды без потерь, определяется ф-лами:

$$\dot{\mathbf{E}}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_a\mu_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}-\mathrm{i}\,\omega\dot{\mathbf{A}}-\frac{1}{\varepsilon_a}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}^{м};$$

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_a\mu_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}^{м}-\mathrm{i}\,\omega\dot{\mathbf{A}}^{м}.$$

8.9. Эквивалентные источники электромагнитного поля. Принцип Гюйгенса—Кирхгофа

При анализе конкретных излучающих систем распределение токов в системе часто либо неизвестно, либо имеет крайне сложный характер, но зато можно считать известным поле на некоторой замкнутой поверхности, охватывающей излучающую систему. В этих случаях поле, излучаемое системой, можно найти непосредственно по значениям векторов **E** и **H** на этой поверхности. Например, при анализе элементарных вибраторов было показано, что излучаемое ими поле можно рассчитать не только по токам, но и по значениям E_τ и H_τ на поверхности вибраторов.

Задача формулируется следующим образом. Пусть источники сосредоточены в ограниченной области V. Характер источников и их расположение неизвестны, но зато известны значения векторов $\mathbf{E}^S$ и $\mathbf{H}^S$ на внешней по отношению к источникам стороне поверхности S, ограничивающей объем V. Поверхность S может быть как действительной поверхностью раздела различных сред, так и воображаемой, важно только, что на ней задано поле $\mathbf{E}^S$, $\mathbf{H}^S$. Требуется найти поле вне области V. В силу теоремы единственности задача имеет единственное решение.

Будем считать, что на поверхности S отсутствуют поверхностные токи и заряды. Тогда на этой поверхности должны выполняться следующие граничные условия (разд. 3.4):

$$(\mathbf{n}_0,\ \varepsilon_a\mathbf{E}^S) = (\mathbf{n}_0,\ \varepsilon_{a2}\mathbf{E}_2^S); \tag{8.9.1}$$

$$[\mathbf{n}_0,\ \mathbf{E}^S] = [\mathbf{n}_0,\ \mathbf{E}_2^S]; \tag{8.9.2}$$

$$(\mathbf{n}_0,\ \mu_a\mathbf{H}^S) = (\mathbf{n}_0,\ \mu_{a2}\mathbf{H}_2^S); \tag{8.9.3}$$

$$[\mathbf{n}_0,\ \mathbf{H}^S] = [\mathbf{n}_0,\ \mathbf{H}_2^S], \tag{8.9.4}$$

где $\mathbf{E}_2^S$ и $\mathbf{H}_2^S$ — значения векторов **E** и **H** на поверхности S с той стороны, где находятся источники; ε_{a2} и μ_{a2} — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей область V; $\mathbf{n}_0$ — орт внешней по отношению к V нормали к поверхности S, а ε_a и μ_a — диэлектрическая и магнитная проницаемости той части пространства, в которой определяется поле.

Для решения поставленной задачи применим искусственный прием. Предположим[1]), что поле в области V отсутствует. При этом $\mathbf{E}_2^S$ и $\mathbf{H}_2^S$ обратятся в нуль, т. е. при прежних значениях $\mathbf{E}^S$ и $\mathbf{H}^S$ нарушатся граничные условия на поверхности S. Для того чтобы векторы $\mathbf{E}^S$, $\mathbf{H}^S$ на поверхности S остались прежними и в то

---

[1]) Это заведомо неверное предположение. Однако если значения касательных составляющих векторов **E** и **H** на внешней по отношению к объему V стороне поверхности S останутся прежними, то полученное с помощью такого предположения решение будет правильным вне области V (см. разд. 4.6).

же время удовлетворяли граничным условиям, предположим, что на поверхности S распределены дополнительные источники (заряды и токи), компенсирующие образовавшиеся разрывы составляющих векторов **E** и **H**. Рассмотрим сначала нормальную компоненту вектора **E**. Если на поверхности S имеются поверхностные заряды с плотностью ρ_S, то вместо условия (8.9.1) должно выполняться условие $\varepsilon_a E^S - \varepsilon_{a2} E^S_{2n} = \rho_S$. Так как по предположению $\mathbf{E}^S_2 = 0$, искомое значение плотности поверхностных зарядов определится равенством

$$\rho_S = \varepsilon_a E^S_n. \tag{8.9.5}$$

Аналогично компенсируется разрыв касательной составляющей вектора **H**. При наличии поверхностных электрических токов с плотностью $\mathbf{j}_S$ на поверхности S вместо условия (8.9.4) будет выполняться граничное условие $[\mathbf{n}_0, \mathbf{H}^S] - [\mathbf{n}_0, \mathbf{H}^S_2] = \mathbf{j}_S$. Полагая $\mathbf{H}^S_2 = 0$, получаем

$$\mathbf{j}_S = [\mathbf{n}_0, \mathbf{H}^S]. \tag{8.9.6}$$

Разрыв касательной составляющей вектора **E** и нормальной составляющей вектора **H** можно компенсировать, если по аналогии с поверхностными электрическими токами (8.9.6) и зарядами (8.9.5) ввести фиктивные поверхностные магнитные токи и заряды, определив их плотности соотношениями:

$$\mathbf{j}^{\text{м}}_S = -[\mathbf{n}_0, \mathbf{E}^S]; \tag{8.9.7}$$

$$\rho^{\text{м}}_S = \mu_a \mathbf{H}^S_n. \tag{8.9.8}$$

Подчеркнем еще раз, что в природе нет ни магнитных токов, ни магнитных зарядов. Их вводят формально для упрощения анализа. В данном случае фиктивными являются не только магнитные, но также и электрические заряды и токи. В действительности на поверхности S вообще нет источников. Они введены для того, чтобы при произвольно сделанном предположении об отсутствии поля в области, где находятся реальные источники, сохранились прежние значения векторов **E** и **H** на поверхности S. При этом в силу теоремы единственности поле в рассматриваемой области не изменится.

Таким образом, замена реальных (но неизвестных) источников эквивалентными им фиктивными, но зато полностью определенными источниками, распределенными по поверхности S, позволяет свести сформулированную ранее задачу о нахождении поля по заданным значениям векторов **E** и **H** на поверхности S к задаче о нахождении поля по известным электрическим и магнитным токам и зарядам, распределенным на той же поверхности. Этот метод называется *принципом эквивалентности*, а заряды и токи, определяемые соотношениями (8.9.5)—(8.9.8), — *эквивалентными источниками* электромагнитного поля.

Эквивалентные поверхностные токи и заряды связаны между собой уравнениями непрерывности, которые в случае монохроматического поля имеют вид: $\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{j}}_S=-i\omega\dot{\rho}_S$; $\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{j}}_S^{\text{м}}=-i\omega\dot{\rho}_S^{\text{м}}$. Следовательно, искомое электромагнитное поле однозначно определяется только электрическими и магнитными токами, т. е. одними касательными составляющими векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности S. Отметим, что для единственности решения рассматриваемой задачи (разд. 4.6) достаточно задать на поверхности S либо E_τ, либо H_τ. Поэтому одновременно произвольно задать E_τ и H_τ (или $\mathbf{j}_S$ и $\mathbf{j}_S^{\text{м}}$) невозможно.

Принцип эквивалентности тесно связан с *принципом Гюйгенса*, согласно которому каждая точка фронта волны, созданной каким-либо первичным источником, является вторичным источником сферической волны. Под фронтом волны обычно понимают поверхность, отделяющую область, в которой в данный момент уже имеют место колебания, от области, в которую волна еще не успела распространиться. В случае монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в неограниченной области, под фронтом волны понимают любую поверхность равных фаз.

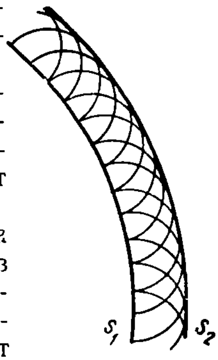


Рис. 8.9.1

Пусть известна поверхность S_1 (рис. 8.9.1), на которой фаза функции, характеризующей волну, в момент $t=t_0$ равна некоторому значению ψ_0. В следующий момент времени $t=t_0+\Delta t$ поверхность, соответствующая значению фазы ψ_0, уже не будет совпадать с S_1. Для определения этой новой поверхности согласно принципу Гюйгенса нужно каждую точку поверхности S_1 принять за центр сферы радиуса $r_0=v_0\Delta t$, где v_0 — скорость распространения волны. Тогда поверхность S_2 (рис. 8.9.1), огибающая семейство построенных таким образом сфер, проведенная с учетом направления распространения волны, будет искомой поверхностью, на которой фаза в момент $t=t_0+\Delta t$ равна ψ_0.

Принцип Гюйгенса справедлив для любых волновых процессов и позволяет проследить за распространением фронта волны, начиная с момента, в который фронт волны является известным. Математическая формулировка принципа Гюйгенса впервые была дана Кирхгофом. Поэтому указанный принцип обычно называют *принципом Гюйгенса—Кирхгофа*.

Принцип Гюйгенса—Кирхгофа позволяет находить поле и в том случае, когда поверхность, окружающая источники, не совпадает с поверхностью равных фаз. При этом, конечно, необходимо учитывать распределение фаз фиктивных источников.

Принцип Гюйгенса—Кирхгофа широко применяется при расчете диаграмм направленности различных излучающих систем свч диапазона. Основные типы антенн этого диапазона: щелевые, рупорные и зеркальные (схематически изображенные на рис. 8.9.2*а*, *б* и *в* соответственно) можно представить в виде замкнутой поверхности, одна часть которой S_0 является металлической, а другая S_Σ представляет собой поверхность раскрыва (через нее электромагнитная энергия излучается в окружающее пространство). Поле на S_Σ обычно известно с той или иной степенью точности, и его можно заменить распределением эквивалентных источников.

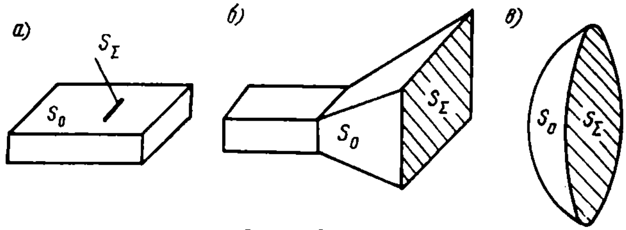


Рис. 8.9.2

Поверхность S_0 можно считать идеально проводящей, тогда $E_\tau|_{S_0}=0$, что соответствует отсутствию магнитных токов ($\mathbf{j}_S^{\text{м}}|_{S_0}=0$). Кроме того, при приближенных расчетах часто пренебрегают затеканием электрических токов на внешнюю поверхность антенны, т. е. предполагают, что на поверхности S_0 отсутствуют также и электрические токи ($\mathbf{j}_S=0$ или $H_\tau|_{S_0}=0$).

В таком приближении поле в дальней зоне определяется только эквивалентными поверхностными электрическими и магнитными токами или, что то же самое, касательными составляющими векторов **E** и **H** на поверхности S_Σ.

При вычислении поля можно воспользоваться принципом суперпозиции: разбить поверхность S_Σ на элементарные площадки ΔS, найти поле, создаваемое эквивалентными токами каждой площадки, а затем просуммировать полученные результаты.

8.10. Элемент Гюйгенса

Практически элемент Гюйгенса можно представить как элемент фронта распространяющейся волны. Магнитное поле, действующее на этом элементе, можно заменить эквивалентным электрическим током, а электрическое поле — эквивалентным магнитным током. Таким образом, элемент Гюйгенса можно рассматривать как элементарный излучатель, обтекаемый электрическим и магнитным токами. Определим его направленные свойства.

Так как векторы **E** и **H** распространяющейся волны взаимно перпендикулярны, то эквивалентные им электрические и магнитные токи также будут взаимно перпендикулярны. Расположим прямоугольный элемент Гюйгенса (плоскую прямоугольную площадку $\Delta S=l_1 l_2$) в плоскости XOY так, чтобы начало координат совпадало с его центром. Ориентация касательных составляющих

$\mathbf{E}_\tau^0$ и $\mathbf{H}_\tau^0$ на площадке ΔS, соответствующая некоторому моменту времени t_0, показана на рис. 8.10.1, а ориентация электрических и магнитных токов, эквивалентных этим составляющим, в тот же момент времени t_0 — на рис. 8.10.2. Полагая $\dot{E}_\tau^0|_{\Delta S} = \dot{E}_0 e^{i\omega t}$ и $\dot{H}_\tau^0|_{\Delta S} = \dot{H}_0 e^{i\omega t}$, получаем, что комплексная амплитуда $\dot{I}_m$ эквивалентного электрического тока ($\dot{I} = \dot{I}_m e^{i\omega t}$) на ΔS определяется соотношением

$$\dot{I}_m = \dot{H}_0 l_1, \tag{8.10.1}$$

а комплексная амплитуда $\dot{I}_m^{\text{м}}$ эквивалентного магнитного поля равна соответственно $\dot{I}^{\text{м}} = \dot{I}_m^{\text{м}} e^{i\omega t}$

$$\dot{I}_m^{\text{м}} = -\dot{E}_0 l_2. \tag{8.10.2}$$

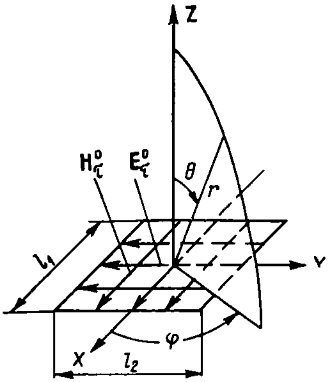


Рис. 8.10.1

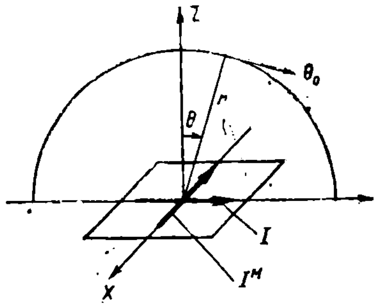


Рис. 8.10.2

Поле, создаваемое элементом Гюйгенса, равно сумме полей, создаваемых расположенными перпендикулярно друг другу элементарным электрическим вибратором длиной l_2 с током I и элементарным магнитным вибратором длиной l_1 с током $I^{\text{м}}$.

Вычислим поле элемента Гюйгенса в дальней зоне в плоскости YOZ (плоскость E). В этой плоскости угол $\varphi = \pm\pi/2$ (знак «+» соответствует положительным значениям координаты y, а знак «—» — отрицательным).

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля $\dot{E}_{\theta m}^{(1)}$, создаваемого элементарным электрическим вибратором (электрическим током I), определяется выражением (8.3.1), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\dot{E}_{\theta m}^{(1)} = \mp i \frac{\dot{I}_m l_2}{2\lambda r} Z_c \cos\theta \, e^{-ikr}, \tag{8.10.3}$$

где знак «—» соответствует положительным значениям координаты y, а знак «+» — отрицательным.

При переходе от (8.3.1) к (8.10.3) учтено, что координатная система в данном разделе ориентирована иначе, чем в разд. 8.2—8.4 [1]). Комплексная амплитуда напряженности электрического поля $\dot{E}^{(2)}_{\theta m}$, создаваемого элементарным магнитным вибратором (магнитным током $I^{\text{м}}$), определяется соотношением (8.7.7), которое в рассматриваемом случае записывается в форме

$$\dot{E}^{(2)}_{\theta m} = \pm \frac{\mathrm{i}\, I^{\text{м}}_m l_1}{2\lambda\, r} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}, \tag{8.10.4}$$

где знак «—» соответствует отрицательным значениям координаты y, а знак «+» — ее положительным значениям.

При переходе от выражения (8.7.7) к (8.10.4) учтено, что плоскость YOZ перпендикулярна току $I^{\text{м}}$ и проходит через середину отрезка l_1, т. е. является плоскостью максимального излучения элементарного магнитного вибратора. Поэтому $\sin\theta$, входящий в ф-лу (8.7.7), в выражении (8.10.4) принят равным единице. Кроме того, учтено, что при $y<0$ направление вектора $\boldsymbol{\varphi}_0$ системы координат, введенной в разд. 8.7, совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\Theta}_0$ в рассматриваемой системе координат, а при $y>0$ противоположно ему. Напряженность полного электрического поля найдем суммированием выражений (8.10.3) и (8.10.4). Используя равенст-а (8.10.1) и (8.10.2), получаем

$$\dot{E}_{\theta m} = \dot{E}^{(1)}_{\theta m} + \dot{E}^{(2)}_{\theta m} = \mp\, \mathrm{i} \frac{\dot{E}_0 \Delta S}{2\lambda\, r} \left(1 + \frac{\dot{H}_0}{\dot{E}_0} Z_c \cos\theta\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}, \tag{8.10.5}$$

где знак «—» соответствует случаю $y>0$, знак «+» — $y<0$.

Аналогично вычисляется напряженность электрического поля, создаваемого элементом Гюйгенса в плоскости XOZ (плоскость H). В этом случае вектор $\mathbf{E}_m$ имеет одну составляющую $\dot{E}_{\varphi m}$:

$$\dot{E}_{\varphi m} = \dot{E}^{(1)}_{\varphi m} + \dot{E}^{(2)}_{\varphi m} = \mp \frac{\mathrm{i}\, \dot{E}_0 \Delta S}{2\lambda\, r} \left(\cos\theta + \frac{\dot{H}_0}{\dot{E}_0} Z_c\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}, \tag{8.10.6}$$

где знак «—» соответствует положительным значениям координаты x, а знак «+» — отрицательным.

Можно также показать, что в произвольном направлении, характеризуемом координатами θ и φ, комплексная амплитуда напряженности электрического поля, создаваемого элементом Гюйгенса, имеет две составляющие:

$$\dot{E}_{\theta m} = \mp \frac{\mathrm{i}\, \dot{E}_0 \Delta S}{2\lambda\, r} \left(1 + \frac{\dot{H}_0}{\dot{E}_0} Z_c \cos\theta\right) \sin\varphi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}; \tag{8.10.7}$$

$$\dot{E}_{\varphi m} = \mp\, \mathrm{i} \frac{\dot{E}_0 \Delta S}{2\lambda\, r} \left(\cos\theta + \frac{\dot{H}_0}{\dot{E}_0} Z_c\right) \cos\varphi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}. \tag{8.10.8}$$

---

[1]) Например, при $y>0$ и $z>0$ направление орта $\boldsymbol{\Theta}_0$ координатной системы, соответствующей ф-ле (8.3.1), противоположно направлению вектора $\boldsymbol{\Theta}_0$ координатной системы, рассматриваемой в настоящем разделе.

Если отношение касательных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на площадке ΔS равно волновому сопротивлению среды ($\dot{E}_0/\dot{H}_0 = Z_c$), то $(\dot{H}_0 Z_c)/\dot{E}_0 = 1$ и ф-лы (8.10.7)—(8.10.8) принимают вид:

$$\dot{E}_{\theta m} = \mp \frac{\mathrm{i}\,\dot{E}_0\,\Delta S}{2\lambda\, r}\,(1 + \cos\theta)\sin\varphi\, e^{-\mathrm{i}kr}; \qquad (8.10.9)$$

$$\dot{E}_{\varphi m} = \mp \frac{\mathrm{i}\,\dot{E}_0\,\Delta S}{2\lambda\, r}\,(1 + \cos\theta)\cos\varphi\, e^{-\mathrm{i}kr}. \qquad (8.10.10)$$

Абсолютная величина вектора $\dot{\mathbf{E}}$ в этом случае не зависит от φ:

$$|\dot{\mathbf{E}}| = \left|\sqrt{\dot{E}_{\theta m}^2 + \dot{E}_{\varphi m}^2}\right| = \frac{|\dot{E}_0|\,\Delta S}{2\lambda\, r}\,(1 + \cos\theta). \qquad (8.10.11)$$

Из полученных формул следует, что элемент Гюйгенса обладает направленными свойствами. Его диаграмма направленности при выполнении условия $\dot{E}_0/\dot{H}_0 = Z_c$ одинакова в любой плоскости, проходящей через ось Z, определяется ф-лой (8.10.11) и имеет форму кардиоиды (рис. 8.10.3). Как обычно, правая часть диаграммы соответствует некоторому значению $\varphi = \varphi_0$, а левая — значению $\varphi = \varphi_0 + \pi$. Пространственная диаграмма направленности элемента Гюйгенса представляет собой поверхность, образующуюся при вращении кардиоиды вокруг ее оси симметрии (оси Z). Из диаграммы направленности видно, что излучение максимально в направлении оси Z, перпендикулярной к площадке ΔS.

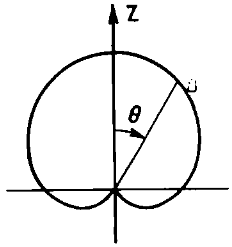


Рис. 8.10.3

Вектор напряженности магнитного поля, создаваемого элементом Гюйгенса, в дальней зоне при любых значениях углов θ и φ можно найти по ф-ле $\dot{\mathbf{H}} = [\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{E}}]/Z_c$, где $\mathbf{r}_0$ — орт радиуса вектора, проведенного из середины элемента Гюйгенса в точку наблюдения. Переходя к составляющим $\dot{H}_\theta$ и $\dot{H}_\varphi$, получаем

$$\dot{H}_\theta = -\frac{\dot{E}_\varphi}{Z_c};\ \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_c}. \qquad (8.10.12)$$

8.11. Лемма Лоренца. Теорема взаимности

Пусть в линейной изотропной среде имеются две независимые группы источников, одна из которых характеризуется сторонними электрическими токами с плотностью $\mathbf{j}_1^{\text{ст}}$, а вторая — токами с плотностью $\mathbf{j}_2^{\text{ст}}$. Первая группа источников создает монохроматическое электромагнитное поле $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$, удовлетворяющее уравнениям:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1 = \mathrm{i}\,\omega\widetilde{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{j}_1^{\text{ст}}; \qquad (8.11.1) \qquad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_1 = -\mathrm{i}\,\omega\widetilde{\mu}\,\dot{\mathbf{H}}_1; \qquad (8.11.2)$$

а вторая — поле $\dot{E}_2$, $\dot{H}_2$, причем

$$\operatorname{rot}\dot{H}_2 = i\,\omega\,\tilde{\varepsilon}\,\dot{E}_2 + \dot{j}_2^{ст}; \tag{8.11.3}$$

$$\operatorname{rot}\dot{E}_2 = -i\,\omega\tilde{\mu}\,\dot{H}_2. \tag{8.11.4}$$

Умножим ур-ние (8.11.1) скалярно на вектор $\dot{E}_2$, а (8.11.4) — на $\dot{H}_1$ и почленно вычтем второе равенство из первого:

$$\dot{E}_2\operatorname{rot}\dot{H}_1 - \dot{H}_1\operatorname{rot}\dot{E}_2 = i\,\omega\left(\tilde{\varepsilon}\,\dot{E}_1\,\dot{E}_2 + \tilde{\mu}\,\dot{H}_1\,\dot{H}_2\right) + \dot{E}_2\dot{j}_1^{ст}. \tag{8.11.5}$$

Аналогично (8.11.3) умножим скалярно на вектор $\dot{E}_1$ и почленно вычтем из полученного результата равенство (8.11.2), скалярно умноженное на вектор $\dot{H}_2$:

$$\dot{E}_1\operatorname{rot}\dot{H}_2 - \dot{H}_2\operatorname{rot}\dot{E}_1 = i\,\omega\left(\tilde{\varepsilon}\,\dot{E}_1\,\dot{E}_2 + \tilde{\mu}\,\dot{H}_1\,\dot{H}_2\right) + \dot{E}_1\dot{j}_2^{ст}. \tag{8.11.6}$$

Применяя к левым частям ф-л (8.11.5) и (8.11.6) тождество (4.1.3) и вычитая затем почленно (8.11.6) из (8.11.5), получаем

$$\operatorname{div}[\dot{E}_1,\ \dot{H}_2] - \operatorname{div}[\dot{E}_2,\ \dot{H}_1] = \dot{E}_2\dot{j}_1^{ст} - \dot{E}_1\dot{j}_2^{ст}. \tag{8.11.7}$$

Равенство (8.11.7) называют *леммой Лоренца.*

На основе леммы Лоренца доказывается *теорема взаимности,* имеющая фундаментальное значение. Предположим, что источники первой группы ($\dot{j}_1^{ст}$) сосредоточены в конечном объеме V_1, а источники второй группы ($\dot{j}_2^{ст}$) — в конечном объеме V_2. Области V_1 и V_2 пространственно разделены (не пересекаются).

Интегрируя равенство (8.11.7) по произвольной области V, включающей в себя V_1 и V_2 (рис. 8.11.1), и применяя теорему Остроградского—Гаусса, получаем

$$\oint\limits_S \left\{[\dot{E}_1, \dot{H}_2] - [\dot{E}_2,\ \dot{H}_1]\right\} dS = \int\limits_V \left(\dot{j}_1^{ст}\dot{E}_2 - \dot{E}_1\dot{j}_2^{ст}\right) dV, \tag{8.11.8}$$

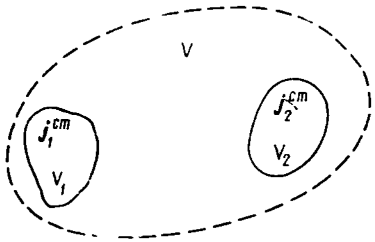


Рис. 8.11.1

где S — поверхность, ограничивающая объем V.

Соотношение (8.11.8) является *интегральной формулировкой леммы Лоренца.*

Распространим интегрирование в ур-нии (8.11.8) на все пространство. При этом поверхность S уйдет в бесконечность. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что амплитуды векторов $\dot{E}_1$, $\dot{H}_1$, $\dot{E}_2$ и $\dot{H}_2$ убывают с увеличением расстояния r от источников быстрее, чем $1/r$ (см. теорему единственности, доказанную в разд. 4.6). Тогда при $r\to\infty$ левая часть ур-ния (8.11.8) обратится в нуль. Учитывая, кроме того, что по предположению вектор плотности сторонних токов $\dot{j}_1^{ст}$ отличен от нуля только в объеме V_1, а вектор $\dot{j}_2^{ст}$ — только в объеме V_2, получаем

$$\int\limits_{V_1} \dot{j}_1^{ст} \dot{E}_2 dV = \int\limits_{V_2} \dot{j}_2^{ст} \dot{E}_1 dV. \tag{8.11.9}$$

В полученном выражении $\dot{E}_1$ — вектор напряженности электрического поля, создаваемого в точках объема V_2 токами $\dot{j}_1^{ст}$, распределенными в объеме V_1, а $\dot{E}_2$ — напряженность электрического поля, создаваемого в точках объема V_1 токами $\dot{j}_2^{ст}$, протекающими в объеме V_2. Соотношение (8.11.9) является одной из наиболее общих математических формулировок *теоремы взаимности*.

Выясним некоторые следствия, вытекающие из этой теоремы. Предположим, что объемы V_1 и V_2 и распределение токов ($\dot{j}_1^{ст}$ и $\dot{j}_2^{ст}$) в них совершенно одинаковы. Из равенства (8.11.9) следует, что в этом случае векторы $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ также будут одинаковыми. Например, пусть имеются две одинаковые антенны *I* и *II* с одинаковым распределением токов. Тогда вне зависимости от того, является ли разделяющее антенны пространство однородным или неоднородным, можно утверждать, что антенна *I* создает у антенны *II* такое же поле, какое антенна *II* создает у антенны *I*.

На основе теоремы взаимности можно также доказать, что диаграмма направленности приемной антенны имеет такую же форму, какую она имела бы, если б антенна работала в качестве передающей. Применение теоремы взаимности в ряде случаев позволяет существенно упростить решение электродинамических задач.

При доказательстве теоремы взаимности предполагалось, что среда, заполняющая рассматриваемое пространство, является линейной и изотропной. Предположим теперь, что среда, оставаясь линейной, является анизотропной. В этом случае параметры $\widetilde{\varepsilon}$ и $\widetilde{\mu}$ (оба или, по крайней мере, один из них) будут тензорами. Тогда вместо ур-ния (8.11.7) получим

$$\operatorname{div}[\dot{E}_1, \dot{H}_2] - \operatorname{div}[\dot{E}_2, \dot{H}_1] = \dot{E}_2 \dot{j}_1^{ст} - \dot{E}_1 \dot{j}_2^{ст} + i\omega\{\dot{E}_2 \|\widetilde{\varepsilon}\| \dot{E}_1 -$$
$$- \dot{E}_1 \|\widetilde{\varepsilon}\| \dot{E}_2\} + i\omega\{\dot{H}_1 \|\widetilde{\mu}\| \dot{H}_2 - \dot{H}_2 \|\widetilde{\mu}\| \dot{H}_1\}.$$

Теорема взаимности будет верна только в том случае, если выполняются равенства:

$$\dot{E}_1 \|\widetilde{\varepsilon}\| \dot{E}_2 = \dot{E}_2 \|\widetilde{\varepsilon}\| \dot{E}_1 \quad \text{и} \quad \dot{H}_1 \|\widetilde{\mu}\| \dot{H}_2 = \dot{H}_2 \|\widetilde{\mu}\| \dot{H}_1.$$

Для этого необходимо, чтобы $\|\widetilde{\varepsilon}\|$ и $\|\widetilde{\mu}\|$ были *симметричными* тензорами ($\widetilde{\varepsilon}_{nm} = \widetilde{\varepsilon}_{mn}$; $\widetilde{\mu}_{nm} = \widetilde{\mu}_{mn}$). Это условие выполняется для большинства кристаллических сред. Однако в случае гиротропных сред (например, ферритов) тензор $\|\widetilde{\mu}\|$ является *антисимметричным* ($\widetilde{\mu}_{nm} = -\widetilde{\mu}_{mn}$), и разность $\dot{H}_1 \|\widetilde{\mu}\| \dot{H}_2 - \dot{H}_2 \|\widetilde{\mu}\| \dot{H}_1$ оказывается отличной от нуля. Поэтому для гиротропных сред теорема взаимности несправедлива.

ГЛАВА 9

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

9.1. Плоские волны в однородной изотропной среде без потерь

В предыдущей главе были рассмотрены электромагнитные волны, создаваемые элементарными вибраторами. Было выяснено, что эти волны являются сферическими, т. е. их поверхности равных фаз представляют собой концентрические сферы с центром в середине вибратора. В однородной изотропной среде без потерь любую из составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ или $\dot{\mathbf{H}}_m$ (обозначим ее $\dot{N}_m$) такой волны в дальней зоне можно представить в виде

$$\dot{N}_m = \frac{A}{r} e^{-ikr}, \tag{9.1.1}$$

где r — расстояние от вибратора до точки наблюдения, а A—функция, характеризующая зависимость амплитуды от направления в точку наблюдения.

Отметим, что волны, создаваемые любой излучающей системой, на большом расстоянии от нее являются сферическими. Пусть в безграничной однородной изотропной среде без потерь распространяется сферическая волна. Рассмотрим поле в некоторой области V (рис. 9.1.1), размеры которой малы по сравнению с расстоянием до источника. Введем декартову систему координат, ось Z которой совпадает с направлением распространения волны.

В пределах области V можно пренебречь изменением амплитуды и, кроме того, считать, что фаза зависит только от координаты z. Тогда величину A в ф-ле (9.1.1) можно считать постоянной, а множитель e^{-ikr} записать в виде $e^{-ik(r_0+z)}$, где r_0 — расстояние от источника сферической волны до точки O, принятой за начало отсчета координаты z (рис. 9.1.1). Действительно, пусть, например, сферическая волна создается элементарным электрическим вибратором. Поле в дальней зоне определяется выражениями (8.3.1) и (8.3.2). Если размеры области V малы по сравнению с расстоянием r до вибратора, то в пределах этой области в множителе, характеризующем амплитуду составляющих поля, можно пренебречь изменением величин r и $\sin\theta$, т. е. считать, что $\frac{i I_m l Z_c}{\lambda r} e^{-ikr_0} \sin\theta = \dot{E}_0 = \text{const}$. Тогда векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ в пределах области V можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-ikz}; \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \frac{[\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{E}}_0]}{Z_c} e^{-ikz}. \tag{9.1.2}$$

Векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны (оси Z), а их ориентация относительно

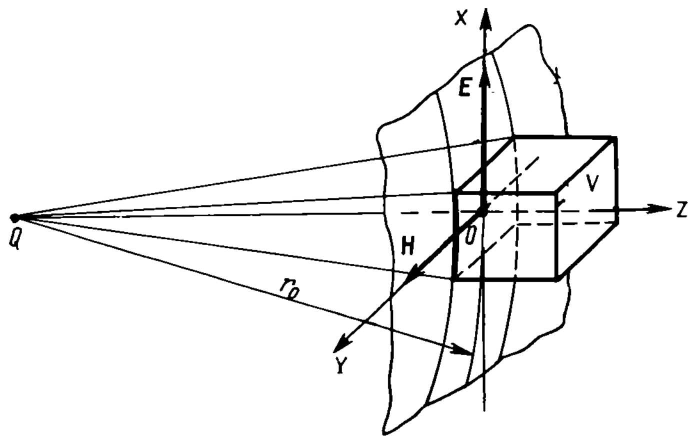


Рис. 9.1.1

осей X и Y зависит от ориентации вибратора, создающего поле. В общем случае эти векторы могут иметь как x-ю, так и y-ю составляющие, связанные соотношениями:

$$\dot{E}_{xm} = Z_c \dot{H}_{ym}; \quad \dot{E}_{ym} = -Z_c \dot{H}_{xm}. \tag{9.1.3}$$

Подчеркнем, что формулы вида (9.1.2) получаются и в том случае, если источником, создающим сферическую волну, является не элементарный электрический вибратор, а любая излучающая система. Однако при этом между составляющими вектора $\dot{\mathbf{E}}_0$ по осям X и Y может иметь место фазовый сдвиг.

Перейдем к мгновенным значениям векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Для простоты предположим, что вектор $\dot{\mathbf{E}}_0$ имеет только вещественную часть ($\dot{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0$). Это означает, что составляющие вектора $\mathbf{E}$ по осям X и Y изменяются в фазе и, кроме того, что фазы векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ в точке $z=0$ равны нулю. Домножив выражения (9.1.2) на $e^{i\omega t}$ и отделив вещественную часть, получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz); \quad \mathbf{H} = \frac{[\mathbf{z}_0, \mathbf{E}_0]}{Z_c} \cos(\omega t - kz). \tag{9.1.4}$$

Из полученных формул следует, что поле в рассматриваемом случае представляет собой электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении оси Z. Поверхности равных фаз образуют семейство плоскостей, перпендикулярных оси Z. Амплитуды векторов **E** и **H** не зависят от координат. Такие волны принято называть *однородными плоскими волнами.*

Непосредственно из вывода выражений (9.1.4) очевидно, что свойства рассматриваемой плоской волны определяются свойствами сферической волны, создаваемой, например, элементарным электрическим вибратором в дальней зоне (разд. 8.3). Перечислим основные свойства плоской волны.

Векторы **E** и **H** перпендикулярны направлению распространения волны (такие волны называют *поперечными)* и в рассматриваемом случае среды без потерь взаимно перпендикулярны.

Векторы **E** и **H** изменяются в фазе. На рис. 9.1.2 показано изменение мгновенных значений векторов **E** и **H** в зависимости от

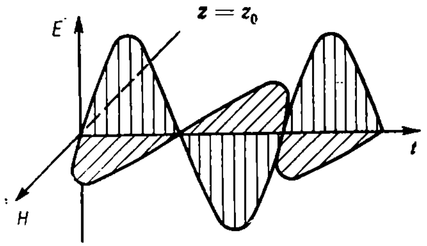


Рис. 9.1.2

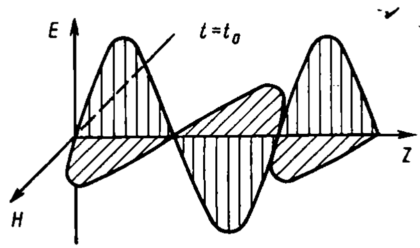


Рис. 9.1.3

времени t в некоторой точке пространства $z=z_0$, а на рис. 9.1.3 приведена зависимость тех же величин от координаты z в некоторый момент $t=t_0$. Из сравнения рисунков следует, что зависимости от времени и от координаты z имеют одинаковый характер. Как было показано выше (разд. 8.3), такая волна распространяется с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = v_0, \qquad (9.1.5)$$

равной скорости света в данной среде, и не зависит от частоты. Длина волны $\lambda = 2\pi/k = v_0/f$.

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Комплексный вектор Пойнтинга имеет только вещественную часть:

$$\widetilde{\Pi} = \mathrm{Re}\widetilde{\Pi} = \mathbf{z}_0 \frac{E_0^2}{2Z_c}. \qquad (9.1.6)$$

Таким образом, имеется только активный поток энергии в направлении оси Z. Плотность потока энергии не зависит от координат и от частоты. Скорость распространения энергии равна фазовой скорости $v_э = v_\Phi = v_0$.

Отношение напряженностей электрического и магнитного полей равно волновому сопротивлению среды

$$\frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \frac{\sqrt{\dot{E}_x^2 + \dot{E}_y^2}}{\sqrt{\dot{H}_x^2 + \dot{H}_y^2}} = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} .$$

Отметим, что выражения (9.1.2) для поля плоской волны можно было получить, решая уравнения Гельмгольца (5.1.12) и (5.1.13) для векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$. В рассматриваемом случае векторы $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ не зависят от координат x и y, поэтому уравнения Гельмгольца принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \dot{\mathbf{E}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\mathbf{E}}_m = 0 \\ &\frac{d^2 \dot{\mathbf{H}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\mathbf{H}}_m = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (9.1.7)$$

Если считать, что волна распространяется в *положительном* направлении оси Z, то решением системы этих уравнений будут ф-лы (9.1.2).

Из простых физических соображений очевидно, что плоскую волну можно создать лишь в ограниченной части пространства. Однако при решении многих практически важных задач предполагают, что внешнее поле (поле первичных источников) имеет характер плоской волны (9.1.2) во всем безграничном пространстве. Это позволяет существенно упростить решение электродинамических задач.

9.2. Плоские волны в однородной изотропной среде с проводимостью, отличной от нуля

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Поле плоской волны, распространяющейся в однородной изотропной непоглощающей среде, было исследовано в предыдущем разделе. Однако в реальных средах всегда имеют место потери электромагнитной энергии. В среде с проводимостью, отличной от нуля, электромагнитное поле вызывает токи проводимости. На поддержание этих токов расходуется часть энергии поля, в результате чего выделяется тепло (джоулевы потери). Помимо джоулевых потерь, в среде могут быть диэлектрические и магнитные потери (разд. 4.3). В однородной изотропной среде при наличии потерь поле плоской волны также описывается ф-лами (9.1.2), если в них параметр k считать комплексной величиной $(k=\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}})$. Для анализа свойств плоской волны в этом случае выражение для k необходимо разделить на вещественную и мнимую части.

Рассмотрим случай, когда потери в среде обусловлены конечной проводимостью, т. е. будем считать, что $\tilde{\mu}=\mu_a$, а $\tilde{\varepsilon}$ определяется ф-лой $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_a(1-i\operatorname{tg}\delta)$, где $\operatorname{tg}\delta=\sigma/\omega\varepsilon_a$ — тангенс угла потерь (разд. 4.3). Полагая $k=\operatorname{Re}k+i\operatorname{Im}k$, получаем $\operatorname{Re}k+i\operatorname{Im}k=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\,(1-i\operatorname{tg}\delta)$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства и разделяя затем вещественную и мнимую части, приходим к системе двух алгебраических уравнений относительно $\operatorname{Re}k$ и $\operatorname{Im}k$:

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{Re}k)^2-(\operatorname{Im}k)^2&=\omega^2\varepsilon_a\mu_a\\ 2(\operatorname{Re}k)(\operatorname{Im}k)&=-\omega^2\varepsilon_a\mu_a\operatorname{tg}\delta\end{aligned}\right\}. \tag{9.2.1}$$

Из (9.2.1) следует, что

$$(\operatorname{Re}k)^2=\frac{\omega^2\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}\right). \tag{9.2.2}$$

Так как $(\operatorname{Re}k)^2$ не может быть отрицательной величиной, то в ф-ле (9.2.2) нужно сохранить знак «+». Вводя обозначение

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}+1\right)}, \tag{9.2.3}$$

получаем $\operatorname{Re}k=\pm\beta$. Отметим, что $\beta>k$ в среде без потерь с теми же значениями ε_a и μ_a. Аналогично, обозначая

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}-1\right)}, \tag{9.2.4}$$

получаем $\operatorname{Im}k=\pm\alpha$.

Рассмотрим теперь множитель e^{-ikz} в выражениях (9.1.2), определяющих поле плоской волны. С учетом полученных соотношений этот множитель можно записать одним из следующих способов: 1) $e^{\alpha z}e^{-i\beta z}$; 2) $e^{\alpha z}e^{i\beta z}$; 3) $e^{-\alpha z}e^{i\beta z}$ и 4) $e^{-\alpha z}e^{-i\beta z}$. По предположению (разд. 9.1) источник находится со стороны отрицательных значений координаты z. Поэтому выражения 1) и 2) описывают волны, амплитуды которых возрастают по мере удаления от источника. Существование таких волн физически невозможно. Амплитуда волны типа 3) убывает с увеличением расстояния от источника, однако эта волна распространяется в направлении к источнику. Такой волны в однородной среде также не может быть. Единственной волной, не противоречащей физическому смыслу задачи, является волна типа 4).

Соответственно с выбором вида множителя e^{-ikz} параметр

$$k=\beta-i\alpha.$$

Таким образом, поле плоской волны в среде с проводимостью, отличной от нуля, определяется выражениями:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= \dot{\mathbf{E}}_0\, e^{-\alpha z}\, e^{-i\beta z}\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \frac{[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{E}}_0]}{Z_c}\, e^{-\alpha z}\, e^{-i\beta z}\end{aligned}\right\}. \qquad (9.2.6)$$

Волновое сопротивление в рассматриваемом случае является комплексной величиной:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta)}} = |Z_c|\, e^{i\psi}, \qquad (9.2.7)$$

где $|Z_c| = \sqrt{\dfrac{\mu_a \cos\delta}{\varepsilon_a}}$; $\psi = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{\delta}{2}$.

При изменении удельной проводимости от нуля до бесконечности угол ψ увеличивается от нуля до $\pi/4$, а абсолютное значение волнового сопротивления убывает от $\sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ до нуля. Таким образом, наличие потерь приводит к уменьшению абсолютной величины волнового сопротивления, т. е. к увеличению $\mathbf{H}$ при заданном значении $\mathbf{E}$. Это обусловлено тем, что величина $\mathbf{H}$ определяется суммой плотностей токов проводимости и токов смещения. В среде без потерь существуют только токи смещения. В среде с потерями при тех же значениях $\mathbf{E}$ и ε_a токи смещения остаются неизменными и к ним добавляются токи проводимости.

Проанализируем полученные результаты. Рассмотрим сначала случай, когда вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ имеет лишь одну составляющую, например, $\dot{E}_{xm}$. Тогда вектор $\dot{\mathbf{H}}_m$ также будет иметь одну составляющую, перпендикулярную $\dot{\mathbf{E}}_m$ (в рассматриваемом примере $\dot{H}_{ym}$). Считая вектор $\dot{\mathbf{E}}_0$ вещественным ($\dot{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{x}_0 E_0$) и переходя к мгновенным значениям векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, из ф-лы (9.2.6) получаем

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{x}_0 E_0\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\\ \mathbf{H} &= \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{|Z_c|}\, e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (9.2.8)$$

Из полученных формул вытекает, что поле плоской волны в рассматриваемом случае обладает следующими свойствами. Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны (оси Z), т. е. волна является поперечной. Поверхности равных фаз определяются уравнением $z = \mathrm{const}$ и представляют собой плоскости, перпендикулярные оси Z. Амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ экспоненциально убывают вдоль оси Z, что определяется множителем $e^{-\alpha z}$. Постоянную α называют *коэффициентом затухания*. Поверхности равных амплитуд совпадают с поверхностями равных фаз. Волны, обладающие таким свойством, как и волны, амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ которых не зависят от координат (разд. 9.1), называют *однородными*.

Между векторами **E** и **H** имеется фазовый сдвиг. Вектор **H** опаздывает по фазе относительно вектора **E** на угол ψ, равный половине угла потерь ($\psi=\delta/2$). На рис. 9.2.1 приведена зависимость мгновенных значений векторов **E** и **H** от времени t в некоторой фиксированной точке пространства $z=z_0$, а на рис. 9.2.2—

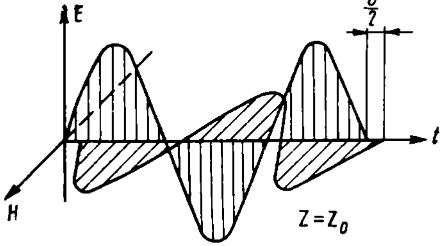


Рис. 9.2.1

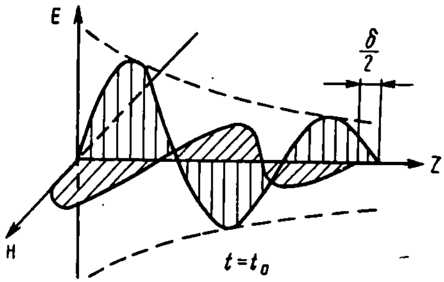


Рис. 9.2.2

зависимость мгновенных значений **E** и **H** от координаты z в некоторый фиксированный момент времени $t=t_0$.

Фазовая скорость плоской волны находится так же, как фазовая скорость сферической (разд. 8.3):

$$v_ф=\frac{\omega}{\operatorname{Re} k}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}+1\right)}}. \qquad (9.2.9)$$

Так как $\beta>\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$, то скорость $v_ф$, определяемая ф-лой (9.2.9), меньше фазовой скорости в среде без потерь с теми же значениями параметров ε_a и μ_a. В рассматриваемом случае фазовая скорость зависит от частоты: с увеличением последней она возрастает. Предельное значение $v_ф$ при $\omega\to\infty$ равно $1/\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$. Кроме того, величина $v_ф$ зависит от проводимости среды: при одинаковой частоте она будет меньше в среде с большей проводимостью. Параметр β, определяющий фазовую скорость, называют *коэффициентом фазы*.

Длина волны

$$\lambda=\frac{2\pi}{\operatorname{Re} k}=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{1}{f\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}+1\right)}} \qquad (9.2.10)$$

меньше длины волны в среде без потерь с теми же значениями параметров ε_a и μ_a. Ее значение зависит от проводимости: при заданной частоте оно убывает с увеличением проводимости.

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Комплексный вектор Пойнтинга

$$\tilde{\Pi}=\mathbf{z}_0\frac{E_0^2}{2\,|Z_c|}\,e^{-2\alpha z}\,e^{i\delta/2} \qquad (9.2.11)$$

содержит как вещественную, так и мнимую части. Это означает, что имеется как активный, так и реактивный потоки энергии. Средняя плотность потока энергии экспоненциально убывает вдоль оси Z:

$$\Pi_{ср} = \mathrm{Re}\,\widetilde{\Pi} = \mathbf{z}_0 \frac{E_0^2}{2\,|Z_c|}\, e^{-2\alpha z} \cos\frac{\delta}{2}\,. \qquad (9.2.12)$$

Скорость распространения энергии вычисляется по ф-ле (4.5.36). Можно показать, что она равна фазовой скорости $v_э = v_ф$.

Волновое сопротивление среды с отличной от нуля проводимостью — комплексная величина, зависящая от частоты. Абсолютное значение волнового сопротивления возрастает с увеличением частоты. Его предельное значение при $\omega \to \infty$ совпадает с волновым сопротивлением среды без потерь с теми же параметрами ε_a и μ_a. Кроме того, оно зависит от проводимости: с увеличением последней $|Z_c|$ уменьшается, причем в случае идеального металла оказывается равным нулю $\lim\limits_{\sigma\to\infty}|Z_c| = 0$. Аргумент волнового сопротивления в зависимости от свойств среды и частоты может изменяться в пределах $0 \leqslant \psi < \pi/4$.

Из изложенного следует, что свойства плоской волны, распространяющейся в среде с проводимостью и в среде без потерь, различны. Основное отличие состоит в том, что в среде без потерь параметры плоской волны ($v_ф$, $v_э$, α, Z_c и др.) одинаковы при любых частотах, а в среде с проводимостью они зависят от частоты. Зависимость свойств волны от частоты называется *дисперсией*, а соответствующие среды — *диспергирующими*. Отметим, что среда может быть диспергирующей и при $\sigma = 0$, если характеризующие ее параметры ε_a и μ_a зависят от частоты.

В общем случае вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ имеет две составляющие $\dot{E}_{xm}$ и $\dot{E}_{ym}$, между которыми возможен фазовый сдвиг. При этом вектор $\dot{\mathbf{H}}_m$ также будет иметь две составляющие $\dot{H}_{xm}$ и $\dot{H}_{ym}$. Если составляющие вектора $\mathbf{E}$ по осям X и Y (E_x и E_y) изменяются синфазно, то поворотом осей координат X и Y вокруг оси Z этот случай сводится к уже рассмотренному, когда вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ имеет одну составляющую. При наличии между составляющими $\dot{E}_{xm}$ и $\dot{E}_{ym}$ фазового сдвига, не равного $n\pi$, где n — целое число, волна имеет некоторые особенности, например, мгновенные значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не являются взаимно перпендикулярными (см. разд. 9.3). Перечисленные выше остальные свойства плоской волны имеют место и в этом случае.

Рассмотрим два частных случая реальных сред: диэлектрики и проводники. В этих случаях выражения для коэффициента фазы β и коэффициента затухания α, а следовательно, и выражения для остальных параметров волны упрощаются.

В диэлектриках $\operatorname{tg}\delta \ll 1$. Поэтому можно приближенно положить $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta} \approx 1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\delta$. Применяя дважды указанное приближенное равенство к выражению (9.2.3), получаем

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\left(1+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\delta\right). \tag{9.2.13}$$

Аналогично ф-лу (9.2.4) можно представить в виде

$$\alpha = \frac{\omega}{2}\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\operatorname{tg}\delta = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \tag{9.2.14}$$

Подставляя ф-лу (9.2.13) в (9.2.9), находим

$$v_ф = v_э \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\left(1+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\delta\right)} \approx v_0\left(1-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\delta\right). \tag{9.2.15}$$

Аналогично преобразовывается ф-ла (9.2.10), определяющая длину волны:

$$\lambda = \frac{v_0}{f}\left(1-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\delta\right). \tag{9.2.16}$$

Из полученных результатов следует, что параметры волны (β, λ и $v_ф$), распространяющейся в реальном диэлектрике, мало отличаются от ее параметров в среде без потерь с теми же значениями ε_a и μ_a. Коэффициент затухания α является малой величиной и в первом приближении не зависит от частоты. Дисперсионные свойства проявляются незначительно.

ВОЛНЫ В ПРОВОДНИКАХ

В проводниках (например, в металлах) $\operatorname{tg}\delta \gg 1$. Поэтому в выражениях для α и β можно пренебречь единицей по сравнению с $\operatorname{tg}\delta$. В результате получим

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu_a\sigma\omega}{2}} = \sqrt{\pi f\mu_a\sigma}. \tag{9.2.17}$$

Постоянные α и β нелинейно зависят от частоты. Следовательно, свойства волны будут существенно различными на различных частотах. Формулы для фазовой скорости, длины волны и волнового сопротивления в этом случае принимают вид:

$$v_ф = v_э = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu_a\sigma}}; \tag{9.2.18}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f\mu_a\sigma}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{f\mu_a\sigma}}; \tag{9.2.19}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a\omega}{\sigma}}\,e^{i\pi/4} = (1+i)\sqrt{\frac{\mu_a\omega}{2\sigma}}. \tag{9.2.20}$$

Сравним параметры плоских волн, распространяющихся в вакууме и в меди ($\sigma=5{,}65\cdot10^7$ *сим/м*) на частоте 1 *Мгц*.

в вакууме:	в металле:
$v_ф = v_э \approx 3\cdot10^8$ *м/сек*;	$v_ф = v_э \approx 421$ *м/сек*;
$\lambda = 300$ *м*;	$\lambda \approx 4{,}21\cdot10^{-4}$ *м*;
$Z_c = 120\pi$ *ом* ≈ 377 *ом*.	$\lvert Z_c\rvert \approx 3{,}74\cdot10^{-4}$ *ом*.

Коэффициент затухания α волны, распространяющейся в проводнике, большая величина. Поэтому ее амплитуда резко уменьшается вдоль направления распространения: волна быстро затухает.

Пусть амплитуда напряженности электрического поля в точке с координатой z равна $E_m(z)$, а амплитуда в точке с координатой $z+l$ равна $E_m(z+l)$. Отношение

$$\frac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = e^{\alpha l} \tag{9.2.21}$$

показывает, во сколько раз уменьшилась амплитуда волны при прохождении ею расстояния l.

Затухание измеряют в *неперах* и *децибелах*. Затухание в неперах определяют как натуральный логарифм отношения (9.2.21):

$$\ln\frac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = \alpha\, l, \ \textit{неп.}$$

Затухание в децибелах определяют как двадцать десятичных логарифмов того же отношения: $20\lg\frac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = \alpha\, l\, 20\lg e \approx 8{,}69\alpha\, l$, *дб* т. е. 1 *дб* $=8{,}69$ *неп*.

Коэффициент α, таким образом, определяет затухание волны при прохождении ею пути в один метр и измеряется в неперах на метр *(неп/м)*.

Вычислим затухание волны, распространяющейся в меди, при частоте в 1 *Мгц*. Коэффициент затухания $\alpha=\sqrt{\pi f\mu_a\sigma}=\sqrt{4\pi^2\cdot10^{-7}\cdot5{,}65\cdot10^7\cdot10^6}\approx$ $\approx 14\,800$ *неп/м*.

Это означает, например, что при прохождении волной расстояния в один миллиметр ее амплитуда уменьшается в $e^{14,8}$ раз, т. е. примерно в 2,67 миллиона раз. Приведенный пример показывает, что переменное электромагнитное поле на частотах радиотехнического диапазона практически не проникает в глубь проводника.

Расстояние Δ°, при прохождении которого электромагнитное поле ослабевает в e раз, называют *глубиной проникновения поля в среду*. Глубина проникновения Δ° определяется как величина, обратная коэффициенту затухания:

$$\Delta^\circ = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a\mu_a}{2}\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta}-1\right)}}. \tag{9.2.22}$$

В случае металла ф-ла (9.2.22) упрощается:

$$\triangle^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}}. \qquad (9.2.23)$$

Как видно из ф-лы (9.2.23) глубина проникновения зависит от частоты: чем больше частота, тем меньше $\triangle^{\circ}$.

9.3. Поляризация волн

Выше было показано, что плоская волна, распространяющаяся в однородной изотропной среде, является поперечной: векторы **E** и **H** перпендикулярны направлению ее распространения (оси Z). Ориентация векторов **E** и **H** относительно осей X и Y зависит от источника, создающего волну.

Пусть, например, волна создается элементарным электрическим вибратором, расположенным на оси Z параллельно оси X. Тогда в области, примыкающей к оси Z и удовлетворяющей условиям, при которых сферическую волну можно приближенно считать плоской (разд. 9.1), вектор **E** будет иметь одну составляющую E_x, а вектор **H** — только составляющую H_y. Поле такой плоской волны в среде без потерь определяется ф-лами:

$$\mathbf{E}=\mathbf{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi); \qquad (9.3.1)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{y}_0 \frac{E_0}{Z_c} \cos(\omega t - kz + \varphi), \qquad (9.3.2)$$

где φ — начальная фаза векторов **E** и **H**, т. е. фаза в точке $z=0$ при $t=0$.

Так как векторы **E** и **H** взаимосвязаны $\left(\mathbf{H}=\frac{1}{Z_c}[\mathbf{z}_0, \mathbf{E}]\right)$, ограничимся рассмотрением одного вектора **E**. Из ф-лы (9.3.1) следует, что направление вектора **E** в течение первой половины периода колебаний совпадает с направлением оси X, а в течение второй половины периода — противоположно ей. Таким образом, в *фиксированной точке пространства* (z) *конец вектора* **E** *с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии,* а величина вектора **E** изменяется от E_0 до $+E_0$. Волны, обладающие таким свойством, принято называть *линейно поляризованными*. Плоскость, проходящую через ось Z и вектор **E**, называют *плоскостью поляризации*. В рассматриваемом примере плоскостью поляризации является плоскость XOZ.

Если источником волны является элементарный магнитный вибратор, параллельный оси X, или элементарный электрический вибратор, параллельный оси Y, то вектор **E** имеет только составляющую E_y, а вектор **H** — только составляющую H_x. Волна в этом случае также будет линейно поляризованной.

Предположим теперь, что волна создается двумя вибраторами, например, взаимно перпендикулярными элементарными электрическими вибраторами, расположенными на оси Z (рис. 9.3.1). В этом случае вектор **E** имеет две составляющие E_x и E_y, которые изменяются либо синфазно, либо с некоторым фазовым сдвигом в зависимости от соотношения между фазами токов вибраторов. Вектор **H** при этом имеет также две составляющие H_x и H_y, связанные с составляющими E_x и E_y соотношениями (9.1.3). Аналогичный

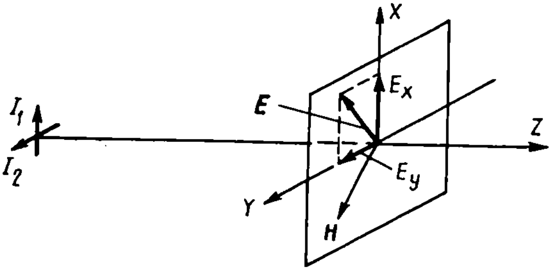


Рис. 9.3.1

результат получается, если в качестве источника волны рассматривать любую другую более сложную систему, излучающую монохроматические электромагнитные волны. Таким образом, в общем случае выражение для вектора **E** плоской волны записывается в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \mathbf{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_2), \qquad (9.3.3)$$

где E_{xm} и E_{ym} — амплитуды составляющих E_x и E_y соответственно, а φ_1 и φ_2 — фазы этих составляющих в точке $z=0$ при $t=0$.

Волну типа (9.3.3) можно рассматривать как суперпозицию двух плоских линейно поляризованных волн с взаимно перпендикулярной ориентацией векторов **E**, распространяющихся в одном направлении (вдоль оси Z). Характер изменения вектора **E** волны (9.3.3) с течением времени *в фиксированной точке пространства* зависит от соотношения между начальными фазами φ_1 и φ_2 и от амплитуд E_{xm} и E_{ym}.

Угол θ (рис. 9.3.2) между осью X и вектором **E** в фиксированной точке пространства (z) определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_2)}{E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_1)}. \qquad (9.3.4)$$

Как следует из ф-лы (9.3.4), угол θ зависит от соотношения между φ_1 и φ_2, а также от отношения E_{ym}/E_{xm}. В общем случае угол θ может изменяться со временем. Предположим сначала, что начальные фазы φ_1 и φ_2 совпадают. Полагая в ф-ле (9.3.4) $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, получаем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi)}{E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi)} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} = \text{const}. \qquad (9.3.5)$$

Следовательно, вектор **E**, определяемый равенством (9.3.3) в любой момент времени, лежит в плоскости, проходящей через ось Z и составляющей угол $\theta = \operatorname{arctg} E_{ym}/E_{xm}$ с плоскостью XOZ (рис.

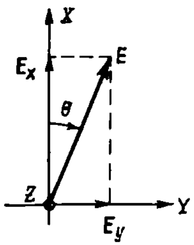


Рис. 9.3.2

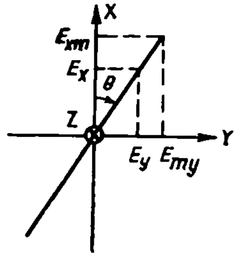


Рис. 9.3.3

9.3.3). Аналогичное явление имеет место также в том случае, если разность между φ_1 и φ_2 равна целому числу π:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi, \text{ где } n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \qquad (9.3.6)$$

В фиксированной точке пространства конец вектора **E** с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии, составляющей с осью X угол $\theta = (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{E_{ym}}{E_{xm}}$. Таким образом, волна (9.3.3) при выполнении условия (9.3.6) является линейно поляризованной. Очевидно, что поворотом осей координат X и Y относительно оси Z в этом случае можно добиться того, чтобы вектор **E** в новой системе координат имел только одну составляющую E_x или E_y.

Рассмотрим второй частный случай. Пусть амплитуды составляющих E_x и E_y равны, а их начальные фазы отличаются на $\pi/2$ ($E_{xm} = E_{ym} = E_0$; $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$). Составляющие E_x и E_y в этом случае определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) \\ E_y &= E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi_1) \end{aligned}\right\}. \qquad (9.3.7)$$

Подставляя ф-лы (9.3.7) в (9.3.4), получаем

$$\operatorname{tg} \theta = E_y/E_x = \operatorname{tg}(\omega t - kz + \varphi_1),$$

откуда следует, что

$$\theta = \omega t - kz + \varphi_1 + m\pi, \qquad (9.3.8)$$

где m — целое число.

Равенство (9.3.8) означает, что угол θ в фиксированной точке пространства (z) увеличивается пропорционально t. Величина вектора **E** при этом остается неизменной:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_1) + E_0^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi_1)} = E_0.$$

Таким образом, *в фиксированной точке пространства вектор* **E**, *оставаясь неизменным по величине, вращается с угловой частотой* ω *вокруг направления* $\mathbf{Z}_0$. *Конец вектора* **E** *при этом описывает окружность* (рис. 9.3.4*а*). *Волны такого типа называют волнами с круговой поляризацией.*

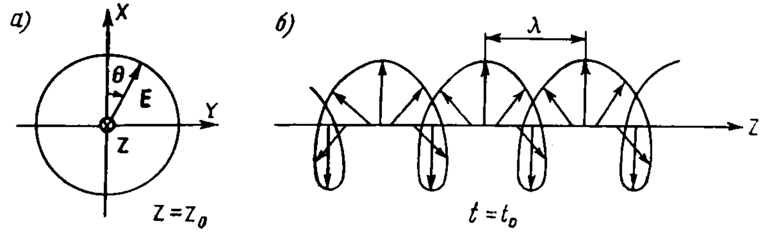


Рис. 9.3.4

Нетрудно убедиться в том, что при $E_{xm}=E_{ym}=E_0$ волна будет иметь круговую поляризацию, если

$$\varphi_1-\varphi_2=\pm\frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ где } n=0,\ 1,\ 2, \qquad (9.3.9)$$

В зависимости от направления вращения вектора **E** различают волны с правой и с левой круговой поляризацией. В случае *правой круговой поляризации вектор* **E** *вращается по часовой стрелке* (если смотреть вдоль направления распространения волны), а в случае *левой круговой поляризации — против часовой стрелки.*

В рассмотренном примере ($E_{xm}=E_{ym}=E_0$; $\varphi_1-\varphi_2=\pi/2$) волна имеет правую круговую поляризацию. Очевидно, что такая же поляризация будет и в том случае, если

$$E_{xm}=E_{ym};\ \varphi_1-\varphi_2=\frac{\pi}{2}(1\pm4n), \text{ где } n=0,\ 1,\ 2, \qquad (9.3.10)$$

При выполнении условий

$$E_{xm}=E_{ym};\ \varphi_1-\varphi_2=-\frac{\pi}{2}(1\pm4n), \text{ где } n=0,\ 1,\ 2, \qquad (9.3.11)$$

волна имеет левую круговую поляризацию.

Таким образом, вектор **E** вращается в направлении от опережающей по фазе составляющей вектора **E** к отстающей. На рис. 9.3.4*б* показана ориентация вектора **E**, соответствующая различным значениям координаты z в фиксированный момент времени, для случая плоской волны с круговой поляризацией, распространяющейся в среде без потерь. Линия, соединяющая концы векторов, является винтовой линией с шагом, равным длине волны. Ее проекция на плоскость XOY образует окружность (рис. 9.3.4 *а*). С течением времени изображенная на рис. 9.3.4 *б* винтовая линия, определяющая ориентацию вектора **E** в зависимости от координаты z, перемещается вдоль оси Z со скоростью $v_ф$.

Из проведенного анализа следует, что любая волна круговой поляризации является суперпозицией двух линейно поляризованных волн.

Покажем, что всякую линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн с круговой поляризацией. Пусть вектор **E** линейно поляризованной волны колеблется в плоскости XOZ. Комплексный вектор $\dot{\mathbf{E}}_m$ в этом случае имеет вид[1])

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 E_0 e^{-ikz}. \qquad (9.3.12)$$

Прибавим и вычтем в правой части ф-лы (9.3.12) вектор $\frac{i}{2}\mathbf{y}_0 E_0 e^{-ikz}$. В результате получим

$$\dot{\mathbf{E}}_m = (\mathbf{x}_0 + i\,\mathbf{y}_0)\frac{E_0}{2} e^{-ikz} + (\mathbf{x}_0 - i\,\mathbf{y}_0)\frac{E_0}{2} e^{-ikz}. \qquad (9.3.13)$$

Первое слагаемое в полученном выражении описывает волну с левой круговой поляризацией, а второе — волну с правой круговой поляризацией.

В общем случае при произвольных соотношениях между начальными фазами φ_1 и φ_2 и амплитудами E_{xm} и E_{ym} вектор **E**, определяемый ф-лой (9.3.3) в фиксированной точке пространства, изменяется и по величине, и по направлению. Найдем форму линии, описываемой при этом концом вектора **E**. Введя обозначение $\zeta = \omega t - kz$, получим из ф-лы (9.3.3) следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_x}{E_{xm}} &= \cos(\zeta + \varphi_1) = \cos\zeta\cos\varphi_1 - \sin\zeta\sin\varphi_1 \\ \frac{E_y}{E_{ym}} &= \cos(\zeta + \varphi_2) = \cos\zeta\cos\varphi_2 - \sin\zeta\sin\varphi_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (9.3.14)$$

Решим систему ур-ний (9.3.14) относительно $\cos\zeta$ и $\sin\zeta$:

$$\cos\zeta = \frac{\dfrac{E_x}{E_{xm}}\sin\varphi_2 - \dfrac{E_y}{E_{ym}}\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad \sin\zeta = \frac{\dfrac{E_x}{E_{xm}}\cos\varphi_2 - \dfrac{E_y}{E_{ym}}\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Возводя обе части этих уравнений в квадрат и почленно складывая получающиеся выражения, приходим к уравнению

$$\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (9.3.15)$$

описывающему эллипс, большая ось которого повернута относительно оси X на угол η (рис. 9.3.5), определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} 2\eta = \frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2 - E_{ym}^2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

---

[1]) Переход к комплексному вектору $\dot{\mathbf{E}}_m$ связан лишь с сокращением записи и не имеет принципиального значения.

Таким образом, в общем случае, т. е. при произвольных φ_1, φ_2, E_{xm} и E_{ym} *в фиксированной точке пространства (z) конец вектора* **E** *описывает эллипс.* Волны такого типа принято называть *эллиптически поляризованными.* Ориентация векторов **E**, соответствующих различным значениям координаты z в фиксированный момент времени, аналогична изображенной на рис. 9.3.4*б*. Отличие состоит в том, что в данном случае проекция винтовой линии, соединяющей концы векторов **E**, на плоскость XOY образует эллипс (рис. 9.3.5).

Очевидно, что линейно поляризованная волна и волна с круговой поляризацией являются частными случаями эллиптически поляризованной волны. Отметим, что понятие линейной, круговой и эллиптической поляризации применимо не только для плоских, но и для других типов волн. Например, сферические волны, создаваемые в дальней зоне элементарным электрическим вибратором (разд. 8.3) или элементарным магнитным вибратором (разд. 8.7), — линейно поляризованы. Действительно, в случае элементарного электрического вибратора вектор **E** колеблется в меридианальной плоскости и в любой фиксированной точке пространства, принадлежащей дальней зоне, его направление либо совпадает с вектором $\boldsymbol{\Theta}_0$, либо противоположно ему. Аналогично в случае элементарного магнитного вибратора вектор **E** лежит в азимутальной плоскости, и в любой фиксированной точке его направление либо совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\Phi}_0$, либо противоположно ему.

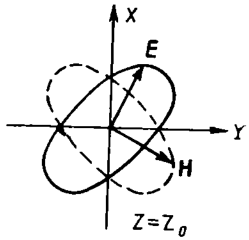


Рис. 9.3.5

Волны, созданные более сложными излучателями, могут иметь и круговую и эллиптическую поляризации. Например, сферическая волна, создаваемая в дальней зоне двумя взаимно перпендикулярными элементарными электрическими вибраторами, токи которых равны по величине и сдвинуты по фазе на $\pi/2$, в направлении, перпендикулярном обоим вибраторам, будет поляризованной по кругу.

При определении поляризации волны до сих пор рассматривался только вектор **E**. Очевидно, такой же анализ для вектора **H** привел бы к аналогичным результатам. В общем случае (при произвольных начальных фазах и амплитудах) конец вектора **H** в фиксированной точке пространства с течением времени также описывает эллипс, подобный эллипсу вектора **E** и повернутый относительно него на угол $\pi/2$ (рис. 9.3.5). В рассмотренных выше частных случаях линейной и круговой поляризаций этот эллипс также вырождается соответственно в отрезок прямой линии и окружность.

Отметим, что в тех случаях, когда анализируемая плоская волна не является однородной (т. е. когда поверхности равных амплитуд не совпадают с поверхностями равных фаз), поляризация волны может быть различной в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (оси Z). Это объясняется тем, что амплитуда неоднородной плоской волны зависит от координат x и y, и при изменении последних может изменяться соотношение между составляющими E_x и E_y. Кроме того, поляризация неоднородной волны, определенная по вектору **E**, может не совпадать с поляризацией волны по вектору **H**.

В данном разделе анализировались однородные плоские волны, распространяющиеся в однородной изотропной среде без потерь. Очевидно, однако, что наличие потерь не изменит характер зависимости поляризации волны от амплитуд и фаз составляющих E_x и E_y.

В заключение выясним условие взаимной перпендикулярности векторов **E** и **H** плоской волны. В общем случае имеют место соотношения:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_{xm} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_1) + \mathbf{y}_0 E_{ym} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_2);$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \frac{E_{xm} e^{-\alpha z}}{|Z_c|} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_1 - \frac{\delta}{2}\right) - \mathbf{x}_0 \frac{E_{ym} e^{-\alpha z}}{|Z_c|} \times$$

$$\times \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_2 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Перемножая скалярно выписанные выражения для векторов **E** и **H**, после несложных преобразований получаем

$$(\mathbf{E},\ \mathbf{H}) = \frac{E_{xm} E_{ym}}{|Z_c|} e^{-2\alpha z} \left\{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{\delta}{2}\right)\right\}. \tag{9.3.16}$$

Для ортогональности векторов необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю. Правая часть равенства (9.3.16) обращается в нуль только в следующих частных случаях: при $\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и при $\delta = 0$.

Первый случай соответствует линейно поляризованной волне, а второй — среде без потерь.

Таким образом, в общем случае векторы **E** и **H** (в отличие от комплексных векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$) в среде с потерями не перпендикулярны друг другу. Это вызвано тем, что в среде с потерями векторы **E** и **H** изменяются несинфазно.

ГЛАВА 10

ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

10.1. Поле однородной плоской волны в системе координат, в которой ни одна из осей не совпадает с направлением распространения волны

В предыдущих главах рассматривалось распространение электромагнитных волн в однородных изотропных средах. Однако при решении многих практически важных задач нельзя считать, что среда является однородной. На структуру поля и характер распространения волны существенно влияет граница раздела сред, обладающих разными свойствами. Попадая на поверхность раздела двух сред, электромагнитная волна может частично (или полностью) отразиться либо частично (или полностью) пройти в другую среду. Кроме того, возможно и более сложное явление, называемое дифракцией волн (см. гл. 12).

Определение поля, возникающего при падении какой-либо электромагнитной волны на границу раздела двух сред, в общем случае (при сложной форме поверхности раздела) сопряжено с большими математическими трудностями. В данной главе рассматривается простейшая задача такого типа: падение плоской электромагнитной волны на плоскую бесконечно протяженную границу раздела двух однородных изотропных сред.

При анализе распространения плоской электромагнитной волны в неограниченной однородной среде была использована прямоугольная система координат, одна из осей которой (ось Z) совпадала с направлением распространения волны.

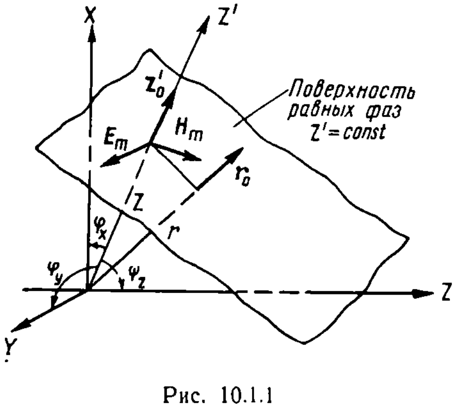


Рис. 10.1.1

Для изучения волновых явлений на границе раздела двух сред систему координат обычно вводят таким образом, чтобы поверхность раздела совпадала с одной из координатных поверхностей. При этом в общем случае направление распространения волны не совпадает ни с одной из координатных осей.

Ограничимся рассмотрением линейно поляризованных волн, так как волны круговой и эллиптической поляризаций можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных плоских волн (разд. 9.3). Предположим, что волна распространяется в однородной изотропной среде вдоль оси Z', образующей с осями X, Y, Z прямоугольной системы координат углы φ_x, φ_y и φ_z соответственно (рис. 10.1.1). Поле однородной плоской волны в среде без потерь (разд. 9.1) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-ikz'}\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \mathbf{H}_0\,\mathrm{e}^{-ikz'}\end{aligned}\right\}. \tag{10.1.1}$$

Векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ не зависят от координат и лежат в плоскостях, перпендикулярных оси Z', причем

$$\mathbf{E}_0 = [\mathbf{H}_0,\ \mathbf{z}_0']\,Z_c, \tag{10.1.2}$$

где

$$\mathbf{z}_0' = \mathbf{x}_0\cos\varphi_x + \mathbf{y}_0\cos\varphi_y + \mathbf{z}_0\cos\varphi_z \tag{10.1.3}$$

— орт оси Z'.

Поверхности равных фаз волны (10.1.1) образуют семейство плоскостей, перпендикулярных оси Z', и удовлетворяют уравнению

$$z' = \left(\mathbf{r},\ \mathbf{z}_0'\right) = \mathrm{const}, \tag{10.1.4}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат до произвольной точки, лежащей на рассматриваемой поверхности равных фаз.

Для перехода к координатам x, y, z нужно вычислить скалярное произведение вектора $\mathbf{r}$ на вектор $\mathbf{z}_0'$. Учитывая, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 x + \mathbf{y}_0 y + \mathbf{z}_0 z, \tag{10.1.5}$$

запишем

$$z' = x\cos\varphi_x + y\cos\varphi_y + z\cos\varphi_z. \tag{10.1.6}$$

Подставляя ф-лу (10.1.6) в (10.1.1), получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-ik\,(x\cos\varphi_x + y\cos\varphi_y + z\cos\varphi_z)}\\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \mathbf{H}_0\,\mathrm{e}^{-ik\,(x\cos\varphi_x + y\cos\varphi_y + z\cos\varphi_z)}\end{aligned}\right\}. \tag{10.1.7}$$

Если проводимость среды отлична от нуля, то в ф-лах (10.1.7) параметр k нужно считать комплексной величиной, равной $k = \beta - i\alpha$, а $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — значениями комплексных амплитуд векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в начале координат. Соотношение (10.1.2) при этом останется справедливым, но волновое сопротивление среды будет комплексным (разд. 9.2).

Прежде чем перейти к анализу волновых явлений на границе раздела двух сред, введем некоторые определения. Назовем плоскость, проходящую через нормаль к поверхности раздела двух сред параллельно направлению распространения волны, *плоскостью падения*. Вектор напряженности электрического поля плоской волны перпендикулярен направлению ее распространения, а по отношению к плоскости падения может быть ориентирован произвольно. Однако, не нарушая общности анализа, можно ограничиться рассмотрением двух ориентаций вектора **E**, а именно:

— вектор **E** перпендикулярен плоскости падения (*нормально поляризованная* плоская волна);

— вектор **E** пераллелен плоскости падения (*параллельно поляризованная* плоская волна).

Очевидно, что волну с любой другой ориентацией вектора **E** можно представить в виде суперпозиции двух волн, одна из которых является нормально поляризованной, а вторая — параллельно поляризованной.

10.2 Падение плоской волны на границу раздела двух диэлектриков

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть линейно поляризованная плоская электромагнитная волна падает на плоскую бесконечно протяженную границу раздела двух диэлектрических сред, характеризуемых параметрами ε_{a1}, μ_{a1} и ε_{a2}, μ_{a2} соответственно. Введем прямоугольную систему координат x, y, z так, чтобы плоскость YOZ совпадала с поверхностью раздела, а плоскость падения — с плоскостью XOZ. Угол φ между направлением распространения волны и нормалью к поверхности раздела будем называть *углом падения* (рис. 10.2.1).

В выбранной системе координат направляющие косинусы φ_x, φ_y и φ_z, определяющие направление распространения волны, равны:

$$\cos\varphi_x = \cos\varphi;\ \cos\varphi_y = 0,\ \cos\varphi_z = \sin\varphi. \qquad (10.2.1)$$

Следовательно, фазовый множитель падающей волны имеет вид $e^{-ik_1(x\cos\varphi + z\sin\varphi)}$, где $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}$.

Остановимся на случае, когда падающая волна является нормально поляризованной, а затем перейдем к рассмотрению параллельной поляризации.

НОРМАЛЬНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Пусть вектор напряженности электрического поля падающей волны ($\dot{\mathbf{E}}_m^0$) параллелен оси Y, при этом вектор напряженности ее магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_m^0$ будет лежать в плоскости падения (рис.

10.2.2). Подставляя ф-лы (10.2.1) в (10.1.7) и учитывая, что в рассматриваемом случае $\mathbf{E}_0=\mathbf{y}_0 E_0$; $\mathbf{H}_0=-(\mathbf{x}_0\sin\varphi-\mathbf{z}_0\cos\varphi)\frac{E_0}{Z_{c1}}$, где $Z_{c1}=\sqrt{\mu_{a1}/\varepsilon_{a1}}$ — волновое сопротивление первой среды, получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_m^0=\mathbf{y}_0 E_0\, e^{-ik_1(x\cos\varphi+z\sin\varphi)},\quad x\leqslant 0; \tag{10.2.2}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^0=-(\mathbf{x}_0\sin\varphi-\mathbf{z}_0\cos\varphi)\frac{E_0}{Z_{c1}}\, e^{-ik_1(x\cos\varphi+z\sin\varphi)},\quad x\leqslant 0. \tag{10.2.3}$$

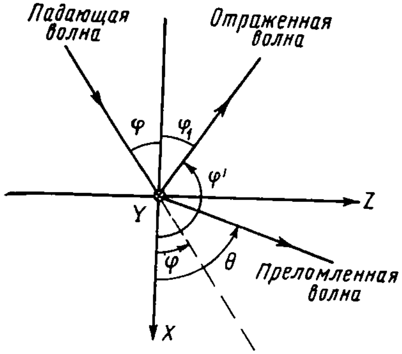


Рис. 10.2.1

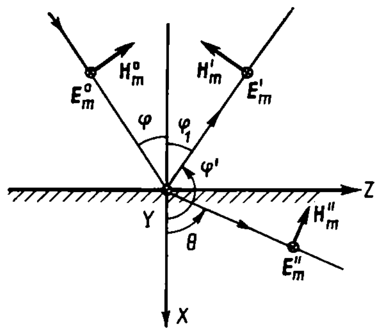


Рис. 10.2.2

Из физических соображений очевидно, что падающая волна может частично (или полностью) отразиться от границы раздела ($x=0$) и частично (или полностью) пройти во вторую среду. Логично предположить, что отраженная и преломленная волны будут плоскими. Если, исходя из этого предположения, удастся построить решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\dot{E}_{1\tau}\big|_{x=0}=\dot{E}_{2\tau}\big|_{x=0}\ \text{и}\ \dot{H}_{1\tau}\big|_{x=0}=\dot{H}_{2\tau}\big|_{x=0}, \tag{10.2.4}$$

где $\dot{E}_{1\tau}$, $\dot{H}_{1\tau}$ и $\dot{E}_{2\tau}$, $\dot{H}_{2\tau}$ — касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в первой и во второй средах соответственно, то, в силу теоремы единственности, можно будет утверждать, что найденное таким образом решение является верным и единственным.

Граничные условия (10.2.4) должны выполняться на всей плоскости $x=0$, т. е. при любых значениях переменных y и z. Так как поле падающей волны (10.2.2)—(10.2.3) не зависит от переменной y, то необходимо предположить, что поле отраженной и преломленной волн также не зависит от координаты y. Это означает, что векторы, определяющие направление распространения отраженной и преломленной волн, параллельны плоскости XOZ. Можно также предположить, что отраженная и преломленная волны являются нормально поляризованными.

С учетом сделанных предположений поле отраженной волны можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{E}}'_m = \mathbf{y}_0 A\, e^{-ik_1(x\cos\varphi'+z\sin\varphi')},\quad x \leqslant 0; \tag{10.2.5}$$

$$\dot{\mathbf{H}}'_m = -(\mathbf{x}_0 \sin\varphi' - \mathbf{z}_0 \cos\varphi')\,\frac{A}{Z_c}\, e^{-ik_1(x\cos\varphi'+z\sin\varphi')},\quad x \leqslant 0, \tag{10.2.6}$$

где $\dot{\mathbf{E}}'_m$ и $\dot{\mathbf{H}}'_m$ — комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей отраженной волны, а φ' — угол между осью X и направлением распространения отраженной волны (рис. 10.2.2).

Так как отраженная волна распространяется в первой среде ($x<\theta$), то угол φ' заключен в пределах $\pi/2 \leqslant \varphi' \leqslant \pi$.

Аналогично записывается поле преломленной волны:

$$\dot{\mathbf{E}}''_m = \mathbf{y}_0 B\, e^{-ik_2(x\cos\theta+z\sin\theta)},\quad x \geqslant 0; \tag{10.2.7}$$

$$\dot{\mathbf{H}}''_m = -(\mathbf{x}_0 \sin\theta - \mathbf{z}_0 \cos\theta)\,\frac{B}{Z_{c2}}\, e^{-ik_2(x\cos\theta+z\sin\theta)},\quad x \geqslant 0, \tag{10.2.8}$$

где $\dot{\mathbf{E}}''_m$ и $\dot{\mathbf{H}}''_m$ — комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей соответственно; θ — угол между осью X и направлением распространения преломленной волны (рис. 10.2.2), называемый *углом преломления;* $Z_{c2}=\sqrt{\mu_{a2}/\varepsilon_{a2}}$ — волновое сопротивление второй среды, а $k_2=\omega\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}$ — постоянная распространения (волновое число) во второй среде.

Ориентация векторов $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ падающей, отраженной и преломленных волн показана на рис. 10.2.2. Углы φ' и θ так же, как и постоянные A и B, являются неизвестными и подлежат определению.

Граничные условия (10.2.4) должны выполняться при всех значениях координаты z. Это возможно только в том случае, если зависимость векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ от переменной z во всех трех волнах будет одинаковой. Поэтому необходимо, чтобы

$$k_1 \sin\varphi = k_1 \sin\varphi', \tag{10.2.9}$$

$$k_1 \sin\varphi = k_2 \sin\theta. \tag{10.2.10}$$

Так как угол φ' заключен в пределах $\pi/2 \leqslant \varphi' \leqslant \pi$, а угол φ может изменяться от нуля до $\pi/2$, то из равенства (10.2.9) следует, что

$$\varphi' = \pi - \varphi. \tag{10.2.11}$$

Обычно вместо угла φ' рассматривают угол $\varphi_1=\pi-\varphi'$, называемый *углом отражения.* Вводя в ф-лу (10.2.11) φ_1 вместо φ', получаем первый закон Снеллиуса («Угол падения равен углу отражения»):

$$\varphi = \varphi_1. \tag{10.2.12}$$

Из равенства (10.2.10) вытекает соотношение

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{k_1}{k_2}, \tag{10.2.13}$$

которое в случае идеальных диэлектрических сред выражает второй закон Снеллиуса («Отношение синуса угла преломления к синусу угла падения равно относительному показателю преломления сред»):

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}}{\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}}=\frac{n_1}{n_2}=n_{12}, \tag{10.2.14}$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй сред, определяемые соотношениями $n_1=c/v_{ф1}$ и $n_2=c/v_{ф2}$ $\left(c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right.$ — скорость света в вакууме; $v_{ф1}=1/\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}$ и $v_{ф2}=1/\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}$ — фазовые скорости волны в первой и второй средах соответственно). Таким образом, ф-лу (10.2.14) можно представить в виде

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{v_{ф2}}{v_{ф1}}. \tag{10.2.15}$$

Отметим, что соотношение (10.2.10) остается верным и в случае проводящих сред. Пусть, например, первая среда — идеальный диэлектрик, а вторая обладает проводимостью, отличной от нуля. Тогда параметр k_2 будет комплексной величиной, а k_1 и угол φ останутся вещественными. Для выполнения равенства (10.2.10) при этом придется считать величину θ комплексной, не имеющей простого геометрического смысла. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в разд. 10.5.

Для определения постоянных A и B используем граничные условия (10.2.4). Так как поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн, а поле во второй среде совпадает с полем преломленной волны, то ф-лы (10.2.4) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\dot E^0_{ym}+\dot E'_{ym}&=\dot E''_{ym}\ \text{при}\ x=0\\ \dot H^0_{zm}+\dot H'_{zm}&=\dot H''_{zm}\ \text{при}\ x=0\end{aligned}\right\}. \tag{10.2.16}$$

Подставляя в эти выражения значения соответствующих составляющих комплексных амплитуд напряженности электрического и магнитного полей и учитывая равенство (10.2.9), приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&E_0+A=B\\ &(E_0-A)\cos\varphi=B\,\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\cos\theta\end{aligned}\right\}. \tag{10.2.17}$$

Из полученных уравнений следует, что постоянные A и B пропорциональны E_0:

$$A=RE_0;\ \ B=\varkappa E_0. \tag{10.2.18}$$

Здесь R и $\varkappa$ — *коэффициенты отражения и прохождения* соответственно. Их также часто называют *коэффициентами Френеля.* В случае нормальной поляризации будем обозначать эти коэффициенты соответственно через $R_\perp$ и $\varkappa_\perp$. Деля обе части равенства (10.2.17) на E_0, получаем

$$\left.\begin{aligned} 1+R_\perp &= \varkappa_\perp \\ 1-R_\perp &= \frac{Z_{c1}\cos\theta}{Z_{c2}\cos\varphi}\varkappa_\perp \end{aligned}\right\}. \tag{10.2.19}$$

Решая эту систему уравнений, находим значения коэффициентов Френеля для случая нормальной поляризации:

$$R_\perp = \frac{Z_{c2}\cos\varphi - Z_{c1}\cos\theta}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\theta}; \tag{10.2.20}$$

$$\varkappa_\perp = \frac{2Z_{c2}\cos\theta}{Z_{c2}\cos\varphi + Z_{c1}\cos\theta}. \tag{10.2.21}$$

В формулах (10.2.20) и (10.2.21) можно исключить угол преломления θ, выразив $\cos\theta$ через синус угла падения: $\cos\theta = \sqrt{1-(k_1/k_2)\sin^2\varphi}$. Указанные формулы справедливы и в том случае, если одна из сред (или обе среды) обладают проводимостью. При этом диэлектрическая проницаемость соответствующей среды будет комплексной величиной, определяемой соотношением (4.4.13). Комплексными также будут соответствующие параметры k и Z_c а, следовательно, и коэффициенты $R_\perp$ и $\varkappa_\perp$. Модуль $R_\perp$ определяет соотношение между амплитудами поля отраженной и падающей волн, а его аргумент характеризует сдвиг фаз между этими полями в точке отражения. Аналогично модуль $\varkappa_\perp$ определяет соотношение между амплитудами поля преломленной и падающей волн, а его аргумент — сдвиг фаз между этими полями в точке преломления. Если проводимостью обладает только вторая среда, а магнитная проницаемость обеих сред одинакова, ф-лы (10.2.20) и (10.2.21) обычно записывают в несколько иной форме. Пусть, например, первая среда — воздух ($\varepsilon_{a1}=\varepsilon_0$), тогда выражение (10.2.20) примет вид

$$R_\perp = \frac{\sin\eta - \sqrt{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0} - \cos^2\eta}}{\sin\eta + \sqrt{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0} - \cos^2\eta}}, \tag{10.2.22}$$

где $\eta=\pi/2-\varphi$ — угол между направлением распространения падающей волны и плоскостью раздела; $\tilde{\varepsilon}_2/\varepsilon_0=\varepsilon_2-i(\sigma_2/\omega\varepsilon_0)=\varepsilon_2-i\,60\,\lambda\sigma_2$, а $\varepsilon_2=\varepsilon_{a2}/\varepsilon_0$ — относительная диэлектрическая проницаемость второй среды.

Таким образом, поле, возникающее в результате падения на плоскую границу раздела двух сред нормально поляризованной плоской волны, в первой среде определяется выражениями:

$$\dot{\mathbf{E}}_{1m} = \dot{\mathbf{E}}_m^0 + \dot{\mathbf{E}}_m' = \mathbf{y}_0 E_0 \left(e^{-ik_1 x\cos\varphi} + R_\perp e^{ik_1 x\cos\varphi} \right) e^{-ik_1 z\sin\varphi}, \quad x \leqslant 0; \tag{10.2.23}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{1m} = \dot{\mathbf{H}}_m^0 + \dot{\mathbf{H}}_m' = -\mathbf{x}_0 \sin\varphi \frac{E_0}{Z_{c1}} \left(e^{-ik_1 x\cos\varphi} + R_\perp e^{ik_1 x\cos\varphi} \right) e^{-ik_1 z\sin\varphi} +$$

$$+ \mathbf{z}_0 \cos\varphi \frac{E_0}{Z_{c1}} \left(e^{-ik_1 x\cos\varphi} - R_\perp e^{ik_1 x\cos\varphi} \right) e^{-ik_1 z\sin\varphi}, \quad x \leqslant 0, \tag{10.2.24}$$

а во второй среде

$$\dot{\mathbf{E}}_{2m} = \mathbf{y}_0 E_0 \varkappa_\perp e^{-ik_2 (x\cos\theta + z\sin\theta)}, \quad x \geqslant 0; \tag{10.2.25}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{2m} = -(\mathbf{x}_0 \sin\theta - \mathbf{z}_0 \cos\theta) \frac{E_0 \varkappa_\perp}{Z_{c2}} e^{-ik_2 (x\cos\theta + z\sin\theta)}, \quad x \geqslant 0. \tag{10.2.26}$$

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Рассмотрим теперь случай параллельной поляризации. Так как вектор напряженности электрического поля подающей волны этом случае параллелен плоскости падения (плоскости XOZ), а вектор напряженности магнитного поля ей перпендикулярен (рис. 10.2.3), то уравнения, описывающие поле падающей волны, можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^0 = (\mathbf{x}_0 \sin\varphi - \mathbf{z}_0 \cos\varphi) E_0 e^{-ik_1 (x\cos\varphi + z\sin\varphi)}, \quad x \leqslant 0; \tag{10.2.27}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m^0 = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{Z_{c1}} e^{-ik_1 (x\cos\varphi + z\sin\varphi)}, \quad x \leqslant 0. \tag{10.2.28}$$

Рассуждая так же, как и в случае нормальной поляризации, предположим, что отраженная и преломленная волны являются плоскими, а соответствующее им поле не зависит от координаты y.

$$\dot{\mathbf{E}}_m' = (\mathbf{x}_0 \sin\varphi' - \mathbf{z}_0 \cos\varphi') A e^{-ik_1 (x\cos\varphi' + z\sin\varphi')}, \quad x \leqslant 0, \tag{10.2.29}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m' = \mathbf{y}_0 \frac{A}{Z_{c1}} e^{-ik_1 (x\cos\varphi' + z\sin\varphi')}, \quad x \leqslant 0; \tag{10.2.30}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m'' = (\mathbf{x}_0 \sin\theta - \mathbf{z}_0 \cos\theta) B e^{-ik_2 (x\cos\theta + z\sin\theta)}, \quad x \geqslant 0; \tag{10.2.31}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m'' = \mathbf{y}_0 \frac{B}{Z_{c2}} e^{-ik_2 (x\cos\theta + z\sin\theta)}, \quad x \geqslant 0. \tag{10.2.32}$$

Входящие в ф-лы (10.2.29)—(10.2.32) постоянные A и B, а также углы φ' и θ должны быть определены из граничных условий (10.2.4), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{zm}^0 + \dot{E}_{zm}' = \dot{E}_{zm}'', \quad x = 0 \\ \dot{H}_{ym}^0 + \dot{H}_{ym}' = \dot{H}_{zm}'', \quad x = 0 \end{aligned} \right\}. \tag{10.2.33}$$

Граничные условия (10.2.33) должны выполняться при всех значениях координаты z. Для этого необходимо, чтобы поля всех трех волн одинаково зависели от координаты z. Следовательно, должны выполняться соотношения (10.2.9) и (10.2.10). Иными словами, законы Снеллиуса не зависят от поляризации падающей волны.

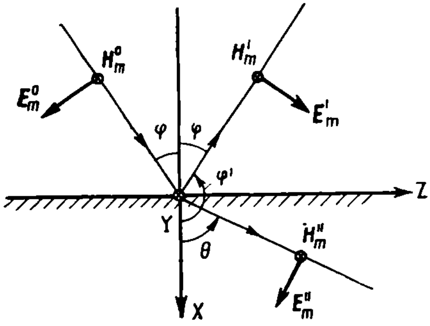


Рис. 10.2.3

Подставляя в ф-лы (10.2.33) значения соответствующих комплексных амплитуд и учитывая соотношения (10.2.9), (10.2.10), приходим к системе двух алгебраических уравнений относительно постоянных A и B. Вводя коэффициенты $R_{\parallel}$ и $\varkappa_{\parallel}$ на основе равенств (10.2.18), получаем

$$\left.\begin{aligned} 1-R_{\parallel} &= \varkappa_{\parallel}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \\ 1+R_{\parallel} &= \varkappa_{\parallel}\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (10.2.34)$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения коэффициентов Френеля для случая параллельной поляризации:

$$R_{\parallel} = \frac{A}{E_0} = \frac{Z_{c1}\cos\varphi - Z_{c2}\cos\theta}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\theta}; \qquad (10.2.35)$$

$$\varkappa_{\parallel} = \frac{B}{E_0} = \frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c1}\cos\varphi + Z_{c2}\cos\theta}. \qquad (10.2.36)$$

Как и в ф-лах (10.2.20) и (10.2.21), в выражениях (10.2.35) и (10.2.36) можно исключить угол преломления θ.

Как видно из полученных результатов, коэффициенты Френеля для нормальной и параллельной поляризации существенно отличаются друг от друга.

Изложенное выше относительно $R_{\perp}$ и $\varkappa_{\perp}$ для случая, когда одна или обе среды обладают проводимостью, в равной мере относится и к данному случаю. Если магнитные проницаемости сред одинаковы, а проводимостью обладает только вторая среда, то ф-лы (10.2.35) и (10.2.36) записывают в несколько иной форме. Например, если первая среда — воздух ($\varepsilon_{a1}=\varepsilon_0$), то выражение (10.2.35) принимает вид

$$R_{\parallel} = \frac{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0}\sin\eta - \sqrt{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0} - \cos^2\eta}}{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0}\sin\eta + \sqrt{\dfrac{\tilde{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0} - \cos^2\eta}}. \qquad (10.2.37)$$

Таким образом, поле, возникающее в результате падения параллельно поляризованной плоской волны на плоскую границу раздела двух однородных изотропных сред, в первой среде определяется выражениями:

$$\dot{\mathbf{E}}_{1m} = \dot{\mathbf{E}}_m^0 + \dot{\mathbf{E}}_m' = \mathbf{x}_0 \sin\varphi\, E_0 \left(e^{-ik_1 x\cos\varphi} + R_\parallel\, e^{ik_1 x\cos\varphi} \right) e^{-ik_1 z\sin\varphi} -$$
$$- \mathbf{z}_0 \cos\varphi\, E_0 \left(e^{-ik_1 x\cos\varphi} - R_\parallel\, e^{ik_1 x\cos\varphi} \right) e^{-ik_1 z\sin\varphi},\quad x \leqslant 0; \qquad (10.2.38)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{1m} = \dot{\mathbf{H}}_m^0 + \dot{\mathbf{H}}_m' = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{Z_{c1}} \left(e^{-ik_1 x\cos\varphi} + R_\parallel\, e^{ik_1 x\cos\varphi} \right) e^{-ik_1 z\sin\varphi},\quad x \leqslant 0, \qquad (10.2.39)$$

а во второй среде —

$$\dot{\mathbf{E}}_{2m} = \dot{\mathbf{E}}_m'' = (\mathbf{x}_0 \sin\theta - \mathbf{z}_0 \cos\theta)\, E_0 \varkappa_\parallel\, e^{-ik_2 (x\cos\theta + z\sin\theta)},\quad x \geqslant 0; \qquad (10.2.40)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{2m} = \dot{\mathbf{H}}_m'' = \mathbf{y}_0 \frac{E_0 \varkappa_\parallel}{Z_{c2}}\, e^{-ik_2 (x\cos\theta + z\sin\theta)},\quad x \geqslant 0. \qquad (10.2.41)$$

Отметим, что в случае нормального падения плоской волны теряет определенность понятие плоскости падения и, следовательно, исчезает различие между нормально поляризованными и параллельно поляризованными волнами. Так как в этом случае $\varphi = \theta$ и $\theta = \theta$, то коэффициенты Френеля принимают вид:

$$R_\perp = -R_\parallel = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}};\quad \varkappa_\perp = \varkappa_\parallel = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}.$$

10.3. Условие полного прохождения волны во вторую среду (угол Брюстера)

Выясним условия, при которых падающая волна целиком проходит во вторую среду, т. е. отражение отсутствует. В этом случае коэффициент отражения R должен быть равен нулю.

Рассмотрим сначала случай параллельной поляризации. Приравнивая нулю выражение (10.2.35), определяющее коэффициент отражения $R_\parallel$, получаем $Z_{c2} \cos\theta = Z_{c1} \cos\varphi$. Возводя в квадрат обе части этого равенства и учитывая, что $\cos^2\theta = 1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2\varphi$, получаем

$$\sin^2\varphi = \frac{Z_{c1}^2 - Z_{c2}^2}{Z_{c1}^2 - Z_{c2}^2} = \frac{1 - (\mu_2\varepsilon_1/\mu_1\varepsilon_2)}{1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2}. \qquad (10.3.1)$$

Очевидно, что полученное равенство может выполняться только при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ [1]).

---

[1]) Случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\mu_1 = \mu_2$ не рассматривается, так как он соответствует заполнению всего пространства однородной средой.

Для обычных диэлектриков можно считать, что $\mu_1=\mu_2=1$ и выражение (10.3.1) принимает вид

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{1+(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}=\frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1}{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{10.3.2}$$

Таким образом, для обычных диэлектриков ($\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$; $\mu_1=\mu_2=1$) существует угол падения, называемый *углом Брюстера*, при котором падающая волна целиком проходит во вторую среду. В общем случае (при $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$ и $\mu_1\neq\mu_2$) для существования угла Брюстера необходимо выполнение неравенств

$$0<\frac{1-\mu_2\varepsilon_1/\mu_1\varepsilon_2}{1-(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2}<1. \tag{10.3.3}$$

Рассмотрим теперь случай нормальной поляризации. Полагая коэффициент отражения $R_\perp$, определяемый ф-лой (10.2.20), равным нулю, получаем $Z_{c2}\cos\varphi=Z_{c1}\cos\theta$. Поступая далее так же, как и при анализе параллельной поляризации, приходим к соотношению

$$\sin^2\varphi=\frac{1-\mu_1\varepsilon_2/\mu_2\varepsilon_1}{1-(\mu_1/\mu_2)^2}. \tag{10.3.4}$$

Равенство (10.3.4) выполняется только при $\mu_1\neq\mu_2$. Если при этом $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, то для угла φ получается простое соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \tag{10.3.5}$$

В общем случае (при $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$ и $\mu_1\neq\mu_2$) для существования угла Брюстера при нормальной поляризации необходимо выполнение неравенств

$$0<\frac{1-(\mu_1\varepsilon_2/\mu_2\varepsilon_1)}{1-(\mu_1/\mu_2)^2}<1. \tag{10.3.6}$$

Таким образом, при нормальной поляризации падающей волны необходимым (но не достаточным!) условием существования угла Брюстера является условие $\mu_1\neq\mu_2$. От границы раздела обычных диэлектриков ($\mu_1=\mu_2=1$) нормально поляризованная волна отражается при любых углах падения.

Плоские волны круговой и эллиптической поляризации (разд. 9.3) можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных плоских волн, одна из которых поляризована нормально, а другая — параллельно плоскости падения. Так как условия существования угла Брюстера для параллельной и нормальной поляризации различны, то волны с круговой и эллиптической поляризациями будут отражаться при любых углах падения ($0\leqslant\varphi<$ $<\pi/2$). Однако при этом соотношение между амплитудами нормальной и параллельной составляющих в отраженной и преломленной волнах будет иным, чем в падающей волне. Это приводит к изменению поляризации отраженной и преломленной волн по сравнению с падающей. В частности, если плоская волна с круговой поляризацией падает под углом Брюстера для одной из двух образующих ее линейно поляризованных волн, то отраженная волна оказывается линейно поляризованной, а преломленная — эллиптически поляризованной.

10.4. Полное отражение от границы раздела двух сред

ДВЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СРЕДЫ

Определим условия, при которых отсутствует преломленная волна, т. е. имеет место полное отражение. Угол преломления θ может изменяться от нуля до $\pi/2$. Значение $\theta=\pi/2$ является предельным. Назовем угол падения $\varphi=\varphi_{кр}$, при котором $\theta=\pi/2$, критическим углом. Полагая во втором законе Снеллиуса $\theta=\pi/2$, получаем

$$\sin\varphi_{кр}=\frac{k_2}{k_1}\,. \tag{10.4.1}$$

Так как $\sin\varphi_{кр}$ не может быть больше единицы, полученное равенство возможно лишь в том случае, если $k_2<k_1$, т. е. при условии, что вторая среда является оптически менее плотной, чем первая $(n_2<n_1)$.

При углах падения, больших критического, по-видимому, должно иметь место полное отражение, т. е. по абсолютной величине коэффициент отражения должен быть равен единице. Проверим это предположение.

Из равенства (10.4.1) следует, что критический угол падения

$$\varphi_{кр}=\arcsin\frac{k_2}{k_1}\,. \tag{10.4.2}$$

Второй закон Снеллиуса (10.2.10) справедлив при любых углах падения φ. Однако при $\varphi>\varphi_{кр}$ синус угла преломления

$$\sin\theta=\frac{k_1}{k_2}\sin\varphi \tag{10.4.3}$$

становится больше единицы. Этого не может быть при вещественных значениях угла θ. Предположим, что угол θ является комплексным: $\theta=\xi+i\eta$. Тогда $\sin\theta=\sin(\xi+i\eta)=\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta+i\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta$, и для того, чтобы выполнялось условие $\sin\theta>1$, достаточно считать $\xi=\frac{\pi}{2}(4n+1)$, где $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ При этом $\sin\xi=1$ и $\cos\xi=0$, а $\sin\theta=\mathrm{ch}\,\eta>1$ при любом $\eta\neq0$.

Так как $\sin\theta>1$, то $\cos\theta$ оказывается чисто мнимой величиной. При этом коэффициенты отражения $R_\perp$ и $R_\parallel$, определяемые ф-лами (10.2.20) и (10.2.35), выражаются как $(a\pm ib)/(a\mp ib)$, где a и

b — вещественные числа. Следовательно, по абсолютной величине $R_\perp$ и $R_\parallel$ равны единице и могут быть представлены в форме:

$$R_\perp = e^{i\psi_\perp}; \; R_\parallel = e^{i\psi_\parallel}. \qquad (10.4.4)$$

Это означает, в частности, что средняя плотность потока энергии одинакова в падающей и в отраженной волнах.

Таким образом, для возникновения полного отражения необходимо выполнение двух условий:

— вторая среда должна быть оптически менее плотной по сравнению с первой ($k_2<k_1$ или $n_2<n_1$);

— угол падения должен быть больше критического ($\varphi>\varphi_{кр}$).

Выпишем выражения для поля в первой среде. Сначала рассмотрим случай нормальной поляризации.

Полагая в (10.2.23) $R_\perp = e^{i\psi_\perp}$ и вынося за скобки $e^{i\frac{\psi_\perp}{2}}$, получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_{1m} = \mathbf{y}_0 2E_0 \cos\left(k_1 x\cos\varphi + \frac{\psi_\perp}{2}\right) e^{i\frac{\psi_\perp}{2}} e^{-ik_1 z\sin\varphi}, \quad x \leqslant 0. \qquad (10.4.5)$$

Аналогично преобразовывается выражение (10.2.24) для напряженности магнитного поля:

$$\dot{\mathbf{H}}_{1m} = -\mathbf{x}_0 \frac{2E_0}{Z_{c1}} \sin\varphi\cos\left(k_1 x\cos\varphi + \frac{\psi_\perp}{2}\right) e^{i\frac{\psi_\perp}{2}} e^{-ik_1 z\sin\varphi} -$$

$$- i\,\mathbf{z}_0 \frac{2E_0}{Z_{c1}} \cos\varphi\sin\left(k_1 x\cos\varphi + \frac{\psi_\perp}{2}\right) e^{i\frac{\psi_\perp}{2}} e^{-ik_1 z\sin\varphi}, \quad x \leqslant 0. \qquad (10.4.6)$$

В случае параллельной поляризации

$$\dot{\mathbf{E}}_{1m} = \mathbf{x}_0 2E_0 \sin\varphi\cos\left(k_1 x\cos\varphi + \frac{\psi_\parallel}{2}\right) e^{i\frac{\psi_\parallel}{2}} e^{-ik_1 z\sin\varphi} +$$

$$+ i\,\mathbf{z}_0 2E_0 \cos\varphi\sin\left(k_1 x\cos\varphi + \frac{\psi_\parallel}{2}\right) e^{i\frac{\psi_\parallel}{2}} e^{-ik_1 z\sin\varphi}, \quad x \leqslant 0; \qquad (10.4.7)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{1m} = \mathbf{y}_0 \frac{2E_0}{Z_{c1}} \cos\left(k_1 x\cos\varphi + \frac{\psi_\parallel}{2}\right) e^{i\frac{\psi_\parallel}{2}} e^{-ik_1 z\sin\varphi}, \quad x \leqslant 0. \qquad (10.4.8)$$

Из полученных формул следует, что в первой среде электромагнитное поле имеет структуру плоской волны, распространяющейся вдоль поверхности раздела (вдоль оси Z), т. е. является направляемой волной. Поверхности равных фаз образуют семейство плоскостей, перпендикулярных оси Z. Амплитуды векторов **E** и **H** зависят от координаты x и угла падения φ. Поверхности равных амплитуд образуют семейство плоскостей, перпендикулярных оси

X. Так как поверхности равных амплитуд и равных фаз не совпадают друг с другом (они образуют взаимно перпендикулярные плоскости), то волна является неоднородной плоской волной.

В отличие от плоской волны, свободно распространяющейся в однородной изотропной среде и всегда являющейся поперечной, в рассматриваемой волне имеются продольные (параллельные направлению распространения) составляющие векторов поля. В случае нормальной поляризации вектор **H** имеет как поперечную (H_x), так и продольную (H_z) составляющие, а вектор **E** целиком лежит в поперечной плоскости. В случае параллельной поляризации, наоборот, вектор **E** имеет и продольную (E_z) и поперечную (E_x) составляющие, а вектор **H** целиком лежит в поперечной плоскости.

Фазовая скорость рассматриваемой волны

$$\mathbf{v}_\phi = \mathbf{z}_0 \frac{\omega}{k_1 \sin\varphi} = \frac{\mathbf{z}_0}{\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}\sin\varphi} \tag{10.4.9}$$

больше фазовой скорости волны, распространяющейся в однородной среде с параметрами ε_{a1}, μ_{a1} $(v_{\phi 1} = \omega/k_1 = 1/\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}})$, но меньше, чем фазовая скорость волны, распространяющейся в однородной среде с параметрами ε_{a2}, μ_{a2} $(v_{\phi 2} = \omega/k_2 = 1/\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}})$. Действительно, так как $k_1 \sin\varphi = k_2 \sin\theta$, причем $0 < \sin\varphi < 1$, а $\sin\theta > 1$, то выполняются неравенства $k_1 > k_1 \sin\varphi > k_2$, из которых следует, что $\frac{\omega}{k_1} < \frac{\omega}{k_1 \sin\varphi} < \frac{\omega}{k_2}$, или

$$v_{\phi 1} < v_\phi < v_2. \tag{10.4.10}$$

Из ф-лы (10.4.9) видно, что фазовая скорость уменьшается с увеличением угла падения. Ее минимальное значение при $\varphi \to \pi/2$ равно скорости света в первой среде.

Длина волны λ_z вдоль направления распространения (оси Z)

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_1 \sin\varphi} \tag{10.4.11}$$

больше длины волны, свободно распространяющейся в первой среде $\lambda_1 = 2\pi/k_1$, но меньше, чем длина волны, свободно распространяющейся во второй среде $(\lambda_2 = 2\pi/k_2)$:

$$\lambda_1 < \lambda_z < \lambda_2. \tag{10.4.12}$$

Изменение составляющих векторов **E** и **H** в первой среде вдоль любой линии, перпендикулярной поверхности раздела (т. е. параллельной оси X), имеет характер стоячей волны (рис. 10.4.1) с длиной

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_1 \cos\varphi}. \tag{10.4.13}$$

Поперечные составляющие векторов **E** и **H** изменяются в фазе. Продольная составляющая вектора **H** (или **E**) сдвинута по фазе относительно поперечных составляющих векторов **E** и **H** на $\pi/2$.

Комплексный вектор Пойнтинга определяется выражением

$$\widetilde{\Pi} = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathrm{E}},\ \dot{\mathrm{H}}\right] = \mathrm{z}_0 \frac{2E_0^2}{Z_{c1}} \sin\varphi \cos^2\left(k_1 x \cos\varphi + \frac{\psi}{2}\right) \pm$$

$$\pm\ \mathrm{i}\,\mathrm{x}_0 \frac{2E_0^2}{Z_{c1}} \cos\varphi_1 \sin\left(2k_1 x \cos\varphi + \psi\right). \qquad (10.4.14)$$

Здесь знак «+» соответствует случаю нормальной поляризации, а знак «—» — параллельной поляризации. Постоянная ψ в зависимости от типа поляризации падающей волны равна $\psi_\perp$ или $\psi_\parallel$. Из ф-лы (10.4.14) следует, что комплексный вектор Пойнтинга имеет две составляющие $\widetilde{\Pi}_x$ и $\widetilde{\Pi}_z$, сдвинутые по фазе на $\pi/2$.

Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\Pi_{\text{ср}} = \mathrm{Re}\widetilde{\Pi} = \mathrm{z}_0 \frac{2E_0^2}{Z_{c1}} \sin\varphi \cos^2\left(k_1 x \cos\varphi + \frac{\psi}{2}\right). \qquad (10.4.15)$$

Следовательно, в среднем энергия распространяется только в направлении оси Z, т. е. вдоль поверхности раздела. В направлении, перпендикулярном поверхности раздела, существует только реактивный поток энергии.

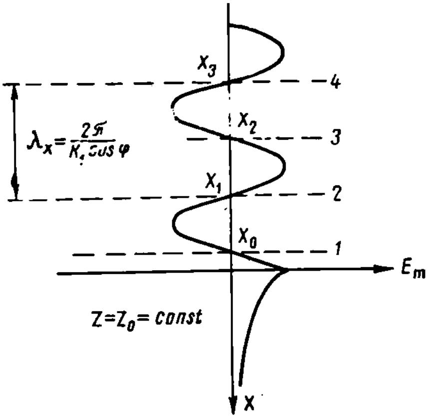


Рис. 10.4.1

Имеется бесчисленное множество плоскостей, перпендикулярных оси X, на которых касательная к ним составляющая напряженности электрического поля (E_y в случае нормальной и E_z в случае параллельной поляризации) и нормальная составляющая напряженности магнитного поля (H_x) тождественно равны нулю (рис. 10.4.1). Точки пересечения этих плоскостей с осью X определяются из уравнения $\cos\left(k_1 x \cos\psi + \frac{\psi}{2}\right) = 0$, где ψ равно $\psi_\perp$ или $\psi_\parallel$ в зависимости от поляризации волны. Например, в случае нормальной поляризации

$$x_n = -\frac{\pi(2n+1) + \psi_\perp}{2k_1 \cos\varphi}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (10.4.16)$$

На таких плоскостях векторы **E** и **H** автоматически удовлетворяют условиям, эквивалентным граничным условиям на поверхности идеально проводящего металла. Кроме того, поток энергии (как активный, так и реактивный) через эти плоскости тождественно равен нулю ($\widetilde{\Pi}_x \equiv 0$). Это означает в частности, что если бы одна из этих плоскостей (например, $x = x_n$) действительно была идеально проводящей, то структура поля над этой плоскостью, т. е. при $x_n > x > -\infty$, осталась бы прежней.

Средняя скорость распространения энергии направлена вдоль оси Z. Для ее определения выделим в поле рассматриваемой волны энергетическую трубку (разд. 4.3), через боковую поверхность которой поток энергии в любой момент времени равен нулю. Например, в случае нормальной поляризации в качестве такой трубки можно выделить объем, заключенный между двумя соседними плоскостями, которые определяются ур-нием (10.4.16). Этот объем может быть произвольно протяженным вдоль оси Y. Так как в пределах поперечного сечения этой трубки значения вектора Пойнтинга $\mathbf{П}$ и объемной плотности электромагнитной энергии w зависят от переменной x, то для вычисления скорости переноса энергии нужно воспользоваться ф-лой (4.5.35). При этом получим

$$\mathbf{v}_э = \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \mathbf{П}_{ср}\, dx \Big/ \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} w_{ср} dx,$$

где $\mathbf{П}_{ср}$ и $w_{ср}$ — средние за период значения вектора $\mathbf{П}$ и w соответственно. Вычисляя входящие в это выражение интегралы, получаем

$$\mathbf{v}_э = \frac{\mathbf{z}_0}{\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}} \sin\varphi. \qquad (10.4.17)$$

Таким образом, скорость распространения энергии меньше скорости света в первой среде.

Из ф-л (10.4.9) и (10.4.17) следует, что произведение фазовой скорости на скорость распространения энергии равно квадрату скорости света в первой среде:

$$v_ф v_э = \frac{1}{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}} = v_0^2. \qquad (10.4.18)$$

Перейдем к анализу свойств поля, возникающего во второй среде. В случае нормальной поляризации векторы $\dot{\mathbf{E}}_{2m}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{2m}$ определяются ф-лами (10.2.25) и (10.2.26). Так как при полном отражении от границы раздела двух диэлектриков $\cos\theta$ является мнимой величиной, удобно ввести обозначение

$$k_2 \cos\theta = -\mathrm{i}\,\alpha, \qquad (10.4.19)$$

где

$$\alpha = \sqrt{k_1^2 \sin^2\varphi - k_2^2} \qquad (10.4.20)$$

при $\varphi > \varphi_{кр}$ — вещественное число.

Знак «—» при $\mathrm{i}\alpha$ в ф-ле (10.4.19) выбран из физических соображений (при выборе знака «+» амплитуда поля во второй среде с удалением от границы раздела вдоль оси X будет возрастать до бесконечности, что невозможно).

Учитывая ф-лу (10.4.19) и соотношение (10.2.10), перепишем ф-лы (10.2.25) и (10.2.26) в форме

$$\dot{\mathbf{E}}_{2m} = \mathbf{y}_0 E_0 \varkappa_{\perp} e^{-\alpha x} e^{-ik_1 z \sin\varphi}, \quad x \geqslant 0; \qquad (10.4.21)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{2m} = -\left(\mathbf{x}_0 \sin\varphi + i\, \mathbf{z}_0 \frac{\alpha}{k_1}\right) \frac{k_1 E_0 \varkappa_{\perp}}{k_2 Z_{c2}} e^{-\alpha x} e^{-ik_1 z \sin\varphi}, \quad x \geqslant 0. \qquad (10.4.22)$$

Аналогично в случае параллельной поляризации

$$\dot{\mathbf{E}}_{2m} = \left(\mathbf{x}_0 \sin\varphi + i\, \mathbf{z}_0 \frac{\alpha}{k_1}\right) \frac{k_1 E_0 \varkappa_{\parallel}}{k_2} e^{-\alpha x} e^{-ik_1 z \sin\varphi}, \quad x \geqslant 0; \qquad (10.4.23)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{2m} = \mathbf{y}_0 \frac{E_0 \varkappa_{\parallel}}{Z_{c2}} e^{-\alpha x} e^{-ik_1 z \sin\varphi}, \quad x \geqslant 0. \qquad (10.4.24)$$

Из ф-л (10.4.21)—(10.4.22) и (10.4 23)—(10.4.24) следует, что во второй среде электромагнитное поле имеет структуру плоской неоднородной волны, распространяющейся вдоль оси Z. Поверхности равной фазы (z=const) и равной амплитуды (x=const) взаимно перпендикулярны. Фазовая скорость и длина волны (λ_z) такие же, как в первой среде, и определяются ф-лами (10.4.9) и (10.4.11) соответственно. Имеются продольные составляющие векторов поля (H_z в случае нормальной поляризации и E_z в случае параллельной поляризации). Продольные составляющие сдвинуты по фазе относительно поперечных на $\pi/2$.

Вектор Пойнтинга имеет две составляющие $\widetilde{\Pi}_z$ и $\widetilde{\Pi}_x$. При этом составляющая $\widetilde{\Pi}_z$ является вещественной, а составляющая $\widetilde{\Pi}_x$ — чисто мнимой. Это означает, что во второй среде так же, как в первой среде, энергия в среднем распространяется только в направлении оси Z. В направлении, перпендикулярном поверхности раздела, существует только реактивный поток энергии.

Амплитуды векторов поля экспоненциально убывают с удалением от поверхности раздела (рис. 10.4.1). Постоянная α, определяющая скорость этого убывания, зависит от угла падения φ. При $\varphi=\varphi_{кр}$ постоянная α равна нулю. При изменении угла φ от от $\varphi_{кр}$ до $\pi/2$ постоянная α возрастает от нуля до $\sqrt{k_1^2-k_2^2}$. Таким образом, при $\varphi>\varphi_{кр}$ волна во второй среде фактически существует лишь в некотором слое, примыкающем к поверхности раздела, и распространяется вдоль границы раздела. Такая волна называется *поверхностной.*

Для вычисления скорости распространения энергии нужно выбрать энергетическую трубку, на боковой поверхности которой нормальная составляющая вектора Пойнтинга равна нулю. В качестве такой трубки в рассматриваемом случае нужно выбрать объем, протяженный по оси X от $x=\infty$ до первой плоскости, на которой составляющая $\widetilde{\Pi}_x$ равна нулю. Эта плоскость расположена в первой среде и, как это следует из ф-лы (10.4.14), пересекает ось X в точке $x=-\psi/2k_1\cos\varphi$, определяемой из уравнения $\sin(2k_1x\cos\varphi+\psi)=0$, где ψ равно $\psi_\perp$ или $\psi_\parallel$ в зависимости от поляризации падающей волны. Вычисляя $\mathbf{v}_э$ по ф-ле (4.5.35), получаем, что скорость распространения энергии во второй среде имеет такое же значение, как и в первой, т. е. определяется выражением (10.4.17).

ДИЭЛЕКТРИК И ИДЕАЛЬНЫЙ ПРОВОДНИК

Все выводы данного раздела были получены в предположении, что обе среды являются идеальными диэлектриками. Тем не менее полученные выражения позволяют также исследовать случай, когда первая среда представляет собой диэлектрик, а вторая — идеальный металл. Как уже отмечалось, волновое сопротивление идеального металла равно нулю (разд. 9.2). Поэтому для перехода к случаю падения плоской волны из диэлектрика с параметрами ε_{a1}, μ_{a1} на плоскую идеально проводящую поверхность нужно в окончательных формулах положить $Z_{c2}=0$. При этом

$$\left.\begin{aligned} R_\perp &= -1, & \varkappa_\perp &= 0, & \psi_\perp &= \pi \\ R_\parallel &= 1, & \varkappa_\parallel &= 0, & \psi_\parallel &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.4.25)$$

при любом угле падения φ. Следовательно, полное отражение от поверхности идеального металла имеет место при любых углах падения. Поле во второй среде тождественно равно нулю, а в первой представляет собой направляемую волну, распространяющуюся вдоль границы раздела (вдоль оси Z).

Фазовая скорость, длина волны λ_z и скорость распространения энергии в этом случае такие же, как при полном отражении от границы раздела двух диэлектриков, и определяются ф-лами (10.4.9), (10.4.11) и (10.4.17) соответственно. Структура поля вдоль оси X также имеет характер стоячей волны с длиной λ_x, определяемой выражением (10.4.13).

10.5. Падение плоской волны на границу поглощающей среды

Пусть плоская волна падает под углом φ на плоскую границу раздела двух сред, из которых первая — идеальный диэлектрик, а вторая — поглощающая. Общие формулы, полученные в разд. 10.2, можно использовать и в этом случае, если считать в них параметр k_2 комплексной величиной: $k_2=\beta_2-i\alpha_2$. Из второго закона Снеллиуса следует, что при этом синус угла преломления ($\sin\theta$) также становится комплексным (см. 10.4.3), так как k_1 и $\sin\varphi$ — вещественные числа, а k_2 — комплексная величина.

Это означает, что параметр θ нельзя рассматривать как геометрический угол, под которым распространяется преломленная волна. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} k_2 \sin\theta &= k_1 \sin\varphi = \beta_z \\ k_2 \cos\theta &= \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\varphi} = \beta_x - \mathrm{i}\,\alpha \end{aligned}\right\}, \tag{10.5.1}$$

где α, β_x и β_z — вещественные числа.

Выпишем формулы для поля во второй среде, ограничиваясь случаем нормальной поляризации:

$$\dot{\mathbf{E}}_{2m} = \mathbf{y}_0 E_0 \varkappa_\perp \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_x x + \beta_z z)}, \quad x \geqslant 0; \tag{10.5.2}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{2m} = -[\mathbf{x}_0 \beta_z - \mathbf{z}_0 (\beta_x - \mathrm{i}\,\alpha)] \frac{E_0 \varkappa_\perp}{k_2 Z_{c2}} \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_x x + \beta_z z)}, \quad x \geqslant 0. \tag{10.5.3}$$

Анализируя полученные выражения, получаем, что поле в поглощающей среде представляет собой плоскую волну. При $\varphi \neq 0$ эта волна является неоднородной: поверхности равной фазы

$$\beta_x x + \beta_z z = \mathrm{const} \tag{10.5.4}$$

не совпадают с поверхностями равной амплитуды ($x = \mathrm{const}$). Направление распространения волны образует некоторый угол $\theta_д$ с осью X, называемый истинным (или действительным) углом преломления (рис. 10.5.1).

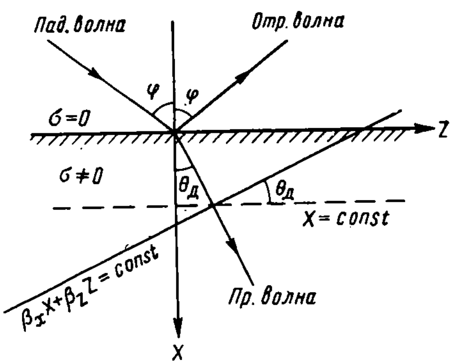


Рис. 10.5.1

Так как волна распространяется перпендикулярно поверхностям равных фаз, которые описываются ур-нием (10.5.4), то угол $\theta_д$ можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg}\theta_д = \frac{\beta_z}{\beta_x} = \frac{k_2 \sin\theta}{\mathrm{Re}\,(k_2 \cos\theta)} = \frac{k_1 \sin\varphi}{\mathrm{Re}\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin\varphi}}. \tag{10.5.5}$$

Таким образом, поверхности равных фаз составляют с поверхностями равных амплитуд угол $\theta_д$.

Амплитуды векторов **E** и **H** экспоненциально убывают в направлении нормали к поверхности раздела (вдоль оси X). Имеется продольная по отношению к направлению распространения преломленной волны составляющая вектора **H** (в случае нормальной поляризации) или продольная составляющая вектора **E** (в случае параллельной поляризации).

Поле в первой среде складывается из падающей и отраженной волн и не имеет принципиальных особенностей по сравнению с полем, возникающим при отражении волны от границы раздела двух диэлектриков.

Аналогичные результаты можно получить, анализируя случай параллельной поляризации.

Практически важным является случай, когда вторая среда оптически намного плотнее первой:

$$|k_2| \gg |k_1|. \qquad (10.5.6)$$

Частным случаем таких сред являются хорошо проводящие среды (металлы). У металлов $|k_2| \approx \sqrt{\omega\mu_{a2}\sigma_2}$. Так как удельная проводимость σ_2 велика, то условие (10.5.6) практически всегда выполняется. С учетом этого условия получаем из ф-лы (10.5.5), что

$$\operatorname{tg}\theta_д \approx 0 \text{ или } \theta_д \approx \theta. \qquad (10.5.7)$$

Это означает, что при любом угле падения φ на поверхность хорошо проводящей среды преломленная волна распространяется практически вдоль нормали к поверхности раздела. Плоскости равных фаз и плоскости равных амплитуд при этом практически совпадают, и волну можно считать однородной. Продольная по отношению к направлению распространения составляющая вектора **H** (или, в случае параллельной поляризации, вектора **E**) будет пренебрежимо мала по сравнению с поперечной составляющей. Можно считать, таким образом, что волна является поперечной, причем векторы **E** и **H** в ней сдвинуты по фазе друг относительно друга на угол $\psi=\delta/2\approx\pi/4$ (разд. 9.2). Иными словами, при анализе плоской волны, возникающей в результате преломления на поверхности хорошо проводящей среды, можно использовать все основные соотношения, полученные в разд. 9.2 при исследовании свойств плоской волны, свободно распространяющейся в хорошо проводящей безграничной однородной изотропной среде.

Подчеркнем, что амплитуды векторов **E** и **H** преломленной волны в металле быстро убывают с удалением от границы раздела и волна фактически существует лишь в тонком слое вблизи поверхности раздела.

10.6. Приближенные граничные условия Леонтовича—Щукина

Задача определения поля в присутствии металлических тел с конечной проводимостью имеет большое значение. Ее решение часто можно упростить введением приближенных граничных условий Леонтовича—Щукина. В отличие от обычных граничных условий, связывающих значения составляющих поля на границе раздела в разных средах, граничные условия Леонтовича—Щукина выражают связь между составляющими векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в одной среде.

В разд. 10.5 было показано, что при выполнении условия (10.5.6) плоская волна, падающая под любым углом φ на границу раздела двух сред, возбуждает во второй среде плоскую волну, распространяющуюся практически вдоль нормали к поверхности раздела. При этом между векторами $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ во второй среде будет выполняться такое же соотношение, как в свободно распространяющейся плоской волне (см. разд. 9.2):

$$\dot{\mathbf{E}}_2 = Z_{c2}[\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_2], \tag{10.6.1}$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичная нормаль, внешняя к плотной среде.

Так как предполагается, что волна во второй среде распространяется вдоль нормали к поверхности раздела, то векторы $\dot{\mathbf{E}}_2$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ должны быть параллельны последней. На границе раздела двух сред касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ должны быть непрерывны: $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$ и $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$.

Равенство (10.6.1) во второй среде выполняется всюду вплоть до границы раздела. Векторы $\dot{\mathbf{E}}_2$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ параллельны поверхности раздела. Следовательно, на поверхности раздела можно в ф-ле (10.6.1) заменить $\dot{\mathbf{E}}_2$ на $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ на $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau'}$, где $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau'}$ — касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в первой среде у границы раздела. Индекс τ' у вектора $\dot{\mathbf{H}}$ подчеркивает, что касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ не совпадают по направлению. Таким образом, на поверхности S плотной среды (например, реального проводника) справедливо соотношение

$$\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = Z_{c2}[\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_{1\tau'}]. \tag{10.6.2}$$

В ф-ле (10.6.2) можно вместо вектора $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau'}$ ввести полный вектор напряженности магнитного поля в первой среде у границы раздела $\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_{1n} + \dot{\mathbf{H}}_{1\tau'}$, так как векторное произведение $[\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}_{1n}]$ тождественно равно нулю. Таким образом, получаем окончательное выражение

$$\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = Z_{c2}[\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_1]. \tag{10.6.3}$$

Соотношение (10.6.3) называют *приближенным граничным условием Леонтовича—Щукина*. Из этого соотношения следует, что на поверхности реального проводника касательная составляющая напряженности электрического поля отлична от нуля. Отметим, что граничное условие Леонтовича—Щукина в предельном случае $\sigma_2 \to \infty$ совпадает с обычным условием $E_\tau|_S = 0$, которое должно выполняться на поверхности идеального проводника.

Так как волновое сопротивление хорошо проводящей среды мало, то и касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$ на поверхности такой среды будет мала. Однако она определяет нормальную к поверхности проводника компоненту вектора Пойнтинга, т. е. уходящий в металл поток энергии. В инженерных расчетах касательную составляющую вектора **E** на поверхности реального проводника обычно не учитывают, кроме тех случаев, когда требуется определить потери в проводнике, т. е. считают, что структура поля над реальным проводником такая же, как и над идеальным проводником той же конфигурации.

Граничное условие (10.6.3) является приближенным. Это следует непосредственно из его вывода, при котором предполагалось, что образующиеся во второй среде волны распространяются строго по нормали к поверхности раздела. В действительности направление распространение образует некоторый (в случае металлов очень малый) угол с нормалью к поверхности раздела.

Условие (10.6.3) было получено в предположении, что граница раздела является плоской. При произвольной форме поверхности раздела условием (10.6.3) можно пользоваться только в тех случаях, если минимальный радиус кривизны поверхности $R_{мин}$ значительно превышает глубину проникновения Δ° (разд. 9.2):

$$R_{мин} \gg \Delta^\circ \text{ или } R_{мин} \gg \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_{a2} \sigma_2}}. \qquad (10.6.4)$$

ГЛАВА 11

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

11.1. Явление поверхностного эффекта

Выше было показано (разд. 10.5), что напряженность переменного электромагнитного поля внутри металла, а следовательно, и плотность тока ($\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$) экспоненциально убывают по мере удаления от поверхности раздела. На высоких частотах весь ток фактически сосредоточен возле поверхности проводника. Это явление называют *поверхностным эффектом* или *скин-эффектом*.

В результате поверхностного эффекта как бы уменьшается сечение провода: эффективное сечение оказывается меньше геометрического. Это приводит к увеличению активного сопротивления провода. На высоких частотах оно может во много раз превысить сопротивление провода при постоянном токе. Кроме того, поверхностный эффект уменьшает магнитную энергию, сосредоточенную внутри проводника, что вызывает уменьшение внутренней индуктивности провода. Очевидно, что поверхностный эффект тем заметнее, чем больше радиус провода. Так как вследствие поверхностного эффекта центральная часть провода, по существу, не используется, то на высоких частотах для экономии металла и уменьшения веса часто сплошные провода заменяют полыми.

Явление поверхностного эффекта позволяет использовать металлические экраны для защиты различных элементов электрических цепей от влияния на них переменного электрического поля. Если экран полностью охватывает объект, а его толщина составляет несколько глубин проникновения (Δ°), то внешнее электромагнитное поле практически сквозь него не проникает [1]). Если защищаемый объект неполностью охватывается экраном, то электромагнитное поле будет частично проникать за экран в результате дифракции волн (см. гл. 12).

Следует отметить, что в случае постоянных и низкочастотных полей металлический экран не пропускает электрическое поле, но пропускает магнитное, если он выполнен из парамагнитного или диамагнитного металла.

---

[1]) Очевидно также, что при этих условиях существующее внутри экрана поле, в свою очередь, не сможет проникнуть в окружающее пространство.

11.2. Потери энергии в проводнике

Предположим, что металлическое тело, размеры и минимальный радиус кривизны поверхности которого велики по сравнению с глубиной проникновения, находится в высокочастотном электромагнитном поле. Касательную составляющую напряженности магнитного поля на поверхности S этого тела будем считать известной $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}|_S=\dot{\mathbf{H}}^\circ$. В соответствии с граничным условием Леонтовича—Щукина (10.6.2) касательная составляющая вектора $\dot{\mathbf{E}}$ на поверхности металла $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}|_S=\dot{\mathbf{E}}^0=Z_{c2}[\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0]$. Существование отличных от нуля касательных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на поверхности металла приводит к появлению нормальной к поверхности проводника составляющей вектора Пойнтинга. Иными словами, будет существовать поток энергии, направленный внутрь проводника. Нормальная к поверхности проводника составляющая комплексного вектора Пойнтинга

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}_n=\frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{E}}^0, \overset{*}{\mathbf{H}}{}^0\right]=\frac{Z_{c2}}{2}\left[\left[\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0\right], \overset{*}{\mathbf{H}}{}^0\right]=-\mathbf{n}_0\frac{Z_{c2}}{2}|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2. \quad (11.2.1)$$

Знак «—» означает, что вектор $\widetilde{\mathbf{\Pi}}_n$ направлен внутрь металла, так как $\mathbf{n}_0$ — орт внешней нормали к поверхности тела.

Подставляя в ф-лу (11.2.1) значение Z_{c2} из (9.2.20) и учитывая (9.2.23), получаем

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}_n=-\mathbf{n}_0\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\sigma}}|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2=-\mathbf{n}_0\frac{1+i}{2\sigma\Delta^\circ}|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2. \quad (11.2.2)$$

Если размеры тела велики по сравнению с Δ°, то можно считать, что средний поток энергии через его поверхность равен джоулевым потерям внутри него (поток энергии не проходит сквозь тело).

Вычислим поток комплексного вектора Пойнтинга через поверхность S, равный в рассматриваемом случае комплексной мощности потерь в проводнике:

$$\widetilde{P}_\text{п}=\oint\limits_S\widetilde{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S}=\frac{1+i}{2\sigma\Delta^\circ}\oint\limits_S|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2dS. \quad (11.2.3)$$

При выводе ф-лы (11.2.3) учтено, что $d\mathbf{S}=-\mathbf{n}_0dS$. Отделяя вещественную часть, находим среднюю мощность джоулевых потерь:

$$P_\text{п ср}=\operatorname{Re}\widetilde{P}=\frac{1}{2\sigma\Delta^\circ}\oint\limits_S|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2dS. \quad (11.2.4)$$

Таким образом, для определения потерь в проводнике достаточно знать касательную составляющую вектора $\dot{\mathbf{H}}$ на его поверхности. Как уже отмечалось (разд. 10.6), структура поля у поверхности реального металла близка к структуре поля у такой же поверхности идеального металла. Поэтому при вычислении потерь обычно предполагают, что $\dot{\mathbf{H}}^0 = \dot{\mathbf{H}}^0|_{\sigma\to\infty}$. Это предположение существенно упрощает расчеты, обеспечивая достаточную для инженерной практики точность результатов.

11.3. Эквивалентный поверхностный ток

Так как на высоких частотах ток фактически сосредоточен в тонком слое у поверхности проводника, часто оказывается удобным заменить реальное распределение тока эквивалентным поверхностным током. Для определения плотности этого эквивалентного поверхностного тока $\mathbf{j}_S$ предположим, что проводящее тело занимает все нижнее полупространство (рис. 11.3.1). Выделим мысленно в нем «брусок» толщиной Δl, боковые грани которого параллельны вектору плотности тока $\dot{\mathbf{j}}$. Толщину Δl выберем достаточно малой, чтобы в пределах Δl плотность тока $\dot{\mathbf{j}}$ и напряженность магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}$ можно было считать неизменными. Так как в хорошо проводящей среде плотность тока смещения пренебрежимо мала по сравнению с плотностью тока проводимости, то полный ток $\dot{I}$, протекающей в выделенном «бруске», можно выразить как

$$\dot{I} = \oint_{\Gamma} \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{l}, \tag{11.3.1}$$

где Г — контур поперечного сечения «бруска».

Так как по предположению векторы $\dot{\mathbf{j}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в пределах Δl не меняются, то интегралы по линиям, перпендикулярным поверхности тела, равны по величине и противоположны по знаку. Кроме того, поскольку в точках, бесконечно удаленных от поверхности тела, напряженность магнитного поля равна нулю, получаем, что интеграл в ф-ле (11.3.1) равен интегралу по отрезку AB на рис. 11.3.1:

$$\dot{I} = \int_{AB} \dot{\mathbf{H}}^0\, d\mathbf{l} = \dot{H}^0 \Delta l. \tag{11.3.2}$$

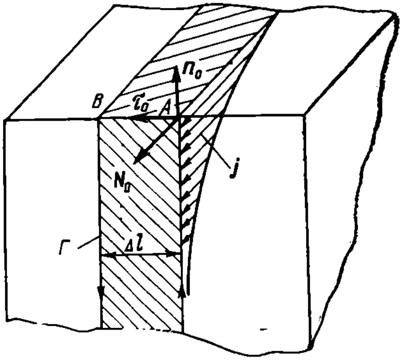


Рис. 11.3.1

Если считать, что весь ток течет по поверхности металла, то значение $\dot{I}$ в ф-ле (11.3.2) равно поверхностному току. Его плотность $\dot{j}_S = \dot{I}/\Delta l = \dot{H}^0$, или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{j}}_S = [\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{H}}^0]. \tag{11.3.3}$$

Это выражение аналогично граничному условию для касательной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности идеального проводника.

11.4. Поверхностное сопротивление проводника

Касательная составляющая напряженности электрического поля на поверхности металла $\dot{E}^0$ и плотность эквивалентного поверхностного тока $\dot{j}_S$ направлены одинаково. Следовательно, можно записать

$$\dot{E}^0 = Z_S \dot{j}_S. \tag{11.4.1}$$

Коэффициент пропорциональности Z_S принято называть *поверхностным сопротивлением проводника.* Учитывая ф-лу (11.3.3) и граничное условие Леонтовича—Щукина (10.6.3), получаем, что поверхностное сопротивление металла равно его волновому сопротивлению:

$$Z_S = Z_c = \frac{1+i}{\sigma\Delta^\circ}. \tag{11.4.2}$$

Активная часть поверхностного сопротивления

$$R_S = \frac{1}{\sigma\Delta^\circ}. \tag{11.4.3}$$

Из этого выражения следует, что проводник, заполняющий все полупространство, имеет в результате поверхностного эффекта такое же сопротивление, как и слой проводника толщиной Δ° без учета поверхностного эффекта [1]).

Отметим, что комплексную мощность потерь в проводнике [ф-ла (11.2.3)] можно выразить также через эквивалентный поверхностный ток и поверхностное сопротивление:

$$\widetilde{P}_п = \frac{1}{2} \oint\limits_S Z_S |\dot{j}_{S_m}|^2 dS. \tag{11.4.4}$$

11.5. Сопротивление цилиндрического проводника

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДА В СЛУЧАЕ РЕЗКО ВЫРАЖЕННОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА

Сопротивление цилиндрического провода при переменном токе отличается от его сопротивления при постоянном токе. Это отличие обусловлено поверхностным эффектом. При одной и той же частоте поверхностный эффект будет проявляться тем сильнее, чем больше диаметр провода по сравнению с Δ°.

[1]) Отсюда и термин «глубина проникновения».

Рассмотрим сначала случай сильно выраженного поверхностного эффекта (толстый проводник). Пусть по цилиндрическому проводу радиуса a распространяется бегущая волна тока. Выделим достаточно малый элемент провода длины l, в пределах которого можно считать, что амплитуда тока не меняется. Предположим, что радиус провода значительно превышает глубину проникновения ($a \gg \Delta^\circ$). В этом случае при определении сопротивления провода можно использовать результаты предыдущего раздела.

Комплексное сопротивление провода на единицу длины определяется формулой

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m l}, \tag{11.5.1}$$

где $\dot{I}_m$ — комплексная амплитуда тока в проводе, а $\dot{U}_m$ — комплексная амплитуда напряжения на концах отрезка провода длины l.

В рассматриваемом случае

$$\dot{I}_m = 2\pi a \dot{j}_{S_m}, \tag{11.5.2}$$

где $\dot{j}_{S_m}$ — комплексная амплитуда плотности эквивалентного поверхностного тока.

Соответственно

$$\dot{U}_m = \int_l \dot{\mathbf{E}}_m \, d\mathbf{l} = \dot{E}_m l. \tag{11.5.3}$$

Подставляя ф-лы (11.5.2) и (11.5.3) в (11.5.1) и учитывая соотношения (11.4.1) и (11.4.2), получаем

$$Z = \frac{1 + i}{2\pi a \sigma \Delta^\circ}. \tag{11.5.4}$$

Сопротивление Z можно выразить через активное сопротивление R и внутреннюю индуктивность L_i, приходящиеся на единицу длины провода: $Z = R + i\omega L_i$.

Отделяя в ф-ле (11.5.4) вещественную и мнимую части, находим R и L_i:

$$R = \frac{1}{2\pi a \sigma \Delta^\circ}; \; L_i = \frac{1}{2\pi a \sigma \omega \Delta^\circ}. \tag{11.5.5}$$

Из сравнения значений R и L_i при переменном токе с их значениями $R_0 = 1/\pi\sigma a^2$ и $L_{i0} = \mu_a/8\pi$ при постоянном токе (разд. 7.6) следует, что отношение R/R_0 с ростом частоты увеличивается, а отношение L_i/L_{i0}, наоборот, уменьшается.

Полученные формулы можно использовать только при условии $a \gg \Delta^\circ$. Если это условие не выполняется, то для того, чтобы определить сопротивление провода, нужно найти его внутреннее поле. Перейдем к рассмотрению этого случая.

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДА С УЧЕТОМ ЕГО ВНУТРЕННЕГО ПОЛЯ

Рассмотрим бесконечный цилиндрический проводник радиуса a, по которому течет ток. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, ось Z которой совпадает с осью провода. При наличии потерь амплитуда тока вдоль провода не остается постоянной. Однако для упрощения анализа при определении погонного сопротивления можно без существенной погрешности предположить, что амплитуда тока не зависит от z. Кроме того, будем считать, что распределение тока по сечению провода обладает осевой симметрией.

При таких предположениях вектор $\dot{\mathbf{H}}$ имеет одну составляющую $\dot{H}_\varphi$, а вектор $\dot{\mathbf{E}}$ — одну составляющую E_z, причем на поверхности провода

$$\dot{E}_{zm}\big|_{r=a} = E_0 = \text{const}. \tag{11.5.6}$$

Для определения напряженности электрического поля внутри провода нужно найти решение уравнения Гельмгольца (5.1.12), удовлетворяющее условию (11.5.6). Комплексная амплитуда $\dot{E}_{zm}$ не зависит от z и в силу симметрии задачи не зависит также от переменной φ. Записывая ур-ние (5.1.12) в цилиндрической системе координат и учитывая, что производные $\dot{E}_{zm}$ по переменным z и φ равны нулю, приходим к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2\dot{E}_{zm}}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\dot{E}_{zm}}{dr} + k^2\dot{E}_{zm} = 0. \tag{11.5.7}$$

Его общее решение можно записать в виде

$$\dot{E}_{zm} = AJ_0(kr) + BN_0(kr), \tag{11.5.8}$$

где $J_0(kr)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $N_0(kr)$ — функция Бесселя второго порядка (функция Неймана) нулевого порядка, а A и B — произвольные постоянные.

В рассматриваемой области $(0 \leqslant r \leqslant a)$ $J_0(kr)$ — ограниченная функция, а $N_0(kr)$ имеет логарифмическую особенность при $r \to 0$ (функция $N_0(kr)$ при $r \to 0$ обращается в бесконечность как $\frac{2}{\pi}\ln\frac{kr}{2}$). Из физических соображений очевидно, что напряженность электрического поля внутри провода должна быть ограниченной величиной.

Следовательно, $B = 0$.

Определяя из условия (11.5.6) постоянную A, находим

$$\dot{E}_{zm} = E_0\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}. \tag{11.5.9}$$

Определим сопротивление провода на единицу длины. Для этого воспользуемся равенством (11.5.1), которое с учетом ф-л

(11.5.3) и (11.5.6) принимает вид

$$Z=\frac{E_0}{\dot{I}_m}. \tag{11.5.10}$$

Для нахождения $\dot{I}_m$ нужно проинтегрировать комплексную амплитуду плотности тока $\mathbf{j}_m$ по сечению провода. Так как $\mathbf{j}_m=\sigma\dot{\mathbf{E}}_m$, то

$$\dot{I}_m=\sigma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\dot{E}_{zm}r\,dr=\frac{2\pi\sigma E_0}{J_0(ka)}\int_0^a rJ_0(kr)\,dr.$$

Используя формулу $\int rJ_0(kr)\,dr=\frac{r}{k}J_1(kr)$, где $J_1(kr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка, приходим к выражению

$$\dot{I}_m=\frac{2\pi a\sigma E_0}{k}\,\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}. \tag{11.5.11}$$

Подставляя ф-лу (11.5.11) в (11.5.10), получаем

$$Z=\frac{k}{2\pi a\sigma}\,\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}. \tag{11.5.12}$$

Это выражение справедливо при любом значении частоты или, что, по существу, то же самое, при любых соотношениях между радиусом a и глубиной проникновения Δ°.

Убедимся сначала, что ф-ла (11.5.12) при $a\gg\Delta^\circ$ переходит в ф-лу (11.5.4). Так как в хорошо проводящей среде (разд. 9.2) параметр $k=\beta-i\alpha=(1-i)\sqrt{\pi f\sigma\mu_a}=(1-i)/\Delta^\circ$, то при $a\gg\Delta^\circ$ параметр ka по абсолютной величине будет большим по сравнению с единицей ($|ka|\gg1$). Следовательно, входящие в ф-лу (11.5.12) функции Бесселя можно заменить первыми членами их асимптотических представлений при больших значениях аргумента:

$$J_n(ka)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi ka}}\cos\left(ka-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)\ \text{при}\ |ka|\gg n. \tag{11.5.13}$$

Подставляя это выражение в ф-лу (11.5.12) и учитывая, что $\cos\xi=\frac{1}{2}\left(e^{i\xi}+e^{-i\xi}\right)$, а $|e^{i\kappa a}|\gg|e^{-i\kappa a}|$, получаем

$$Z\approx\frac{ik}{2\pi a\sigma}\,\frac{e^{i\left(ka-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(ka-\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(ka-\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(ka-\frac{\pi}{4}\right)}}\approx\frac{1+i}{2\pi a\sigma\Delta^\circ}. \tag{11.5.14}$$

Выражение (11.5.14) совпадает с (11.5.4).

В случае тонких проводников, для которых $a\ll\Delta^\circ$, модуль величины ka мал по сравнению с единицей ($|ka|\ll1$). Используя представление функций Бесселя в виде ряда

$$J_n(ka)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{ka}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!};\ n=0,\ 1,\ 2\ \ldots \qquad (11.5.15)$$

и учитывая, что при $|ka|\ll 1$ можно ограничиться первыми членами этого ряда, находим

$$Z=\frac{k}{2\pi a\sigma}\frac{1-\left(\frac{ka}{2}\right)^2}{\frac{ka}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{ka}{2}\right)^2\right]}\approx\frac{1}{\pi a^2\sigma}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{ka}{2}\right)^2\right]$$

или

$$Z=\frac{1}{\pi a^2\sigma}\left[1-\frac{(1-i)^2}{8}\left(\frac{a}{\Delta^\circ}\right)^2\right]. \qquad (11.5.16)$$

Множитель $1/\pi a^2\sigma$ в ф-ле (11.5.16) совпадает с сопротивлением проводника при постоянном токе. Так как по предположению $a\ll\Delta^\circ$, то поправочный коэффициент будет мал по сравнению с единицей. Как и следовало ожидать, поверхностный эффект в этом случае проявляется слабо.

Отметим, что полученные в данном разделе формулы для погонного сопротивления провода верны в случае уединенного провода. Если линия состоит из нескольких параллельных проводов, то распределение тока по сечению провода нельзя считать осесимметричным. Учет несимметричного распределения тока приводит к увеличению погонного активного сопротивления. Однако если расстояние между проводами значительно больше диаметра провода, то поправка получается небольшой и ею можно пренебречь.

ГЛАВА 12

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

12.1. Строгая постановка задач дифракции

В гл. 10 анализировалась структура электромагнитного поля, возникающего при падении однородной плоской волны на плоскую границу раздела двух сред. Однако во многих практически важных случаях поверхность раздела нельзя считать безграничной плоскостью, а падающую волну — плоской.

При падении электромагнитной волны на тело конечных размеров (или на край полубесконечного тела), помимо отражения и преломления (см. гл. 10), также имеет место более сложное явление, называемое *дифракцией*[1]. Поэтому задачи определения влияния различных объектов на структуру электромагнитного поля часто называют задачами дифракции. С необходимостью их решения встречаются при проектировании и анализе антенных устройств, при исследовании распространения радиоволн в неоднородных средах, в радиолокации и др.

В настоящей главе излагаются некоторые методы решения задач дифракции монохроматических электромагнитных волн на металлических телах, расположенных в безграничной однородной изотропной среде[2]. Поле $\dot{\mathbf{E}}^0$, $\dot{\mathbf{H}}^0$ падающей волны (его называют *первичным*) считается известным. Для простоты предположим, что возбуждаемое этой волной тело является идеально проводящим, а в окружающей его среде (она характеризуется параметрами ε_a и μ_a) отсутствуют потери энергии. Под действием первичного поля на поверхности S тела возникают электрические токи, которые создают *вторичное* электромагнитное поле $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$. Так как первичное поле известно, то задача сводится к определению вторичного поля, причем достаточно найти один из его векторов $\dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{H}}$, так как

[1]) Дифракция (от лат. difractus — изломанный) — огибание волнами встречных препятствий.

[2]) Очевидно, что такие задачи являются идеализированными, поскольку в действительности, помимо рассматриваемого тела, всегда имеются другие тела (Земля, различные технические сооружения и др.). Тем не менее эти задачи имеют большое практическое значение, так как часто оказывается возможным пренебречь влиянием других тел.

любой из них можно однозначно выразить через другой непосредственно из уравнений Максвелла для монохроматического поля.

Во внешнем по отношению к поверхности S пространстве вектор $\dot{\mathbf{E}}$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (5.1.12), в котором надо положить $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_a$ и $\tilde{\mu}=\mu_a$. На поверхности S касательная составляющая напряженности полного электрического поля $\dot{\mathbf{E}}^0+\dot{\mathbf{E}}$ должна быть равна нулю. Следовательно,

$$[\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{E}}]|_S = -[\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{E}}^0]|_S, \tag{12.1.1}$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичная нормаль к поверхности S.

Кроме того, должно выполняться определенное условие в бесконечно удаленных точках. Если поверхность S имеет ограниченные размеры, в качестве такого условия можно использовать условие излучения (4.6.21).

В ряде случаев удобнее определять вектор $\dot{\mathbf{H}}$. Тогда задача сводится к нахождению решения ур-ния (5.1.13) [1]), удовлетворяющего условию излучения и граничному условию (12.1.1), которое на основе первого уравнения Максвелла можно переписать в виде

$$[\mathbf{n}_0,\ \mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}]|_S = -i\,\omega\varepsilon_a\,[\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{E}}^0]|_S. \tag{12.1.2}$$

Иногда вместо условия (12.1.2) проще использовать условие равенства нулю на поверхности S нормальной составляющей напряженности полного магнитного поля, которое для вектора $\dot{\mathbf{H}}$ записывается в форме

$$(\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{H}})|_S = -(\mathbf{n}_0,\ \dot{\mathbf{H}}^0)|_S. \tag{12.1.3}$$

Если рассматриваемое тело не имеет острых кромок (ребер), то сформулированная выше задача имеет единственное решение. При их наличии для единственности решения в ряде случаев требуется ввести дополнительное условие, определяющее характер искомой функции вблизи острой кромки (так называемое *условие на ребре*) [2]).

Следует отметить, что решение многих задач существенно упрощается, если ввести некоторые вспомогательные функции (например, векторный потенциал $\dot{\mathbf{A}}$, вектор Герца $\mathbf{\Gamma}$ и др.).

12.2. Дифракция плоской волны на круговом цилиндре

Пусть плоская линейно поляризованная электромагнитная волна падает на идеально проводящий круговой цилиндр радиуса a перпендикулярно его оси (рис. 12.2.1). Введем цилиндрическую систему координат r, φ, Z, ось Z которой совпадает с осью цилин-

---

[1]) При этом, конечно, в ур-нии (5.1.13) следует положить $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_a$ и $\tilde{\mu}=\mu_a$.

[2]) Из-за ограниченного объема книги здесь этот вопрос подробно не рассматривается.

дра, а угол φ отсчитывается от оси X, противоположной направлению распространения волны.

При решении задачи можно ограничиться рассмотрением двух типов поляризации падающей волны относительно оси цилиндра: а) вектор $\dot{\mathbf{E}}^0$ параллелен оси Z, б) вектор $\dot{\mathbf{H}}^0$ параллелен оси Z. Любую другую ориентацию векторов $\dot{\mathbf{E}}^0$ и $\dot{\mathbf{H}}^0$ первичного поля можно представить как суперпозицию этих случаев. Остановимся подробнее на первой задаче, так как вторая решается аналогично.

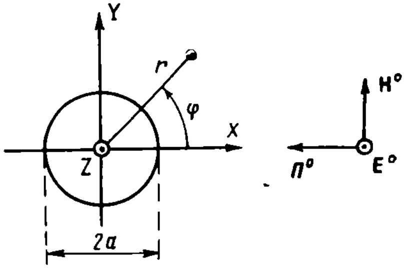


Рис. 12.2.1

Напряженность электрического поля падающей волны имеет только z-ю составляющую ($\dot{\mathbf{E}}^0=\mathbf{z}_0\dot{E}^0(r, \varphi)$):

$$\dot{E}^0(r, \varphi)=E_0\,e^{ikx}=E_0\,e^{ikr\cos\varphi}. \tag{12.2.1}$$

Рассматриваемая задача является двумерной (отсутствует зависимость от переменной z), поэтому ур-ние (5.1.12) для напряженности вторичного электрического поля, которая также будет иметь лишь z-ю составляющую ($\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{z}_0\dot{E}(r, \varphi)$), принимает вид

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial \varphi^2}+k^2\dot{E}=0;\ \ r\geqslant a;\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \tag{12.2.2}$$

Функция $\dot{E}$ на поверхности S должна удовлетворять граничному условию (12.1.1), которое в рассматриваемом случае выражается как

$$\dot{E}(a, \varphi)=-E_0\,e^{ika\cos\varphi}, \tag{12.2.3}$$

а в бесконечно удаленных точках — условию излучения. Это условие, по существу, состоит в следующем. При $r\to\infty$ в выражение для функции $\dot{E}(r, \varphi)$, должны входить составляющие с фазовым множителем вида e^{-ikr}, которые соответствуют волне, уходящей в бесконечность от оси Z; составляющие же с фазовым множителем e^{ikr}, которые соответствуют волне, распространяющейся из бесконечности к оси Z, должны отсутствовать.

Найдем решение ур-ния (12.2.2) методом разделения переменных. Представим функцию $\dot{E}(r, \varphi)$ в виде

$$\dot{E}(r, \varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi). \tag{12.2.4}$$

Подставим эту формулу в ур-ние (12.2.2) и умножим обе его части на r^2. Выполним дифференцирование и разделим затем получающееся уравнение на произведение $R\Phi$:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R}+k^2r^2=\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi}. \tag{12.2.5}$$

Левая часть полученного уравнения зависит только от переменной r, а правая — только от переменной φ. Переменные r и φ являются независимыми. Следовательно, ур-ние (12.2.5) представляет собой равенство двух независимых функций. Это возможно только при условии, что каждая из функций равна постоянной. Обозначая последнюю через m^2, приходим к двум независимым дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0; \tag{12.2.6}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0. \tag{12.2.7}$$

Очевидно, что при изменении угла φ на 2π значение искомой функции $E(r, \varphi)$ должно остаться прежним:

$$E(r,\ \varphi+2\pi)=E(r,\ \varphi). \tag{12.2.8}$$

Условие (12.2.8) можно переписать для функции Φ:

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{12.2.9}$$

Решение ур-ния (12.2.6) имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\sin m\varphi+B\cos m\varphi, \tag{12.2.10}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Условие (12.2.9) выполняется, если m — целое число ($m=0, 1, 2 ...$).

Напряженность первичного электрического поля — четная функция относительно угла φ. Поэтому можно предположить, что функция E, а следовательно, и функция Φ также должны быть четными относительно угла φ. Таким образом, постоянная $A=0$ и

$$\Phi(\varphi)=B\cos m\varphi. \tag{12.2.11}$$

Уравнение (12.2.7) является уравнением Бесселя. Его решение можно представить в виде

$$R(r)=C'J_m(kr)+D'N_m(kr), \tag{12.2.12}$$

где $J_m(kr)$ и $N_m(kr)$ — функции Бесселя m-го порядка первого и второго рода соответственно (функцию $N_m(kr)$ часто называют также функцией Неймана m-го порядка), а C' и D' — произвольные постоянные.

В рассматриваемом случае решение ур-ния (12.2.7) удобнее выразить через функции Бесселя третьего рода — функции Ханкеля:

$$R(r)=CH_m^{(1)}(kr)+DH_m^{(2)}(kr), \tag{12.2.13}$$

где $H_m^{(1)}(kr)$ и $H_m^{(2)}(kr)$ — функции Ханкеля m-го порядка первого и второго рода соответственно, а C и D — произвольные постоянные.

Функции $H_m^{(1)}(kr)$ и $H_m^{(2)}(kr)$ выражаются через функции $J_m(kr)$ и $N_m(kr)$ соотношениями: $H_m^{(1)}(kr)=J_m(kr)+\mathrm{i}N_m(kr)$; $H_m^{(2)}(kr)=$

$=J_m(kr)-iN_m(kr)$. При $r\to\infty$ справедливы следующие асимптотические представления:

$$H_m^{(1)}(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i\left[kr-\frac{\pi}{4}(2m+1)\right]};$$

$$H_m^{(2)}(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left[kr-\frac{\pi}{4}(2m+1)\right]}.$$

Иными словами, функция $H_m^{(1)}(kr)$ соответствует цилиндрической волне, распространяющейся из бесконечности к оси Z, а функция $H_m^{(2)}(kr)$ — цилиндрической волне, распространяющейся от оси Z к бесконечности вдоль радиусов r. Следовательно, для выполнения условия излучения необходимо считать, что постоянная $C=0$, при этом ф-ла (12.2.13) принимает вид $R(r)=DH_m^{(2)}(kr)$.

Таким образом, решением ур-ния (12.2.2), удовлетворяющим условию излучения, может служить функция

$$E^{(m)}=D_mH_m^{(2)}(kr)\cos m\varphi, \qquad (12.2.14)$$

где D_m — некоторая постоянная.

Осталось выполнить граничное условие (12.2.3). Для этого представим искомое решение $E(r,\varphi)$ в виде суперпозиции всех возможных функций (12.2.14):

$$E(r\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}D_mH_m^{(2)}(kr)\cos m\varphi. \qquad (12.2.15)$$

Очевидно, что выражение (12.2.15) является четной функцией, периодической по углу φ с периодом 2π, которая удовлетворяет условию излучения и ур-нию (12.2.2). Коэффициенты D_m — пока произвольные постоянные. Требуется определить их таким образом, чтобы выполнялось условие (12.2.3). Подставим ф-лу (12.2.15) в (12.2.3) и воспользуемся известной из теории Бесселевых функций формулой [1])

$$e^{ika\cos\varphi}=J_0(ka)+2\sum_{m=1}^{\infty}(i)^m J_m(ka)\cos m\varphi. \qquad (12.2.16)$$

В результате придем к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_mH_m^{(2)}(ka)\cos m\varphi=-E_0\left[J_0(ka)+2\sum_{m=1}^{\infty}(i)^m J_m(ka)\cos m\varphi\right]. \qquad (12.2.17)$$

[1]) Соотношение (12.2.16) можно получить, разлагая $e^{ika\cos\varphi}$ в обычный ряд Фурье.

Левую и правую части этого равенства можно рассматривать как разложение одной и той же функции в ряд Фурье. Так как такое разложение единственно, то коэффициенты разложения должны быть равны и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= -E_0 \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} \\ D_m &= -E_0 \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}, \quad m=1,\ 2, \ \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{12.2.18}$$

Подставляя ф-лы (12.1.18) в (12.2.15), получаем окончательное выражение для напряженности вторичного электрического поля, возникающего при падении плоской волны на идеально проводящий цилиндр радиуса a:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{z}_0 E_0 \left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (\mathrm{i})^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi \right]. \tag{12.2.19}$$

Ряд в выражении (12.2.19) является абсолютно сходящимся, его можно почленно дифференцировать. Поэтому данное выражение позволяет также найти напряженность вторичного магнитного поля $\left(\dot{\mathbf{H}} = \frac{i}{\omega\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}\right)$ и распределение токов на поверхности цилиндра.

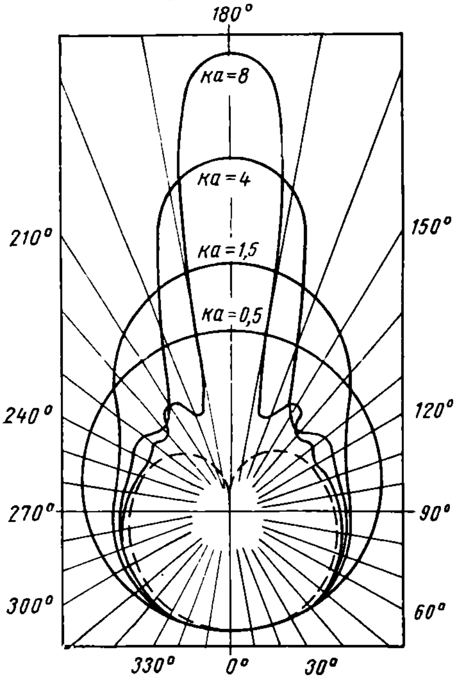


Рис. 12.2.2

На рис. 12.2.2 показано[1]) изменение модуля напряженности вторичного электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$ в дальней зоне ($r \gg a$, $r \gg \lambda$) в зависимости от угла φ при постоянном значении переменной r (отношение $|E(r, \varphi)|/|E(r, 0)|$) для различных значений ka.

Пунктирная кривая соответствует данным, рассчитанным на основе геометрической оптики (разд. 12.4). Как видно из графиков, в результате дифракции появляется вторичное поле с четко выраженным максимумом в области $\varphi \approx 180°$.

---

[1]) Графики заимствованы из [24].

Решение задачи в форме (12.2.19), в принципе, пригодно для цилиндра любого радиуса. Однако при больших значениях параметра ka, т. е. если диаметр цилиндра велик по сравнению с длиной волны ($ka=2\pi a/\lambda$), ряд в (12.1.19) сходится медленно и решение становится неудобным для анализа. Поэтому в случае $ka \gg 1$ обычно стремятся получить более простые (но достаточно точные для практических целей) асимптотические формулы.

Изложенный строгий метод решения задачи дифракции называют *методом Фурье*. Однако такое решение удается получить лишь для тел простейшей конфигурации (например, эллиптический и круговой цилиндры, бесконечно тонкая лента, сфера, конус, эллипсоид вращения и др.). Это объясняется тем, что при решении задачи координатная система выбирается таким образом, чтобы поверхность тела совпадала с одной из координатных поверхностей, а для применения метода Фурье в выбранной системе координат должна обеспечиваться возможность разделения переменных в уравнении Гельмгольца.

Часто требуется решить задачу дифракции электромагнитных волн, падающих на тела, поверхности которых не совпадают ни с одной из координатных поверхностей известных систем координат. Строгими методами такие задачи не решаются, поэтому приходится применять приближенные методы.

12.3. Приближение Гюйгенса—Кирхгофа

В разд. 8.6 было показано, что поле в любой точке пространства, внешнего к некоторой области, ограниченной замкнутой поверхностью S, можно полностью определить по заданным на ней значениям касательных составляющих напряженности электрического и магнитного полей[1]). Действительно, разбивая мысленно поверхность S на элементарные площадки и рассматривая каждую площадку как элемент Гюйгенса, можно найти полное поле, суммируя поля, созданные отдельными элементами. В качестве поверхности часто оказывается удобным выбрать поверхность тела, рассматриваемого в дифракционной задаче.

Если бы на поверхности тела были известны точные значения касательных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, то тем самым были бы найдены точные значения этих векторов в любой точке пространства. Однако для точного определения составляющих $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ и $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ на поверхности S обычно требуется решить исходную дифракционную задачу. Указанную трудность можно обойти, если ограничиться вычислением приближенных значений составляющих $\dot{E}_\tau|_S$ и $\dot{H}_\tau|_S$ на основе некоторых упрощающих предположений. Однако

[1]) Или, что то же самое, по заданному распределению поверхностных электрических и магнитных токов.

при этом решение соответствующей дифракционной задачи также будет уже не точным, а приближенным.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть на идеально проводящее тело (рис. 12.3.1) падает электромагнитная волна, создаваемая в пространстве источником Q. На поверхности тела касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$ равна нулю. Если линейные размеры тела l и минимальный радиус кривизны его поверхности $R_{\text{мин}}$ велики по сравнению с длиной волны

$$l \gg \lambda; \ R \gg \lambda, \qquad (12.3.1)$$

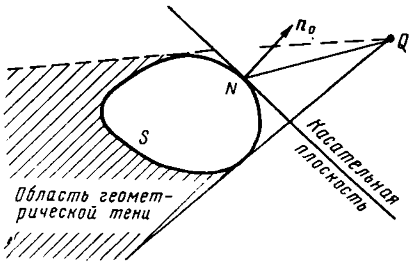


Рис. 12.3.1

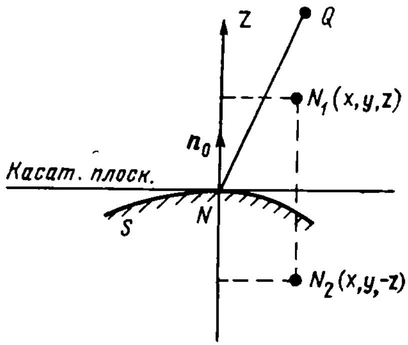


Рис. 12.3.2

то в первом приближении можно пренебречь затеканием токов на теневую[1]) сторону тела (т. е. считать, что на ней $\mathbf{j}_S=0$) и предположить, что на освещенной части его поверхности плотность тока в каждой точке такая же, какой она была бы при заданном внешнем поле на идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности тела в рассматриваемой точке. Эти предположения, конечно, являются приближенными. В действительности при любых конечных размерах тела токи всегда затекают на теневую сторону и, кроме того, реальное распределение токов на освещенной стороне несколько отличается от указанного.

Выберем некоторую точку N на поверхности тела S (рис. 12.3.1) и вычислим в ней плотность тока на основе принятых допущений. Предположим, что источник Q находится над идеально проводящей безграничной плоскостью, касательной к поверхности S в точке N (рис. 12.3.2). Введем декартову систему координат, центр которой совпадает с рассматриваемой точкой, а ось Z направлена по нормали $\mathbf{n}_0$.

Для определения плотности тока $\mathbf{j}_S$ в точке N нужно найти в этой точке значение касательной составляющей напряженности полного магнитного поля $\dot{\mathbf{j}}_S = [\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}_{\text{полн}}]\big|_{z=0}$.

[1]) Часть поверхности тела, которая видна из источника, называют освещенной, а остальную часть — теневой. Соответственно часть пространства, точки которой видны из источника, называют освещенной областью (или областью света), а остальную часть — областью геометрической тени (рис. 12.3.1).

Полное поле складывается из первичного, создаваемого источником в отсутствие плоскости, и вторичного, обусловленного протекающими по плоскости токами полей. Напряженность первичного магнитного поля считается известной:
Следовательно,

$$\dot{\mathbf{j}}_S = [\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0 (x, y, 0) + \dot{\mathbf{H}} (x, y, 0)], \qquad (12.3.2)$$

где $\dot{\mathbf{H}}(x, y, 0)$ — вектор напряженности вторичного магнитного поля в точке N.

Суммарное поле под плоскостью тождественно равно нулю: плоскость полностью экранирует нижнее полупространство. Это означает, что токи, протекающие по плоскости, создают в нижнем полупространстве вторичное поле, равное по величине и противоположное по знаку первичному. Таким образом,

$$\dot{\mathbf{H}}_1 (x, y, z) = -\dot{\mathbf{H}}^0 (x, y, z) \text{ при } z < 0. \qquad (12.3.3)$$

Кроме того, векторы напряженности вторичного магнитного поля в точках, расположенных симметрично относительно плоскости[1]) (точки N_1 и N_2 на рис. 12.3.2), должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$\dot{\mathbf{H}}_1 (x, y, z) = \dot{\mathbf{H}}^0 (x, y, -z) \text{ при } z \geqslant 0. \qquad (12.3.4)$$

С учетом ф-л (12.3.3) и (12.3.4) выражение (12.3.2) принимает вид

$$\dot{\mathbf{j}}_S = 2 [\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0 (x, y, 0)]. \qquad (12.3.5)$$

Таким образом, можно приближенно считать, что на освещенной части поверхности тела (S_0) плотность поверхностных электрических токов

$$\dot{\mathbf{j}}_S = 2 [\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0]|_S, \qquad (12.3.6)$$

а на теневой стороне равна нулю.

Для определения вторичного поля в пространстве, окружающем тело, можно либо вычислить векторный потенциал

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\mu_a}{2\pi} \int\limits_{S_0} [\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0] |_S \frac{e^{-ikR}}{R} dS, \qquad (12.3.7)$$

где S_0 — освещенная часть поверхности тела; R — расстояние от элемента dS до точки наблюдения, и затем применить ф-лы (5.3.1) и (5.3.6), либо непосредственно просуммировать поля, создаваемые токами, сосредоточенными в каждом элементе dS поверхности S_0, который можно рассматривать как элементарный электрический вибратор. С вычислением поля на основе описанной методики для конкретных тел (в частности, для кругового цилиндра) можно ознакомиться, например, в [24].

---

[1]) Точка N_1 имеет координаты x, y, z, а N_2 — координаты $x, y, -z$.

Пример 2. Определим электромагнитное поле, проникающее через отверстие S_0 в идеально проводящей плоскости при падении на нее плоской электромагнитной волны

$$\dot{\mathbf{E}}_m^0 = \mathbf{x}_0 E_0 \mathrm{e}^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^0 = \mathbf{y}_0 \frac{E_0}{Z_c} \mathrm{e}^{-ikz}. \tag{12.3.8}$$

Пусть рассматриваемая плоскость (экран) расположена в координатной плоскости $z=0$ (рис. 12.3.3). Размеры отверстия будем считать большими по сравнению с длиной волны.

В качестве поверхности интегрирования S выберем плоскость $z=+0$, которая проходит через отверстие S_0, а вне его совпадает с «теневой» стороной экрана (пунктирная линия на рис. 12.3.3*а*). На экране касательная составляющая вектора $\dot{\mathbf{E}}$ равна нулю. При больших по сравнению с длиной волны размерах отверстия можно пренебречь затеканием токов на теневую сторону и, кроме того, приближенно считать, что поле в отверстии совпадает с полем падающей волны, т. е. определяется выражением (12.3.8), если в них положить $z=0$.

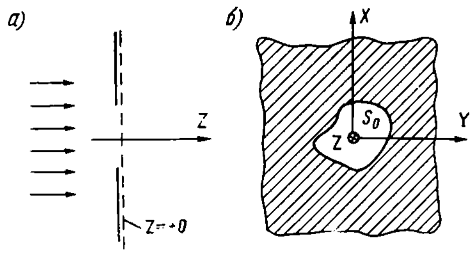


Рис. 12.3.3

Каждый элемент ΔS площади отверстия S_0 можно рассматривать как элемент Гюйгенса (разд. 8.10), а при определении поля за отверстием просуммировать поля, создаваемые каждым элементом ΔS.

Описанный метод решения дифракционных задач известен под названием *приближения Гюйгенса—Кирхгофа*. Он принципиально является приближенным, так как распределение токов, по которым вычисляется поле, находится приближенно. Тем не менее при выполнении условий (12.2.1) приближение Гюйгенса—Кирхгофа удовлетворительно передает структуру поля в области максимальной интенсивности. Приближение Гюйгенса—Кирхгофа часто называют также методом физической оптики.

12.4. Геометрическая оптика

Одним из наиболее простых методов определения поля, отраженного от больших по сравнению с длиной волны тел, которые имеют достаточно гладкую поверхность[1]), является метод геометрической оптики. Изложим основные принципы этого метода.

Выше было показано, что направление распространения волны перпендикулярно поверхности равных фаз. В однородной среде направление распространения плоской волны одинаково во всех

---

[1]) Поверхность считается достаточно гладкой, если ее минимальный радиус кривизны значительно превышает длину волны.

точках пространства. Произвольная электромагнитная волна не обладает этим свойством. Однако на большом расстоянии от источника (по сравнению с длиной волны и размерами источника) произвольную электромагнитную волну в любой малой области можно рассматривать как плоскую. Ограничимся случаем среды без потерь. Если амплитуды векторов **E** и **H** и направление распространения волны практически не изменяются на расстояниях порядка ее длины, то можно ввести понятие *лучей*-линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны. В однородной среде лучи представляют собой прямые линии, в неоднородной — лучи криволинейны. В геометрической оптике распространение электромагнитных волн рассматривают как распространение лучей, отвлекаясь от волнового характера поля. Можно строго показать, что такое представление будет тем точнее, чем меньше длина волны. Поэтому результаты, полученные в приближении геометрической оптики, можно рассматривать как асимптотическое решение волновой задачи при $\lambda \to 0$.

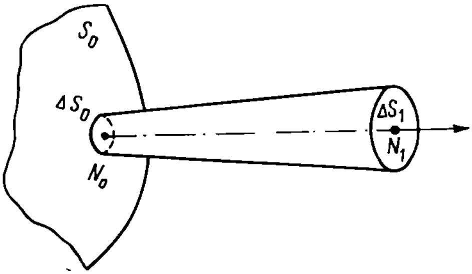


Рис. 12.4.1

Полученные в разд. 10.2 законы отражения и преломления плоской волны на безграничной плоской границе раздела двух сред (законы Снеллиуса) могут быть, как известно, сформулированы для лучей. Если волна не является плоской, но достаточно близка к ней в любой малой области, размеры которой сравнимы с длиной волны, то отражение и преломление лучей, соответствующих этой волне, также подчиняются законам Снеллиуса. Эти законы справедливы и в том случае, если поверхность раздела не является плоской, но ее размеры и минимальный радиус кривизны значительно превышают длину волны.

При вычислении поля по методу геометрической оптики предполагается, что каждой точке луча соответствуют определенные значения векторов **E** и **H**. Векторы **E** и **H** перпендикулярны[1]) лучу, их фазы изменяются линейно вдоль него, а характер изменения амплитуд устанавливается на основе закона сохранения энергии. Энергия электромагнитной волны распространяется по нормали к поверхности равных фаз, т. е. вдоль лучей, соответствующих этой волне. Поэтому, если на какой-либо поверхности равных фаз S_0 выделить малую площадку ΔS_0, то вся энергия, проходящая через нее за период, будет распространяться внутри некоторой трубки, боковая поверхность которой образована лучами, проведенными через контур площадки ΔS_0 (рис. 12.4.1). Такую трубку

[1]) Это следует из определения луча.

обычно называют *энергетической* или *силовой*. В пределе при $\Delta S_0 \to 0$ энергетическая трубка стягивается к одному лучу (N_0—N_1 на рис. 12.4.1). Из определения энергетической трубки следует, что поток энергии через ее боковую поверхность отсутствует.

Рассмотрим две площадки ΔS_0 и ΔS_1, вырезаемые энергетической трубкой в поверхностях равных фаз S_0 и S_1 соответственно (рис. 12.4.2). Очевидно, что средний за период поток энергии через эти площадки должен быть одним и тем же. Следовательно,

$$\frac{|\dot{\mathbf{E}}_m(N_1)|^2}{|\dot{\mathbf{E}}_m(N_0)|^2} = \frac{\Delta S_0}{\Delta S_1}, \quad (12.4.1)$$

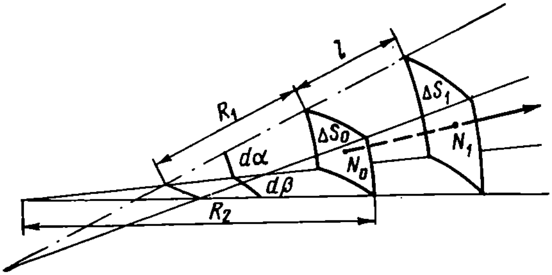


Рис. 12.4.2

где $\dot{\mathbf{E}}_m(N_0)$ и $\dot{\mathbf{E}}_m(N_1)$ — значения комплексных амплитуд вектора $\dot{\mathbf{E}}$ в точках N_0 и N_1 соответственно.

В однородной среде лучи прямолинейны. Выразим отношение $\Delta S_0/\Delta S_1$ через главные радиусы кривизны R_1 и R_2 фронта волны S_0 в точке N_0. Из рис. 12.4.2 видно, что $\Delta S_0 = R_1 d\alpha R_2 d\beta$, а $\Delta S_1 = (R_1 + l) d\alpha (R_2 + l) d\beta$, где l — расстояние между S_0 и S_1, отсчитываемое вдоль направления луча. Следовательно,

$$\frac{\Delta S_0}{\Delta S_1} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + l)(R_2 + l)}. \quad (12.4.2)$$

В случае линейной поляризации ориентация векторов **E** и **H** неизменна вдоль луча. Волны круговой и эллиптической поляризации можно рассматривать как суперпозицию двух линейно поляризованных волн, поэтому они здесь рассматриваться не будут. Таким образом, векторы $\dot{\mathbf{E}}_m(N_1)$ и $\dot{\mathbf{E}}_m(N_0)$ связаны соотношением

$$\dot{\mathbf{E}}_m(N_1) = \dot{\mathbf{E}}_m(N_0)\left[\frac{R_1 R_2}{(R_1 + l)(R_2 + l)}\right]^{1/2} e^{-ikl}. \quad (12.4.3)$$

Аналогичное соотношение выполняется для векторов $\dot{\mathbf{H}}_m(N_1)$ и $\dot{\mathbf{H}}_m(N_0)$.

Луч, падающий на поверхность раздела двух сред, расщепляется на отраженный и преломленный. При определенных условиях один из этих лучей (отраженный или преломленный) может отсутствовать. Например, при падении луча на поверхность идеально проводящего тела возникает только отраженный луч. При расчетах по методу геометрической оптики предполагается, что, как и в случае падения плоской волны на безграничную плоскую границу раздела двух сред, направления отраженного и преломленного лучей определяются законами Снеллиуса, а амплитуды векторов поля, соответствующих отраженному и преломленному лучам, на поверхности раздела двух сред определяются формулами Френеля (разд. 10.2). Если отражение происходит от поверхности идеально проводящего тела, то нормальная составляющая напряженности электрического поля, соответствующая отраженному лучу, в точке отражения равна нормальной составляющей электрического поля падающего луча в той же точке, а касательные составляющие напряженности электрического поля падающего и отраженного лучей отличаются только знаком (сдвинуты по фазе на 180°). Иными словами, если в точке отражения M на поверхности идеально проводящего тела напряженность электрического поля, соответствующего падающему лучу, $\dot{\mathbf{E}}^0(M) = \mathbf{n}_0 \dot{E}_n^0(M) + \boldsymbol{\tau}_0 \dot{E}_\tau^0(M)$, то напряженность электрического поля, соответствующего отраженному лучу, в этой точке

$$\dot{\mathbf{E}}'(M) = \mathbf{n}_0 \dot{E}_n^0(M) - \boldsymbol{\tau}_0 \dot{E}_\tau^0(M). \tag{12.4.4}$$

Изменение знака у касательной составляющей показывает, что отражение сопровождается изменением ориентации вектора $\dot{\mathbf{E}}$. При этом направление вектора $\dot{\mathbf{E}}'$ оказывается перпендикулярным отраженному лучу. Вектор $\dot{\mathbf{H}}'$ поля отраженного луча в точке M выражается через $\dot{\mathbf{E}}'$ соотношением

$$\dot{\mathbf{H}}' = \frac{1}{Z_c}[\mathbf{l}_0, \ \dot{\mathbf{E}}'], \tag{12.4.5}$$

где $\mathbf{l}_0$ — орт направления отраженного луча.

Зная поле отраженного луча в точке отражения, можно найти поле в любой точке этого луча. Действительно, рассматривая соответствующую энергетическую трубку, придем к формуле, аналогичной (12.4.3), в которую, конечно, вместо радиусов кривизны фронта падающей волны должны войти радиусы кривизны фронта отраженной волны.

В тех случаях, когда через рассматриваемую точку пространства проходят несколько лучей (например, луч от источника поля и отраженный), поле в этой точке определяется как сумма полей, соответствующих каждому лучу.

Таким образом, для вычисления поля по методу геометрической оптики нужно знать главные радиусы кривизны фронтов падающей и отраженной волн, что является чисто геометрической задачей, которую можно решить в каждом конкретном случае[1]).

В качестве примера рассмотрим в приближении геометрической оптики задачу дифракции плоской волны на идеально проводящем круговом цилиндре радиуса a (рис. 12.2.1), строгое решение которой было получено в разд. 12.2. Плоскую волну заменим семей-

[1]) Из-за ограниченного объема книги здесь не рассматривается ряд вопросов и понятий, имеющих фундаментальное значение для геометрической оптики, таких, как оптическая длина пути, принцип Ферма, уравнение Эйконала и др.

ством лучей, параллельных оси X, и выделим энергетическую трубку прямоугольного сечения $\Delta S_0=\Delta y\Delta z$. Сечение трубки плоскостью, перпендикулярной оси Z, показано на рис. 12.4.3.

Ограничимся вычислением модуля напряженности электрического поля, отраженного от цилиндра, на большом расстоянии от него (т. е. вычислением $|\dot{\mathrm{E}}'|$ при $r\gg a$). Рассмотрим отражение лучей, образующих боковую поверхность выделенной энергетической трубки (два параллельных луча на рис. 12.4.3). Первый луч отражается в точке M_1, которая видна из начала координат под углом θ. Соответствующий отраженный луч составляет с осью X угол 2θ. Второй луч отражается в точке M_2, которая видна из начала координат под углом $\theta+\Delta\theta$. Соответствующий отраженный луч составляет с осью X угол $2\theta+2\Delta\theta$. Таким образом, пучок лучей, образующих энергетическую трубку, после отражения от цилиндра становится расходящимся. Поперечное сечение трубки, соответствующей отраженной волне $\Delta S_1=2r_1\Delta\theta\Delta z$, где r_1 — расстояние от точки O' до рассматриваемого сечения ΔS_1. Учитывая, что $\Delta y=a\cos\theta\Delta\theta$, получаем из ф-лы (12.4.1) следующее соотношение:

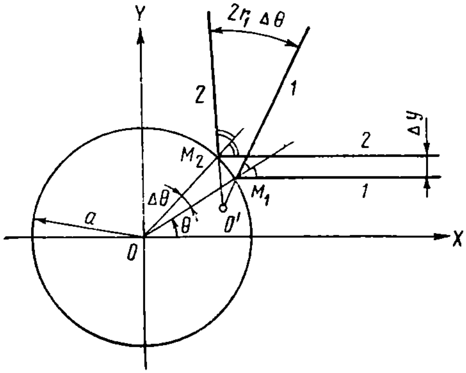


Рис. 12.4.3

$$\frac{|\dot{\mathrm{E}}'|^2}{|\dot{\mathrm{E}}^0|}=\frac{\Delta S_0}{\Delta S_1}=\frac{a}{2r_1}\cos\theta. \qquad (12.4.6)$$

На большом расстоянии от цилиндра $r_1\approx r$, где r — расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения $N(r;\ \varphi;\ z)$. Так как угол φ, характеризующий точку наблюдения, равен 2θ, то при $r\gg a$ (12.4.6) принимает вид

$$|\dot{\mathrm{E}}'|=\frac{\sqrt{a}\,|\dot{\mathrm{E}}^0|}{\sqrt{2r}}\sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}}. \qquad (12.4.7)$$

Зависимость величины $|\dot{\mathrm{E}}'|$ от угла φ (функция $\sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}}$) показана пунктирной линией на рис. 12.2.2. Из приведенных на этом рисунке графиков следует, что различие между результатами, полученными методом геометрической оптики и строгим решением в освещенной области, уменьшается с увеличением $ka=2\pi a/\lambda$.

Как уже отмечалось, метод геометрической оптики является приближенным. Он позволяет определить отраженное поле, если радиусы кривизны фронта падающей и отраженной волн велики по сравнению с длиной волны. При этом необходимо, чтобы размеры отражающего тела и минимальный радиус кривизны его поверхности были велики по сравнению с длиной волны, а источник, создающий электромагнитное поле, находился на достаточно большом расстоянии d от поверхности тела ($kd \gg 1$). Получаемые в этом случае результаты будут близки к точным в освещенной части пространства в точках, достаточно удаленных от границы геометрической тени. Для определения поля в области геометрической тени, а также вблизи точек, в которых пересекается пучок отраженных лучей (такие точки называют *фокальными*), метод геометрической оптики неприменим. Например, согласно представлениям геометрической оптики в области геометрической тени поле должно отсутствовать. В действительности из-за дифракции волн поле проникает в область геометрической тени (см. например, диаграммы на рис. 12.2.2).

Методы вычисления поля, основанные на приближении Гюйгенса—Кирхгофа (разд. 12.3) и на геометрической оптике, существенно различны. В геометрической оптике предполагается, что поле в любой точке пространства определяется значениями его векторов в тех точках поверхности тела или волнового фронта, из которых приходят лучи в данную точку. Метод, основанный на приближении Гюйгенса—Кирхгофа, использует принцип Гюйгенса. Однако эти методы имеют общую черту. В геометрической оптике предполагается, что в каждой точке поверхности идеально проводящего тела волна отражается так же, как от идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности тела в рассматриваемой точке. Поэтому, выражая вектор плотности поверхностных токов $\mathbf{j}_S$ через напряженность полного магнитного поля, вычисленного на основе геометрической оптики, получаем, что на освещенной части поверхности тела выполняется соотношение (12.3.6), а на теневой $\mathbf{j}_S=0$. Эти же соотношения используются и в приближении Гюйгенса—Кирхгофа. Следовательно, в методе, основанном на приближении Гюйгенса—Кирхгофа, по существу, предполагается, что вблизи отражающего тела справедливы законы геометрической оптики[1]). Часто эти методы совмещают. Например, при расчете диаграмм направленности параболических (и ряда других) антенн сначала на основе геометрической оптики определяют поле в раскрыве антенны, а затем по найденным значениям векторов вычисляют поле в дальней зоне, используя приближение Гюйгенса—Кирхгофа.

12.5. Метод краевых волн

Метод краевых волн в физической теории дифракции[2]), предложенный П. Я. Уфимцевым, является развитием и уточнением

[1]) Поэтому, как уже указывалось, метод вычисления поля, основанный на приближении Гюйгенса-Кирхгофа, называют также методом физической оптики.

[2]) Физической теорией дифракции обычно называют методы решения дифракционных задач, в которых для упрощения решения используют различные допущения о характере поля или токов на поверхности рассматриваемого тела. Методы, позволяющие найти строгие решения задач дифракции, называют математической теорией дифракции.

метода физической оптики применительно к выпуклым металлическим телам, поверхность которых имеет изломы (ребра). Изложим основные принципы этого метода.

Пусть плоская электромагнитная волна падает на идеально проводящее тело, находящееся в свободном пространстве. Под действием этой волны на поверхности тела возникают электрические токи, которые создают вторичное поле. В физической оптике предполагается, что плотность токов $\dot{\mathbf{j}}_S$, наведенных на поверхности тела S,

$$\dot{\mathbf{j}}_S^0 = \begin{cases} 2[\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}^0] & \text{на } S_0; \\ 0 & \text{на } S_1, \end{cases} \tag{12.5.1}$$

где $\dot{\mathbf{H}}^0$ — напряженность магнитного поля падающей волны;
$\mathbf{n}_0$ — орт внешней нормали к поверхности S;
S_0 и S_1 — освещенная и теневая части поверхности тела (очевидно, что $S=S_0+S_1$).

В действительности плотность токов $\dot{\mathbf{j}}_S$, возникающих на поверхности тела, отличается от $\dot{\mathbf{j}}_S^0$. Представим вектор $\dot{\mathbf{j}}_S$ в виде

$$\dot{\mathbf{j}}_S = \dot{\mathbf{j}}_S^0 + \dot{\mathbf{j}}_S'. \tag{12.5.2}$$

Функцию $\dot{\mathbf{j}}_S'$ можно рассматривать как плотность некоторого добавочного по отношению к $\dot{\mathbf{j}}_S^0$ тока, обусловленного искривлением[1]) поверхности тела.

Составляющую $\dot{\mathbf{j}}_S^0$ принято называть «равномерной» частью плотности тока, а составляющую $\dot{\mathbf{j}}_S'$ соответственно «неравномерной».

Учет только составляющей $\dot{\mathbf{j}}_S^0$ дает решение задачи в приближении физической оптики. Для получения более точного решения нужно учесть также составляющую $\dot{\mathbf{j}}_S'$. Истинные значения функции $\dot{\mathbf{j}}_S$ можно найти лишь при строгом решении рассматриваемой дифракционной задачи, что во многих случаях сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому приходится ограничиться определением приближенных значений $\dot{\mathbf{j}}_S$. В ряде случаев это можно сделать на основе некоторых упрощающих допущений.

Метод краевых волн позволяет находить приближенные значения составляющей $\dot{\mathbf{j}}_S'$, обусловленной наличием ребер на поверхности выпуклого идеально проводящего тела, если его размеры и расстояние между ребрами велики по сравнению с длиной волны.

Тогда можно предположить, что неравномерная часть тока отлична от нуля только в непосредственной близости от ребра.

---

[1]) Искривлением называют любое отклонение поверхности тела от бесконечной плоскости: плавное искривление, излом, выступ, отверстие и т. д.

При этом распределение тока на малом элементе поверхности тела вблизи ее излома можно приближенно считать таким же, как на соответствующем идеально проводящем бесконечном двугранном угле (клине), который образован плоскостями, касательными к поверхности тела в рассматриваемой точке ребра (сечение тела и соответствующего двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к ребру тела, показано на рис. 12.5.1). П. Я. Уфимцевым было проанализировано распределение тока на клине при возбуждении последнего плоской электромагнитной волной (эта задача имеет строгое решение). Анализ показал, что неравномерная часть плотности тока в этом случае имеет характер краевой волны (т. е. волны, распространяющейся от ребра клина), быстро убывающей с удалением от ребра.

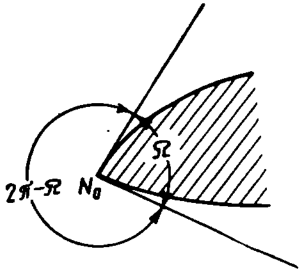


Рис. 12.5.1

Определив указанным выше образом функцию $\ddot{j}'_S$, т. е. задав распределение плотности тока j_S на поверхности тела, можно найти поле, возникающее в результате дифракции плоской волны на рассматриваемом теле. Полученное в результате решение оказывается более точным, чем аналогичное решение, базирующееся на приближении Гюйгенса—Кирхгофа.

Описанная методика решения дифракционной задачи позволяет также учесть взаимное влияние соседних **изломов поверхности** тела. Для этого нужно считать, что краевая волна, соответствующая неравномерной части тока, распространяясь вдоль поверхности тела, достигает соседнего ребра и испытывает на нем дифракцию, возбуждая вторичные краевые волны. Последние, в свою очередь, порождают новые краевые волны и т. д.

На основе метода краевых волн П. Я. Уфимцевым и другими были найдены решения ряда практически важных задач. Численные расчеты показали, что полученные результаты удовлетворительно согласуются с результатами строгих решений и с экспериментальными данными. Подробнее этот метод изложен в [29].

12.6. Геометрическая теория дифракции

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕТОДА

Геометрическая теория дифракции — один из наиболее эффективных методов асимптотического решения задач дифракции на телах сложной конфигурации, размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Этот метод, предложенный Дж. Б. Келлером, является развитием и обобщением геометрической оптики. Как и геометрическая оптика, геометрическая теория дифракции базируется на предположении, что энергия распространяется вдоль лучей, однако, в отличие от геометрической оптики, в ней, помимо падающих, отраженных и преломленных лучей, вводятся так называемые *дифрагированные* лучи. В случае идеально проводящих тел дифрагированные лучи возникают при падении луча на ребро или острую вершину поверхности рассматриваемого тела, а также при распространении его по касательной к плавно изогнутой поверхности.

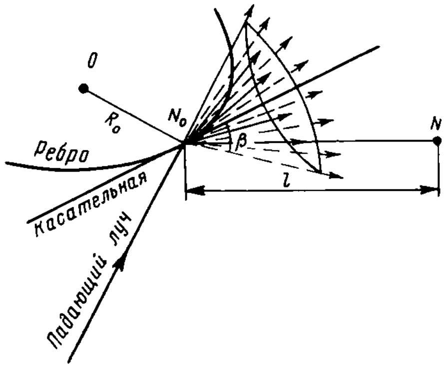


Рис. 12.6.1

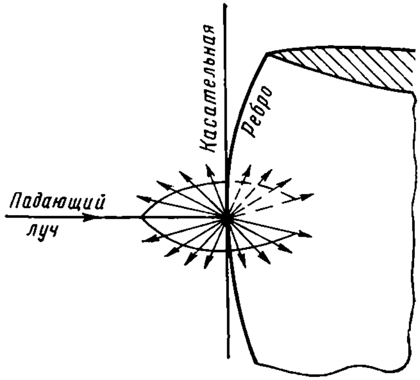


Рис. 12.6.2

Если падающий луч попадает на ребро тела, то возникает система дифрагированных лучей, как бы образующих поверхность кругового конуса с вершиной в точке соприкосновения падающего луча с краем тела, называемой точкой дифракции (рис. 12.6.1). При этом ось конуса совпадает с касательной к ребру, а угол раскрыва конуса (2β) равен удвоенному углу между падающим лучом и этой касательной. В тех случаях, когда падающий луч перпендикулярен касательной к ребру тела (рис. 12.6.2), коническая поверхность, образуемая дифрагированными лучами, вырождается в плоскость, перпендикулярную к ребру в точке дифракции.

Если падающий луч попадает на острую вершину рассеивающего тела, то дифрагированные лучи расходятся от нее во все стороны, как от точечного источника (рис. 12.6.3).

Если падающий луч распространяется вдоль касательной к плавно изогнутой поверхности (рис. 12.6.4), то в точке касания (ее также называют точкой дифракции) он расщепляется на два луча, один из которых распространяется в прежнем направлении, а второй скользит по поверхности тела вдоль геодезической линии[1]), образуя «поверхностный» луч. В каждой точке от него отделяется прямолинейный дифрагированный луч, совпадающий с касательной к поверхностному лучу в точке отрыва.

---

[1]) Геодезической линией называют линию на поверхности, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю (геодезическая кривизна — это кривизна проекции рассматриваемой кривой на плоскость, касающуюся поверхности в данной точке). Достаточно малые дуги геодезической линии являются кратчайшими расстояниями между их концами на поверхности.

Таким образом, во всех случаях, когда возникают дифрагированные лучи, наблюдается характерная особенность: один луч вызывает появление бесчисленного множества дифрагированных лучей. Последние проникают в область геометрической тени и создают в ней некоторое поле. Кроме того, они изменяют поле в освещенной области.

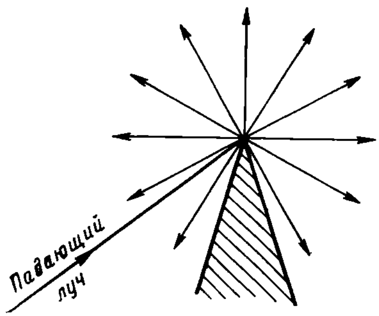


Рис. 12.6.3

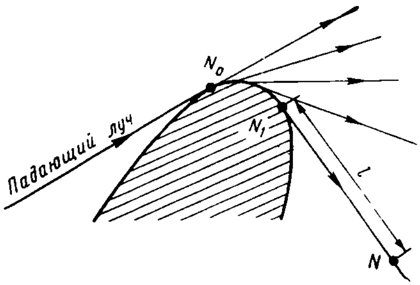


Рис. 12.6.4

Для определения поля в какой-либо точке пространства на основе геометрической теории дифракции нужно сначала найти все лучи, проходящие через данную точку, а затем вычислить поля, соответствующие каждому лучу, и просуммировать их. Иными словами, напряженность полного электрического поля в некоторой точке N можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{E}}(N) = \dot{\mathbf{E}}^0(N) + \dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}(N) + \dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N), \tag{12.6.1}$$

где $\dot{\mathbf{E}}^0(N)$, $\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}(N)$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N)$ — векторы напряженности электрических полей падающего, отраженного и дифрагированных лучей в точке N соответственно. Аналогично записывается выражение для напряженности магнитного поля.

Векторы $\dot{\mathbf{E}}^0(N)$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}(N)$ вычисляются так же, как в геометрической оптике (разд. 12.3). При определении вектора $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N)$, соответствующего *одному* дифрагированному лучу, предполагается, что в точке дифракции N_0 он пропорционален вектору $\dot{\mathbf{E}}^0(N_0)$ падающего луча. Коэффициент пропорциональности называют *коэффициентом дифракции*. Кроме того, предполагается, как обычно, что фаза вектора $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N)$ изменяется линейно вдоль луча, а характер изменения амплитуды устанавливается из условия постоянства потока энергии вдоль соответствующей лучевой (энергетической) трубки[1]).

Ниже приводятся основные формулы, позволяющие вычислить поле дифрагированных лучей.

---

[1]) Указанные предположения в равной мере относятся и к вектору напряженности магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_{\text{д}}(N)$ дифрагированного луча.

Таким образом, во всех случаях, когда возникают дифрагированные лучи, наблюдается характерная особенность: один луч вызывает появление бесчисленного множества дифрагированных лучей. Последние проникают в область геометрической тени и создают в ней некоторое поле. Кроме того, они изменяют поле в освещенной области.

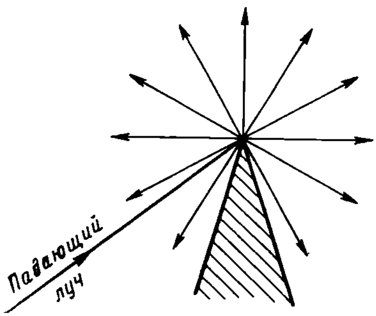


Рис. 12.6.3

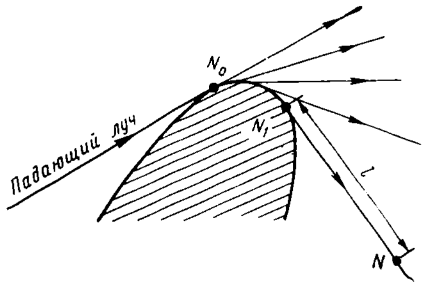


Рис. 12.6.4

Для определения поля в какой-либо точке пространства на основе геометрической теории дифракции нужно сначала найти все лучи, проходящие через данную точку, а затем вычислить поля, соответствующие каждому лучу, и просуммировать их. Иными словами, напряженность полного электрического поля в некоторой точке N можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{E}}(N) = \dot{\mathbf{E}}^0(N) + \dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}(N) + \dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N), \qquad (12.6.1)$$

где $\dot{\mathbf{E}}^0(N)$, $\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}(N)$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N)$ — векторы напряженности электрических полей падающего, отраженного и дифрагированных лучей в точке N соответственно. Аналогично записывается выражение для напряженности магнитного поля.

Векторы $\dot{\mathbf{E}}^0(N)$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}(N)$ вычисляются так же, как в геометрической оптике (разд. 12.3). При определении вектора $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N)$, соответствующего *одному* дифрагированному лучу, предполагается, что в точке дифракции N_0 он пропорционален вектору $\dot{\mathbf{E}}^0(N_0)$ падающего луча. Коэффициент пропорциональности называют *коэффициентом дифракции*. Кроме того, предполагается, как обычно, что фаза вектора $\dot{\mathbf{E}}_{\text{д}}(N)$ изменяется линейно вдоль луча, а характер изменения амплитуды устанавливается из условия постоянства потока энергии вдоль соответствующей лучевой (энергетической) трубки[1]).

Ниже приводятся основные формулы, позволяющие вычислить поле дифрагированных лучей.

---

[1]) Указанные предположения в равной мере относятся и к вектору напряженности магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_{\text{д}}(N)$ дифрагированного луча.

ПОЛЕ ДИФРАГИРОВАННЫХ ЛУЧЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА РЕБРЕ

Пусть появление дифрагированных лучей вызвано падением какого-либо луча на ребро идеально проводящего тела (рис. 12.6.1). Поле, соответствующее падающему лучу, в точке дифракции N_0 считается известным, а радиус кривизны ребра полагается большим по сравнению с длиной волны.

Комплексную амплитуду напряженности электрического поля дифрагированного луча $\dot{\mathbf{E}}_{m\text{д}}(N)$ в точке N рассматриваемого луча, находящейся на расстоянии l от начальной точки луча N_0, можно выразить через комплексную амплитуду напряженности электрического поля $\dot{\mathbf{E}}_{m\text{д}}(N_0)$ того же луча в точке N_0. Поступая так же, как при выводе ф-лы (12.4.3), но, учитывая, что в рассматриваемом случае один из главных радиусов кривизны фронта дифрагированной волны (например, R_2) равен нулю, получаем соотношение

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\text{д}}(N) = \dot{\mathbf{E}}_{m\text{д}}(N_0)\sqrt{\frac{R_1}{l(R_1+l)}}\,e^{-ikl}. \qquad (12.6.2)$$

Аналогично записывается вектор $\dot{\mathbf{H}}_{m\text{д}}(N)$.

Радиус R_1 кривизны фронта дифрагированной волны зависит от формы ребра и направления распространения падающего луча. Его можно вычислить для любой конкретной формы ребра по формуле

$$R_1 = -\frac{R_0 \sin^2\beta}{\cos\gamma + R_0\dot{\beta}\sin\beta}, \qquad (12.6.3)$$

где γ — угол между рассматриваемым дифрагированным лучом и внутренней нормалью к ребру тела в точке N_0; β — угол между падающим лучом и касательной к ребру в точке N_0; R_0 — радиус кривизны ребра в точке N_0, а $\dot{\beta}$ — производная угла β по длине дуги вдоль ребра в точке N_0 (рис. 12.6.5).

Вводя коэффициент дифракции, можно выразить векторы $\dot{\mathbf{E}}_{m\text{д}}(N_0)$ и $\dot{\mathbf{H}}_{m\text{д}}(N_0)$, а следовательно, и векторы $\dot{\mathbf{E}}_{m\text{д}}(N)$ и $\dot{\mathbf{H}}_{m\text{д}}(N)$ в рассматриваемой точке луча (N) через комплексные амплитуды соответствующих векторов поля падающего луча $\dot{\mathbf{E}}^{(0)}_m(N_0)$ и $\dot{\mathbf{H}}^{(0)}_m(N_0)$ в точке N_0. Келлер предположил, что при одинаковых направлениях падающего луча коэффициент дифракции на ребре идеально проводящего тела в случае, когда радиус кривизны ребра значительно превышает длину волны, не отличается от коэффициента дифракции на идеально проводящем клине, ребро которого совпадает с касательной к ребру рассматриваемого тела в точке N_0, а грани касаются поверхности тела в точке дифракции N_0 (рис. 12.5.1). Поэтому для определения коэффициента дифракции Келлером была проанализирована задача дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем клине. Известно (см., например, [29]), что такая задача (при произвольном падении волны) сводится к анализу дифракции двух независимых плоских волн, в одной из которых ребру клина параллелен вектор напряженности электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$, а в другой — вектор напряженности магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}$. При этом можно ограничиться определением лишь параллельных ребру клина составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ (обозначим их $\dot{E}_{\parallel}$ и $\dot{H}_{\parallel}$), так как все остальные составляющие поля можно выразить через $\dot{E}_{\parallel}$ и $\dot{H}_{\parallel}$. Соответственно можно ограничиться определением коэффициентов дифракции для составляющих $\dot{E}_{\parallel}$ и $\dot{H}_{\parallel}$. Келлером было показано, что

$$\left.\begin{matrix} D_E \\ D_H \end{matrix}\right\} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{n\sin\beta\sqrt{2\pi k}}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi_1-\varphi_0}{n}} \mp \right. \\ \left. \mp\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\varphi_1+\varphi_0}{n}}\right], \qquad (12.6.4)$$

где $n=(2\pi-\Omega)/\pi$, Ω — угол клина (рис. 12.5.1), а φ_0 и φ_1 — соответственно углы между проекциями падающего и дифрагированного лучей на плоскость, перпендикулярную к ребру тела в точке дифракции N_0, и линией пересечения этой плоскости с плоскостью, касательной к освещенной части поверхности тела в точке N_0 (рис. 12.6.5).

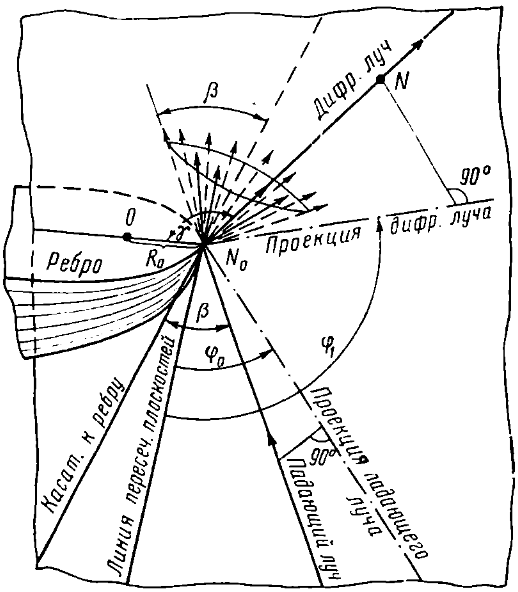


Рис. 12.6.5

В случае дифракции на ребре произвольной формы также можно ограничиться определением составляющих напряженностей электрического и магнитного полей, параллельных касательной к ребру тела в точке N_0, так как через них можно выразить и остальные составляющие поля. Таким образом, составляющую напряженности электрического поля дифрагированного луча, параллельную касательной к ребру тела в точке N_0, можно представить в виде

$$\dot{E}_{\parallel}(N) = \frac{\dot{E}^0_{\parallel}(N_0)\, D_E(N_0)\, e^{-ikl}}{\left[l\left(1-\frac{l}{R_0}\frac{\cos\gamma+R_0\,\dot{\beta}\sin\beta}{R_0\sin^2\beta}\right)\right]^{1/2}}, \qquad (12.6.5)$$

где $\dot{E}^0_{\parallel}(N_0)$ — составляющая напряженности электрического поля падающего луча, параллельная касательной к ребру тела в точке N_0.

Аналогично записывается выражение для $\dot{H}^0_{\parallel}(N)$.

Отметим, что при желании можно найти коэффициент дифракции непосредственно для вектора $\dot{\mathbf{E}}$ (или $\dot{\mathbf{H}}$), однако, в отличие от определяемого ф-лой (12.6.4), он будет уже не скаляром, а тензором.

ПОЛЕ ДИФРАГИРОВАННЫХ ЛУЧЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПАДАЮЩЕГО ЛУЧА ВДОЛЬ КАСАТЕЛЬНОЙ К ПЛАВНО ИЗОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

В этом случае (рис. 12.6.4) дифрагированный луч состоит из двух частей: из отрезка $(N_0—N_1)$ геодезической линии и касательной $(N_1—N)$ к поверхности тела в точке N_1 отрыва луча. Как обычно предполагается, что фаза поля изменяется линейно вдоль всего дифрагированного луча, а амплитуда поля поверхностного луча в точке N_0 пропорциональна амплитуде поля падающего луча в этой точке. Коэффициент пропорциональности также называется коэффициентом дифракции.

Векторы $\dot{\mathbf{E}}^0_m$ и $\dot{\mathbf{H}}^0_m$ поля падающего луча в точке дифракции N_0 перпендикулярны к поверхностному лучу. Это поле в общем случае можно представить в виде двух волн, одна из которых имеет в точке N_0 только касательную к поверхности тела (но перпендикулярную к поверхностному лучу!) составляющую вектора напряженности электрического поля $\dot{E}^0_{m\tau}$ и нормальную к поверхности тела составляющую вектора напряженности магнитного поля $\dot{H}^0_{mn}$, а другая, наоборот, только составляющие $\dot{E}^0_{mn}$ и $\dot{H}^0_{m\tau}$. Каждая из этих волн возбуждает свою поверхностную волну, распространяющуюся вдоль рассматриваемого поверхностного луча независимо от второй волны. Следовательно, вместо коэффициента дифракции для вектора $\dot{\mathbf{E}}_m$ (или $\dot{\mathbf{H}}_m$), который в общем случае является тензором, можно ввести скалярные коэффициенты дифракции для каждой из составляющих $\dot{E}_{mn}$ и $\dot{E}_{m\tau}$ (или соответственно для $\dot{H}_{m\tau}$ и $\dot{H}_{mn}$).

Рассмотрим сначала поле поверхностного луча, возникающее в случае волны с составляющими $\dot{E}^0_{mn}$ и $H^0{}_{m\tau}$. В качестве лучевой трубки выберем узкую полоску поверхностных лучей (рис. 12.6.6). Обозначим ее ширину в точке N_0 через $\Delta\sigma_0$, а в точке N_1, отстоящей от N_0 на расстоянии s, через $\Delta\sigma(s)$. Пусть средний поток энергии через сечение полоски $\Delta\sigma(s)$ равен $P(s)$, а через сечение $\Delta\sigma(s+ds)$ равен $P(s+ds)$.

Как уже отмечалось, от поверхностного луча в каждой его точке отщепляется прямолинейный дифрагированный луч, распространяющийся вдоль касательной к поверхностному лучу в точке отрыва. Это эквивалентно излучению энергии с полоски поверхностных лучей. Предположим, что изменение потока энергии $dP=P(s+ds)-P(s)$ на участке от s до $s+ds$ вдоль выбранной лучевой трубки пропорционально потоку энергии $P(s)$ и длине участка ds, т. е. справедливо равенство

$$dP = -2\alpha P(s)\, ds, \qquad (12.6.6)$$

где 2α — коэффициент пропорциональности, а знак «—» показывает, что поток энергии уменьшается вдоль луча. Величина α зависит от формы поверхности тела.

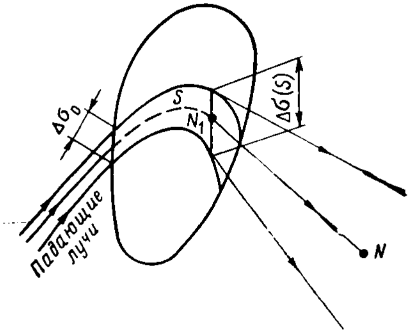


Рис. 12.6.6

Интегрируя ф-лу (12.6.6), находим

$$P(s) = P_0 e^{-2\int\limits_0^s \alpha(t)\, dt}, \qquad (12.6.7)$$

где P_0 — поток энергии через сечение $\Delta\sigma_0$.

Переходя от потока энергии $P(s)$ к амплитуде напряженности электрического поля поверхностного луча (в рассматриваемом случае имеется только $\dot{E}_{mn}$ составляющая), получаем

$$\dot{E}_{mn}(N_1) = \dot{E}_{mn}(N_0)\left[\frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\sigma(s)}\right]^{1/2} e^{-\left[iks + \int\limits_0^s \alpha(t)\, dt\right]}. \qquad (12.6.8)$$

Здесь $\Delta\sigma_0/\Delta\sigma(s)$ — отношение ширины полоски поверхностных лучей при $s=0$ (т. е. в точке N_0) к ее ширине на расстоянии s от $\Delta\sigma_0$ (в точке N_1) или, точнее, предел этого отношения, когда ширина полоски стремится к нулю.

Введя коэффициент дифракции $D(N_0)$, перепишем выражение (12.6.8) в виде

$$\dot{E}_{mn}(N_1) = D(N_0)\,\dot{E}^0_{mn}(N_0)\left[\frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\sigma(s)}\right]^{1/2} e^{-\left[iks + \int\limits_0^s \alpha(t)\, dt\right]}. \qquad (12.6.9)$$

Формула (12.6.9) определяет поле поверхностного луча в точке N_1 через поле падающего луча в точке дифракции N_0.

Закон изменения амплитуды вдоль прямолинейного луча N_1—N устанавливается так же, как и в случае дифрагированных лучей, возникающих на ребре. Предположим, что вектор напряженности электрического поля прямолинейного дифрагированного луча в точке отрыва N_1 пропорционален вектору напряженности электрического поля поверхностного луча в этой же точке. Коэффициент пропорциональности (коэффициент дифракции) обозначим через

$D(N_1)$. Так как в рассматриваемом случае один из радиусов кривизны фронта волны, соответствующей прямолинейным дифрагированным лучам, отщепляющимся от поверхностных лучей (например R_2), равен нулю, то значение $\dot{E}_{mn}$ в точке N определяется выражением

$$\dot{E}_{mn}(N) = D(N_0)\, D(N_1)\, \dot{E}^0_{mn}(N_0) \left[\frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\sigma(s)}\right]^{1/2} \left[\frac{R_1}{l(l+R_1)}\right]^{1/2} \times$$

$$\times\, e^{-\left[ik(l+s)+\int\limits_0^s \alpha(t)\,dt\right]}, \qquad (12.6.10)$$

где l — расстояние между точкой (N_1) отрыва прямолинейного луча от поверхности тела и точкой наблюдения (N); R_1 — отличный от нуля радиус кривизны фронта дифрагированной волны, соответствующей прямолинейным дифрагированным лучам.

Коэффициенты дифракции $D(N_0)$ и $D(N_1)$ должны одинаковым образом зависеть от свойств поверхности тела (и других параметров) в соответствующих точках, так как только в этом случае поле, определяемое ф-лой (12.6.10), будет удовлетворять теореме взаимности [см. разд. 8.11].

Направление вектора $\dot{\mathbf{E}}_m$ в точке N такое же, как в точке N_1, а в точках поверхностного луча оно совпадает с направлением нормали к поверхности тела, т. е. изменяется вдоль луча.

Рассмотрим теперь поле дифрагированных лучей, возникающих в том случае, когда поле падающего луча в точке N_0 имеет составляющие $\dot{E}_{m\tau}$ и $\dot{H}_{mn}$. В отличие от рассмотренного выше случая, поле поверхностных лучей должно быть равно нулю на поверхности тела. Так как на теневую сторону поверхности тела проникают только дифрагированные лучи, то, следовательно, они определяют полное поле, которое должно удовлетворять обычным граничным условиям. Однако при этом также можно использовать концепцию поверхностных лучей, если рассматривать не поверхность тела, а прилегающий к ней слой. Из анализа строгих решений задач дифракции, полученных для цилиндра, сферы и других гладких тел, следует, что поле внутри этого слоя характеризуется определенным распределением вдоль нормали к поверхности тела. В общем случае поле внутри слоя вблизи поверхности тела состоит из ряда волн, имеющих различный характер распределения поля вдоль нормали к поверхности тела и, следовательно, различные коэффициенты D_m и α_m. Рассматривая лучевую трубку, расположенную внутри слоя вдоль поверхности тела, придем к формуле, аналогичной (12.6.10).

Такую же структуру имеет и поле поверхностных лучей, возникающих в том случае, когда поле падающего луча в точке дифракции имеет составляющие $\dot{E}^0_{mn}$ и $\dot{H}^0_{m\tau}$. Поэтому выражение (12.6.10) нужно заменить следующим:

$$\dot{E}_m(N) = \dot{E}^0_m(N_0)\left[\frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\sigma(s)}\right]^{1/2}\left[\frac{R_1}{l(R_1+l)}\right]^{1/2} e^{-ik(l+s)} \times$$

$$\times \sum_{(m)} D_m^{\cdot}(N_0) D_m(N_1)\, e^{-\int\limits_0^s \alpha_m(t)\,dt} \qquad (12.6.11)$$

В этом выражении величины $\dot{E}_m(N)$ и $\dot{E}^0_m(N_0)$ в зависимости от типа поля падающего луча равны либо касательным, либо нормальным к поверхности тела составляющим напряженности электрического поля дифрагированного и падающего лучей соответственно.

Келлер предположил, что величины D_m и α_m определяются радиусом кривизны поверхности тела в плоскости падения (в плоскости, проходящей через нормаль к поверхности тела и падающий луч) и не зависят от других особенностей поверхности. Поэтому параметры D_m и α_m были найдены Келлером на основе анализа задачи дифракции плоской волны на идеально проводящем круговом цилиндре. Им было показано, что для касательной составляющей вектора $\dot{\mathbf{E}}$ величины D_m и α_m определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} D^2_{m\parallel} &= \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{ka}{6}\right)^{1/3} e^{-i\frac{\pi}{12}}\,[A'(q_m)]^{-2} \\ \alpha_{m\parallel} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}\left(\frac{k}{6}\right)^{1/3} a^{-\frac{2}{3}}\, q_m \end{aligned}\right\}, \qquad (12.6.12)$$

а для нормальной составляющей вектора $\dot{\mathbf{E}}$ — соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} D^2_{m\perp} &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{ka}{6}\right)^{1/3} e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{q'_m}\cdot[A(q'_m)]^{-2} \\ \alpha^{\cdot}_{m\perp} &= \frac{\sqrt{3}+i}{2}\left(\frac{k}{6}\right)^{1/3} a^{-\frac{2}{3}}\, q'_m \end{aligned}\right\}, \qquad (12.6.13)$$

где a — радиус кривизны поверхности тела в плоскости падения в точке начала или отрыва поверхностного луча (радиус кривизны геодезической линии, вдоль которой распространяется поверхностный луч); $A(w) = \int\limits_0^\infty \cos(x^3 - wx)\,dx$ — функция Эйри, $A'(w)$ — производная функции Эйри; q_m — m-й корень функции Эйри, а q'_m — m-й корень производной функции Эйри. Значения корней q_m и q'_m имеются, например, в [35, стр. 353].

Приведенные выше формулы получены в общем виде. При решении конкретных задач методом геометрической теории дифракции нужно вычислить входящие в эти формулы параметры, зависящие от конфигурации рассматриваемого тела, формы фронта падающей волны и направлений падающего и дифрагированного лучей.

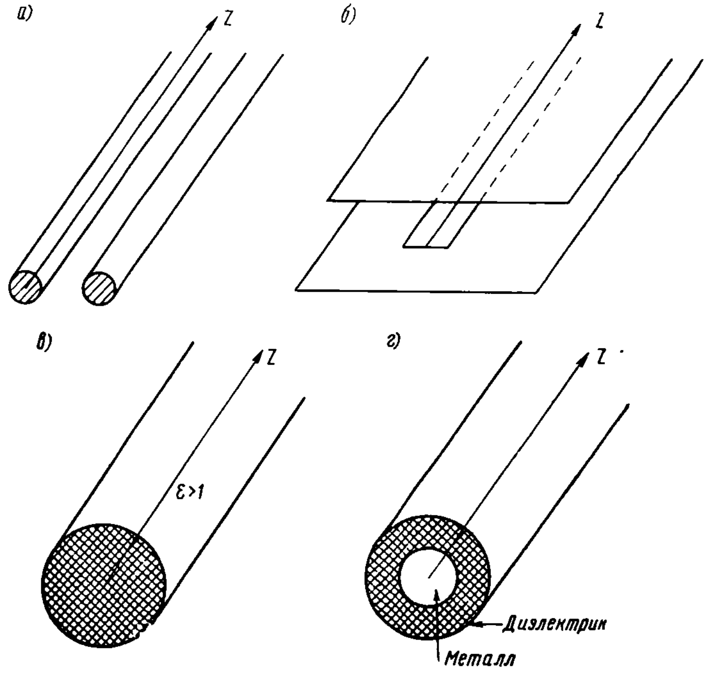
Как уже отмечалось, геометрическая теория дифракции является хорошо разработанным эффективным методом решения задач дифракции на телах сложной конфигурации, размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Результаты, полученные на основе этой теории, хорошо согласуются с результатами строгих решений (когда такие решения возможны) и экспериментальными данными. Однако геометрическая теория дифракции обладает существенным недостатком: она не позволяет определить поле в некоторых областях пространства, например, на границе геометрической тени, на фокальных линиях, на поверхности рассматриваемого тела и др. В этих областях выражения для поля соответствующих лучей обращаются в бесконечность. Такие области принято называть *каустиками*. Для определения поля в каустиках (и в непосредственной близости к ним) Келлером и другими были разработаны специальные приемы, которые здесь не рассматриваются.

ГЛАВА 13

НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ И НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

13.1. Направляющие системы

Направляемые волны, в отличие от свободно распространяющихся в пространстве электромагнитных волн, могут существовать только при наличии каких-либо направляющих элементов: металлических, диэлектрических или полупроводящих поверхностей, трубок, стержней и др. Совокупность направляющих элементов образует *направляющую систему*. Направляющие системы служат для передачи энергии электромагнитной волны от источника (генератора) к потребителю, например, от передатчика к антенне, из приемной антенны ко входу приемника и т. д. В связи с этим направляющие системы называют также линиями передачи энергии.



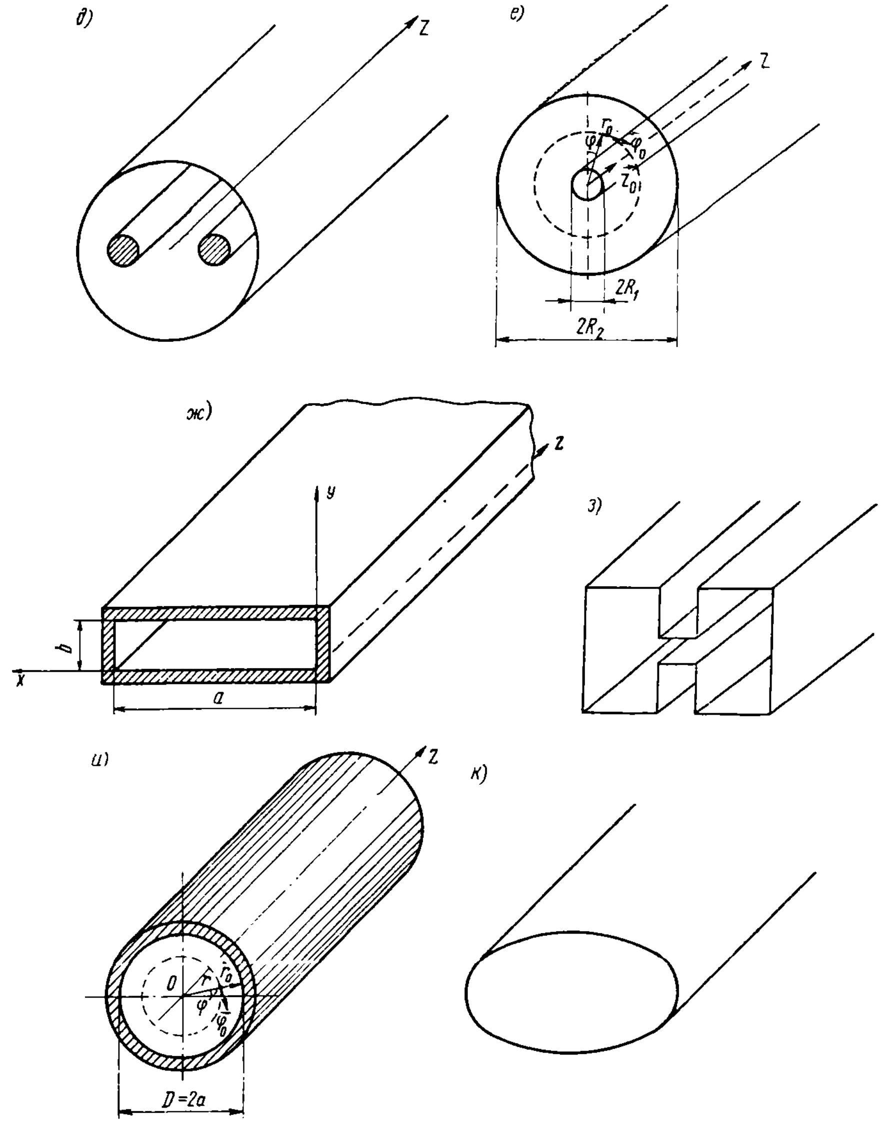


Рис. 13.1.1

На рис. 13.1.1 изображен ряд используемых на практике линий передачи: двухпроводная линия *(а)*, полосковая линия *(б)*, диэлектрический волновод *(в)*, однопроводная линия *(г)*, экранированная двухпроводная линия *(д)*, коаксиальная линия *(е)*, прямоугольный волновод *(ж)*, *H*-волновод *(з)*, круглый волновод *(и)*, эллиптический волновод *(к)*. Все линии передачи можно разделить на два больших класса: линии передачи открытого типа (рис. 13.1.1*а—г*) и линии передачи закрытого типа (рис. 13.1.1*д—к* включительно). В линиях передачи закрытого типа вся энергия сосредоточена в пространстве, экранированном от внешней среды металлической оболочкой той или иной формы. В линиях передачи открытого типа электромагнитное поле, строго говоря, распределено во всем пространстве, окружающем линию. Однако открытые линии выполняются обычно таким образом, что подавляющая часть энергии электромагнитного поля сосредотачивается в непосредственной близости от линии. Тем не менее открытые линии подвержены влиянию окружающей среды. Параметры таких линий существенно зависят от метеорологических условий (дождь, снег, гололед), что ограничивает их применение в диапазоне свч.

13.2. Классификация направляемых волн

Направляемые волны делятся на поперечные, электрические, магнитные и смешанные.

Поперечными, или волнами *TEM* [1]), называются волны, у которых в продольном направлении, т. е. в направлении распространения энергии, отсутствуют составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей. Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Электрическими, или волнами *E,* называются волны, у которых вектор электрического поля, помимо поперечных составляющих, имеет продольную составляющую. Продольная составляющая вектора магнитного поля равна нулю. Волны *E* иногда называют поперечными магнитными волнами, или волнами *TH*.

Магнитными, или волнами *H,* называют волны, у которых вектор магнитного поля, помимо поперечных составляющих, имеет продольную составляющую. Продольная составляющая вектора электрического поля равна нулю. Волны *H* иногда называют поперечными электрическими волнами, или волнами *TE*.

Смешанными (гибридными) называют волны, у которых векторы электрического и магнитного полей имеют как продольную, так и поперечные составляющие.

13.3. Связь между продольными и поперечными составляющими полей в однородной направляющей системе

Рассмотрим произвольную бесконечно длинную направляющую систему, ориентированную вдоль оси z. Будем полагать, что направляющая система не вносит потерь и однородна, т. е.:

— форма поперечного сечения не зависит от координаты z;

[1]) Т-первая буква английского слова transvers, что означает «поперечный».

— параметры среды, в которой распространяется электромагнитное поле, и граничные условия, которым удовлетворяют поля, не зависят от координаты z.

В гл. 5 было показано, что при отсутствии сторонних источников векторы напряженности монохроматических электрического и магнитного полей должны удовлетворять однородным уравнениям Гельмгольца [ф-лы (5.1.12) и (5.1.13)]. Будем искать частные решения этих уравнений для случая электромагнитных волн, бегущих вдоль однородной направляющей системы. При этом зависимость векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ от координаты z должна описываться множителем $e^{\pm i\beta z}$, т. е.

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}(\xi,\ \eta)\, e^{\pm i\beta z} = \dot{\mathbf{E}}_s\, e^{\pm i\beta z}; \tag{13.3.1}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}(\xi,\ \eta)\, e^{\pm i\beta z} = \dot{\mathbf{H}}_s\, e^{\pm i\beta z}, \tag{13.3.2}$$

где множитель $e^{-i\beta z}$ соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси z, а множитель $e^{i\beta z}$ — волне, бегущей в обратном направлении. Индекс s означает, что рассматриваемая величина зависит только от поперечных координат. ξ и η — координаты поперечного сечения линии передачи. Выбор конкретной системы координат зависит от формы поперечного сечения линии.

Подставляя (13.3.1) и (13.3.2) в (5.1.12) и (5.1.13), получим при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a$ и $\tilde{\mu} = \mu_a$ систему из двух векторных уравнений:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + (\omega^2\varepsilon_a\mu_a - \beta^2)\, \dot{\mathbf{E}} = 0; \tag{13.3.3}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + (\omega^2\varepsilon_a\mu_a - \beta^2)\, \dot{\mathbf{H}} = 0. \tag{13.3.4}$$

Введем обозначение

$$\gamma_\perp^2 = \omega^2\varepsilon_a\mu_a - \beta^2 \tag{13.3.5}$$

и назовем величину $\gamma_\perp$ поперечным волновым числом.

Каждое из ур-ний (13.3.3) и (13.3.4) эквивалентно трем скалярным уравнениям для продольной и двух поперечных составляющих. Однако при анализе линий нет надобности искать решения всех шести уравнений. Достаточно решить уравнения для продольных составляющих, т. е. два уравнения. Поперечные составляющие можно выразить через продольные с помощью соотношений, вытекающих из дифференциальных уравнений Максвелла. При выводе этих соотношений и везде далее[1]) для упрощения записи опущен нижний индекс m. Например, вместо $\dot{H}_{zm}$ пишется $\dot{H}_z$.

Согласно (13.3.1) и (13.2.2) дифференцирование по координате z эквивалентно умножению вектора на множитель $(-i\beta)$, что позволяет ур-ния (4.4.23) при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a$ и $\tilde{\mu} = \mu_a$ записать в виде:

---

[1]) Кроме разд. 13.9 и 15.3.

$$\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}+\mathrm{i}\,\beta\,\dot H_y=\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a\dot E_x,\qquad -\mathrm{i}\,\beta\,\dot E_x-\frac{\partial \dot E_z}{\partial x}=-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\dot H_y; \tag{13.3.6}$$

$$\frac{\partial \dot E_z}{\partial y}+\mathrm{i}\,\beta\,\dot E_y=-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\dot H_x,\qquad -\mathrm{i}\,\beta\,\dot H_x-\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}=\mathrm{i}\omega\varepsilon_a\,\dot E_y. \tag{13.3.7}$$

Решая систему (13.3.6) относительно $\dot H_y$ и $\dot E_x$, получаем:

$$-\gamma_\perp^2\,\dot E_x=\mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial x}+\mathrm{i}\,\omega\mu_a\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}\,; \tag{13.3.8}$$

$$-\gamma_\perp^2\,\dot H_y=\mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}+\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a\frac{\partial \dot E_z}{\partial x}\,. \tag{13.3.9}$$

Аналогично из (13.3.7) находим $\dot E_y$ и $\dot H_x$:

$$-\gamma_\perp^2\dot E_y=\mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial y}-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}\,; \tag{13.3.10}$$

$$-\gamma_\perp^2\,\dot H_x=\mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}-\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial y}\,. \tag{13.3.11}$$

Система ур-ний (13.3.8)—(13.3.11) связывает поперечные и продольные составляющие поля в декартовой системе координат. Для выражения этой связи в произвольной системе координат перейдем к векторной форме уравнений. Введем вектор $\dot{\mathbf E}_\perp=\mathbf x_0\dot E_x+\mathbf y_0\dot E_y$. Подставляя в это выражение вместо $\dot E_x$ и $\dot E_y$ их значения из (13.3.8) и (13.3.10), получаем

$$-\gamma_\perp^2\,\dot{\mathbf E}_\perp=\mathrm{i}\,\beta\left(\mathbf x_0\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial x}+\mathbf y_0\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial y}\right)-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\left(-\mathbf x_0\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}+\mathbf y_0\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}\right)=$$
$$=\mathrm{i}\,\beta\,\mathrm{grad}_\perp\,\dot E_z-\mathrm{i}\,\omega\mu_a\left[\mathbf z_0,\ \mathrm{grad}_\perp\,\dot H_z\right], \tag{13.3.12}$$

где значок $\perp$ при градиенте означает, что производные берутся только по поперечным координатам.
Аналогично доказывается равенство

$$-\gamma_\perp^2\,\dot{\mathbf H}_\perp=\mathrm{i}\,\beta\,\mathrm{grad}_\perp\dot H_z+\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a\left[\mathbf z_0\,\mathrm{grad}_\perp\,\dot E_z\right]. \tag{13.3.13}$$

Таким образом, для нахождения структуры полного поля необходимо решить с учетом граничных условий только два дифференциальных уравнения:

$$\nabla^2\dot E_z+\gamma_\perp^2\,\dot E_z=0; \tag{13.3.14}$$

$$\nabla^2\dot H_z+\gamma_\perp^2\,\dot H_z=0 \tag{13.3.15}$$

и воспользоваться равенствами (13.3.12) и (13.3.13) для определения поперечных составляющих.

$$\frac{\partial \dot H_z}{\partial y} + \mathrm{i}\,\beta\,\dot H_y = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a \dot E_x, \qquad -\mathrm{i}\,\beta\,\dot E_x - \frac{\partial \dot E_z}{\partial x} = -\mathrm{i}\,\omega\mu_a \dot H_y; \qquad (13.3.6)$$

$$\frac{\partial \dot E_z}{\partial y} + \mathrm{i}\,\beta\,\dot E_y = -\mathrm{i}\,\omega\mu_a \dot H_x, \qquad -\mathrm{i}\,\beta\,\dot H_x - \frac{\partial \dot H_z}{\partial x} = \mathrm{i}\omega\varepsilon_a \dot E_y. \qquad (13.3.7)$$

Решая систему (13.3.6) относительно $\dot H_y$ и $\dot E_x$, получаем:

$$-\gamma_\perp^2 \dot E_x = \mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial x} + \mathrm{i}\,\omega\mu_a \frac{\partial \dot H_z}{\partial y}; \qquad (13.3.8)$$

$$-\gamma_\perp^2 \dot H_y = \mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial y} + \mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot E_z}{\partial x}. \qquad (13.3.9)$$

Аналогично из (13.3.7) находим $\dot E_y$ и $\dot H_x$:

$$-\gamma_\perp^2 \dot E_y = \mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot E_z}{\partial y} - \mathrm{i}\,\omega\mu_a \frac{\partial \dot H_z}{\partial x}; \qquad (13.3.10)$$

$$-\gamma_\perp^2 \dot H_x = \mathrm{i}\,\beta\,\frac{\partial \dot H_z}{\partial x} - \mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot E_z}{\partial y}. \qquad (13.3.11)$$

Система ур-ний (13.3.8)—(13.3.11) связывает поперечные и продольные составляющие поля в декартовой системе координат. Для выражения этой связи в произвольной системе координат перейдем к векторной форме уравнений. Введем вектор $\dot{\mathbf{E}}_\perp = \mathbf{x}_0 \dot E_x + \mathbf{y}_0 \dot E_y$. Подставляя в это выражение вместо $\dot E_x$ и $\dot E_y$ их значения из (13.3.8) и (13.3.10), получаем

$$-\gamma_\perp^2 \dot{\mathbf{E}}_\perp = \mathrm{i}\,\beta\left(\mathbf{x}_0 \frac{\partial \dot E_z}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \dot E_z}{\partial y}\right) - \mathrm{i}\,\omega\mu_a\left(-\mathbf{x}_0 \frac{\partial \dot H_z}{\partial y} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \dot H_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \mathrm{i}\,\beta\,\mathrm{grad}_\perp \dot E_z - \mathrm{i}\,\omega\mu_a [\mathbf{z}_0,\ \mathrm{grad}_\perp \dot H_z], \qquad (13.3.12)$$

где значок $\perp$ при градиенте означает, что производные берутся только по поперечным координатам.

Аналогично доказывается равенство

$$-\gamma_\perp^2 \dot{\mathbf{H}}_\perp = \mathrm{i}\,\beta\,\mathrm{grad}_\perp \dot H_z + \mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a [\mathbf{z}_0\,\mathrm{grad}_\perp \dot E_z]. \qquad (13.3.13)$$

Таким образом, для нахождения структуры полного поля необходимо решить с учетом граничных условий только два дифференциальных уравнения:

$$\nabla^2 \dot E_z + \gamma_\perp^2 \dot E_z = 0; \qquad (13.3.14)$$

$$\nabla^2 \dot H_z + \gamma_\perp^2 \dot H_z = 0 \qquad (13.3.15)$$

и воспользоваться равенствами (13.3.12) и (13.3.13) для определения поперечных составляющих.

13.4. Критическая частота. Критическая длина волны

Из (13.3.5) следует, что коэффициент распространения β является вещественной величиной, если

$$\gamma_\perp \leqslant \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \qquad (13.4.1)$$

и мнимой величиной, если

$$\gamma_\perp > 2\pi f \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}. \qquad (13.4.2)$$

В первом случае фаза изменяется вдоль оси z по линейному закону, что является признаком распространения волны с постоянной фазовой скоростью вдоль этой оси. Во втором случае вдоль оси z фаза остается постоянной, а амплитуда убывает по экспоненциальному закону, что является признаком отсутствия переноса энергии вдоль направляющей системы. Частота, определяемая из условия

$$\gamma_\perp = 2\pi f_{\text{кр}} \sqrt{\varepsilon_a \upsilon_a}, \qquad (13.4.3)$$

называется критической и обозначается $f_{\text{кр}}$:

$$f_{\text{кр}} = \frac{\gamma_\perp}{2\pi \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}. \qquad (13.4.4)$$

Соответствующая этой частоте критическая длина волны равна

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{v_0}{f_{\text{кр}}} = \frac{2\pi}{\gamma_\perp}, \qquad (13.4.5)$$

где v_0 — скорость света в среде с параметрами ε_a и μ_a. Подставляя в (13.3.5) выражение для γ из (13.4.5), получаем

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \upsilon_a - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \qquad (13.4.6)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $\lambda = \frac{v_0}{f}$ — волновое число и длина волны в среде с параметрами ε_a и μ_a. Согласно (13.4.1) свободное распространение волны по направляющей системе имеет место лишь на частотах, превышающих критическую ($f > f_{\text{кр}}$ или $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$).

По аналогии с обычным определением назовем длиной волны Λ в направляющей системе минимальное расстояние между поперечными сечениями, соответствующими различным значениям координаты z, в которых колебания сдвинуты по фазе на 2π. Так как зависимость всех составляющих поля от координаты z описывается выражением $e^{-i\beta z}$, то $\Lambda = 2\pi/\beta$. Подставляя сюда (13.4.6), получаем

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \qquad (13.4.7)$$

13.5. Поперечные электромагнитные волны ($\dot{E}_z=\dot{H}_z=0$)

КРИТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ

У волн *TEM* согласно определению отсутствуют продольные составляющие как вектора электрического, так и вектора магнитного поля.

Полагая в (13.3.12) и (13.3.13) $\dot{E}_z=\dot{H}_z=0$, получаем:

$$\gamma_\perp^2 \dot{\mathbf{E}}_\perp = 0 \text{ и } \gamma_\perp^2 \dot{\mathbf{H}}_\perp = 0, \tag{13.5.1}$$

что удовлетворяется при $\dot{\mathbf{E}}_\perp \neq 0$ и $\dot{\mathbf{H}}_\perp \neq 0$, если только

$$\gamma_\perp^2 = 0. \tag{13.5.2}$$

Согласно (13.4.5) этим значениям $\gamma_\perp$ соответствует $\lambda_{\text{кр}}=\infty$ и $f_{\text{кр}}=0$. Следовательно, в тех направляющих системах, где возможно распространение волн *TEM,* эти волны существуют на любой частоте.

ПОСТОЯННАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ

Подставляя (13.5.2) в (13.3.5), находим постоянную распространения волн *TEM*:

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}. \tag{13.5.3}$$

Фазовая скорость распространения волны *TEM* в направляющей системе согласно (9.1.5) равна

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{\beta} = v_0, \tag{13.5.4}$$

т. е. совпадает со скоростью света в среде.

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ПОЛЯ

Полагая в (13.3.3) и (13.3.4) $\gamma_\perp^2=0$ и $\dot{E}_z=\dot{H}_z=0$, получаем:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_\perp = 0 \text{ и } \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_\perp = 0. \tag{13.5.5}$$

Уравнения (13.5.5) представляют собой двумерные уравнения Лапласа. Поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, является потенциальным. Это означает, что решения ур-ний (13.5.5) могут быть выражены через градиент некоторых функций. Например,

$$\dot{E}_\perp = -\text{grad}_\perp \dot{\psi}, \tag{13.5.6}$$

где функция $\dot{\psi}$ является скалярным потенциалом, также удовлетворяющим уравнению Лапласа (6.2.7).

Аналогичное представление для вектора $\dot{\mathbf{H}}_\perp$ через градиент некоторой функции можно не выписывать, поскольку векторы $\dot{\mathbf{E}}_\perp$ и $\dot{\mathbf{H}}_\perp$ выражаются друг через друга. Действительно, полагая в (13.3.6) и (13.3.7) $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$, приходим к соотношениям, которые можно записать в виде одного векторного равенства

$$\dot{\mathbf{H}}_\perp = \frac{\omega\varepsilon_a}{\beta}[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{E}}_\perp], \tag{13.5.7}$$

т. е. векторы $\dot{\mathbf{H}}_\perp$ и $\dot{\mathbf{E}}_\perp$ у волны *TEM* взаимно перпендикулярны.

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Подставляя в (13.5.7) значение $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ из (13.5.3), приходим к равенству

$$\dot{\mathbf{H}}_\perp = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{E}}_\perp] = \frac{1}{Z_c}[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{E}}_\perp], \tag{13.5.8}$$

где $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ — волновое сопротивление волны *TEM*, равное волновому сопротивлению волны, распространяющейся в среде с параметрами ε_a и μ_a.

НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ ВОЛН *TEM* ОТ ЧАСТОТЫ

В уравнения системы (13.5.5) не входит частота. Из этого можно сделать вывод, что структура волны *TEM* не зависит от частоты. В частности, структура электрического и магнитного полей, аналогичная структуре полей волны *TEM*, должна существовать в направляющей системе при $\omega = 0$, т. е. распределение электрического поля волны *TEM* в поперечном сечении линии совпадает с распределением статического электрического поля в той же системе. Аналогичное соответствие существует и в отношении магнитных полей. На рис. 13.5.1 показана структура электрических и магнитных полей в поперечном сечении двухпроводной и коаксиальной линий, проводники которых разноименно заряжены и по которым протекает постоянный ток противоположного направления. Такую же структуру поля будет иметь волна *TEM* в этих линиях на любой частоте.

Из сказанного следует, что волна *TEM* может распространяться только в тех направляющих системах, по которым возможна передача энергии постоянного тока. Этому требованию удовлетворяют направляющие системы, состоящие не менее чем из двух изолированных друг от друга металлических проводников (двухпроводная, коаксиальная, полосковая, экранированная двухпроводная линия и др.). В полых металлических трубах, диэлектрических волноводах, линиях поверхностной волны и других аналогичных системах существование волны *TEM* невозможно.

Изложенная выше аналогия со статикой касалась лишь распределения поля в плоскости поперечного сечения. Закон распределения поля волны *TEM* вдоль оси z существенно отличается от статического. Вместо однородного распределения вдоль оси z, характерного для статического случая, распределение поля волны

TEM носит волновой характер. У волны *TEM* поля в поперечной плоскости, совпадая по конфигурации силовых линий со статическими полями, не остаются неизменными во времени, как в статическом случае, а непрерывно меняют свою амплитуду по синусоидальному закону.

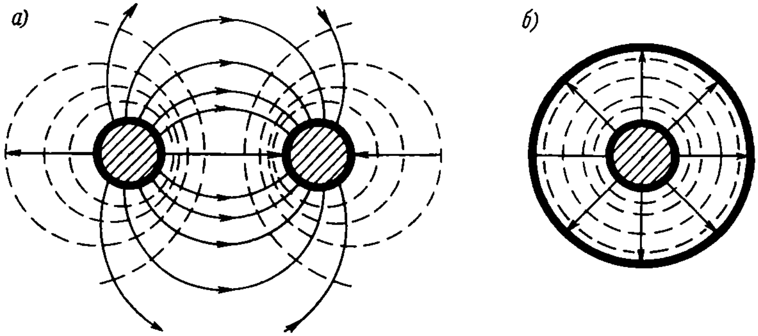


Рис. 13.5.1

При неидеальной проводимости металлических проводников, образующих линию, электромагнитное поле проникает в металл. В соответствии с граничным условием Леонтовича—Щукина (12.6.3) появляется отличная от нуля касательная составляющая электрического поля, параллельная оси *Z*, что делает невозможным существование волны *TEM*. Однако при достаточно высокой проводимости металла структура распространяющейся волны настолько мало отличается от структуры поля волны *TEM* в идеально проводящей системе, что этим различием во многих случаях можно пренебречь.

13.6. Электрические волны ($\dot{E}_z \neq 0$, $\dot{H}_z = 0$)

СВЯЗЬ МЕЖДУ СОСТАВЛЯЮЩИМИ ПОЛЯ

Полагая в (13.3.12) и (13.3.13) $\dot{H}_z = 0$, получаем:

$$-\gamma_\perp^2 \dot{\mathbf{E}}_\perp = \mathrm{i}\,\beta\,\mathrm{grad}_\perp \dot{E}_z; \tag{13.6.1}$$

$$-\gamma_\perp^2 \dot{\mathbf{H}}_\perp = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a \left[\mathbf{z}_0,\ \mathrm{grad}_\perp \dot{E}_z\right]. \tag{13.6.2}$$

Подставив выражение для $\mathrm{grad}_\perp \dot{E}_z$ из (13.6.1) в (13.6.2), приходим к равенству

$$\dot{\mathbf{H}}_\perp = \frac{\omega\varepsilon_a}{\beta}\left[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{E}}_\perp\right], \tag{13.6.3}$$

т. е. векторы $\dot{\mathbf{H}}_\perp$ и $\dot{\mathbf{E}}_\perp$ у волн *E* так же, как у волн *TEM*, взаимно перпендикулярны.

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Волновое сопротивление волн E согласно (13.6.3) и (13.4.6) можно записать в виде

$$Z_c^E = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_a} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \qquad (13.6.4)$$

Как видно из ф-лы (13.6.4), в области волн короче критической, т. е. при $\lambda < \lambda_{кр}$, волновое сопротивление волн E меньше волнового сопротивления волн TEM. При $\lambda = \lambda_{кр}$ волновое сопротивление равно нулю. При изменении длины волны от $\lambda_{кр}$ до нуля волновое сопротивление увеличивается, стремясь к Z_c.

В области волн длиннее критической ($\lambda > \lambda_{кр}$) волновое сопротивление является мнимой величиной. Это означает, что поперечные составляющие векторов электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на 90°. Очевидно, что при этом вектор Пойнтинга принимает чисто мнимые значения, и перенос активной энергии по линии передачи отсутствует. Поэтому отмеченное в разд. 13.4 экспоненциальное убывание амплитуды полей в линии при $\lambda > \lambda_{кр}$ вызывается не потерями энергии в направляющей системе, а чисто реактивным характером электромагнитного поля в линии.

ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ. ДИСПЕРСИЯ

Подставляя в ф-лу (9.1.5) вместо k выражение (13.4.6) для коэффициента распространения β волны, получаем

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \qquad (13.6.5)$$

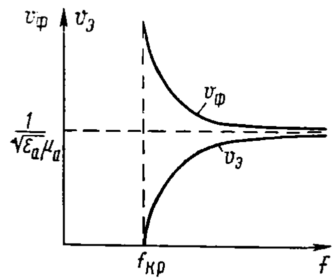


Рис. 13.6.1

Как следует из (13.6.5), у волн E, в отличие от волн TEM, фазовая скорость зависит от частоты и всегда превышает скорость света v_0 в данной среде. Зависимость $v_ф$ от частоты представлена на рис. 13.6.1. При $\lambda = \lambda_{кр}$ фазовая скорость равна бесконечности. По мере увеличения частоты $v_ф$ приближается к скорости света.

Зависимость фазовой скорости от частоты называется *дисперсией*, а волны, для которых дисперсия имеет место, называются *диспергирующими волнами*. Следовательно, волны E — диспергирующие, тогда как волны TEM — недиспергирующие (если параметры среды ε_a и μ_a не зависят от частоты).

13.7. Магнитные волны ($\dot{H}_z \neq 0$, $\dot{E}_z = 0$)

СВЯЗЬ МЕЖДУ СОСТАВЛЯЮЩИМИ ПОЛЯ

Полагая в (13.3.12) и (13.3.13) $\dot{E}_z = 0$, получаем:

$$-\gamma_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \mathrm{i}\,\beta\, \mathrm{grad}_{\perp} \dot{H}_z; \tag{13.7.1}$$

$$\gamma_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_{\perp} = \mathrm{i}\,\omega\mu_a \left[\mathbf{z}_0,\ \mathrm{grad}_{\perp} \dot{H}_z\right]. \tag{13.7.2}$$

Подставив выражение для $\mathrm{grad}_{\perp} \dot{H}_z$ из (13.7.1) в (13.7.2), приходим к равенству

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp} = -\frac{\omega\mu_a}{\beta}\left[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_{\perp}\right]. \tag{13.7.3}$$

Умножая обе части этого равенства векторно на орт $\mathbf{z}_0$ и используя формулу для двойного векторного произведения $[\mathbf{a}[\mathbf{b},\ \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\ \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$, получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \frac{\beta}{\omega\mu_a}\left[\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{E}}_{\perp}\right]. \tag{13.7.4}$$

Следовательно, как и в случае волн *TEM* и *E*, у волн *H* векторы $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\perp}$ взаимно перпендикулярны.

Из равенства (13.7.1) вытекает граничное условие, которому удовлетворяет составляющая $\dot{H}_z$ на металлических поверхностях. Так как согласно (13.7.1) $\gamma_{\perp}^2 \dot{H}_n = -\mathrm{i}\beta\, \partial \dot{H}_z/\partial n$, а нормальная к поверхности идеального проводника составляющая магнитного поля согласно (3.4.5) равна нулю ($\dot{H}_n = 0$), то

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n} = 0. \tag{13.7.5}$$

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ

Волновое сопротивление волн *H* согласно (13.7.3) и (13.4.6) равно

$$Z_c^H = \frac{\omega\mu_a}{\beta} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \tag{13.7.6}$$

Как видно из ф-лы (13.7.6), волновое сопротивление волн *H* больше Z_c. В области волн, длиннее критической, Z_c^H, как и Z_c^E, — величина чисто мнимая, и перенос энергии по линии передачи отсутствует.

Фазовая скорость у волн *H*, как нетрудно проверить, описывается ф-лой (13.6.5). Следовательно, волны *H*, как и *E*, — диспергирующие.

Особенности структуры различных типов направляемых волн могут быть объяснены следующим образом. Пусть направляемая волна распространяется вдоль некоторой оси z.

Возможны два типа распространения электромагнитной энергии, а именно, распространение параллельно оси z (рис. 13.8.1) и распространение по ломаным (или в более общем случае по кри-

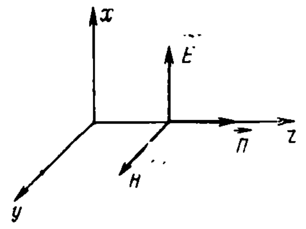


Рис. 13.8.1

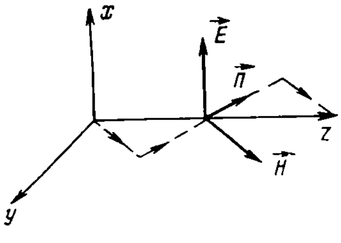


Рис. 13.8.2

вым) линиям при общем поступательном движении вдоль оси z (рис. 13.8.2).

В первом случае векторы **E** и **H** согласно ф-ле (4.1.7) должны находиться в плоскости, перпендикулярной оси z, т. е. имеет место волна TEM.

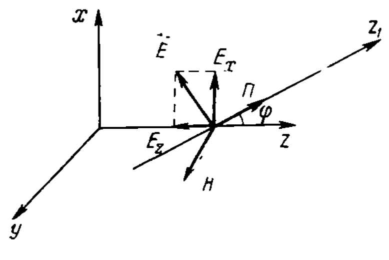


Рис. 13.8.3

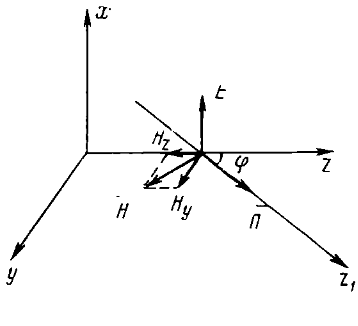


Рис. 13.8.4

Во втором случае векторы **E** и **H** должны находиться в плоскостях, перпендикулярных соответствующим участкам ломаной или кривой линии и, следовательно, по меньшей мере один из векторов напряженностей электромагнитного поля (**E** или **H**) имеет направление, не перпендикулярное оси (рис. 13.8.3 и 13.8.4). Соответственно либо вектор **E** (рис. 13.8.3), либо вектор **H** (рис. 13.8.4) имеет продольную составляющую. Таким образом, второй случай соответствует волнам **E** или **H**, распространяющимся вдоль оси z.

Подобная трактовка направляемых волн позволяет дать весьма простое объяснение полученным выше результатам: длина волны и фазовая скорость волн **E** и **H** больше, чем волн *TEM*; у волн *H* волновое сопротивление выше, а у волн *E* ниже, чем у волн *TEM*. Действительно, в случае *E* или *H* волны парциальная *TEM*-волна распространяется вдоль линии, образующей угол φ с осью Z (рис. 13.8.5). Фронт волны *TEM* и перпендикулярен линии Z_1, и перемещается в направлении этой оси с фазовой скоростью, равной скорости света в среде $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \dfrac{\lambda}{T}$, где T — период колебаний. За время, равное периоду колебаний, фронт волны *TEM* переместится вдоль оси Z_1 на расстояние λ (расстояние 1—2 на рис. 13.8.5). Путь, пройденный за то же время фронтом волны вдоль оси Z, больше и равен расстоянию между точками $1'$ и $2'$.

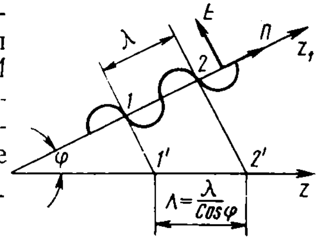


Рис. 13.8.5

Соответственно длина волны вдоль оси Z больше и равна $\Lambda = \dfrac{\lambda}{\cos\varphi}$, отсюда фазовая скорость по оси Z равна $v_\text{ф} = \dfrac{\Lambda}{T} = \dfrac{\lambda}{T\cos\varphi} = \dfrac{v_0}{\cos\varphi}$, т. е. фазовая скорость у волн *E* и *H* всегда превышает скорость света в среде.

Обратившись к рис. 13.8.3, можно заметить, что у волны *E* амплитуда поперечной относительно оси Z составляющей электрического поля (E_x на рис. 13.8.3) меньше амплитуды электрического поля парциальной волны *TEM* (**E** на рис. 13.8.3), тогда как амплитуды магнитного поля у обеих волн совпадают (**H** на рис. 13.8.3). Следовательно, у волны *E*, распространяющейся вдоль оси Z, отношение поперечных составляющих электрического и магнитного полей меньше, чем у парциальной волны *TEM*. Соответственно волновое сопротивление волны *E* ниже волнового сопротивления волны *TEM*. У волн *H* амплитуда поперечной составляющей магнитного поля (H_y на рис. 13.8.4) меньше амплитуды поперечной составляющей магнитного поля парциальной волны *TEM* (**H** на рис. 13.8.4), тогда как амплитуды поперечной составляющей электрического поля у обеих волн совпадают (**E** на рис. 13.8.4). Следовательно, у волны *H* волновое сопротивление выше, чем у **волны *TEM*.**

Сказанное о принципе деления волн на волны *TEM*, *E* и *H* дает основание для суждения о том, при каких условиях и в каких линиях возникают те или иные типы волн. Как известно, в однородной среде волны распространяются прямолинейно. Изгиб пути распространения возможен в неоднородной среде. Если речь идет об однородных средах, то распространение по ломаной линии возможно, если среда, в которой распространяются волны, окружена другой средой, на границе которой происходит отражение этих волн. Отсюда следует, что волны H и E возможны в полых металлических трубах, в коаксиальных линиях, между двумя параллельными пластинами и в других подобных системах. Волны H и E могут также возникнуть в диэлектрических стержнях, так как электромагнитное поле, распространяющееся внутри стержня, может испытывать полное внутреннее отражение от поверхности раздела диэлектрика и воздуха. Во всех этих системах распространяющееся электромагнитное поле может быть представлено в виде суперпозиции парциальных волн TEM, совершающих «скачки» между отражающими поверхностями.

Заканчивая данный раздел, отметим следующее. При изложении концепции парциальных волн предполагалось, что волны E и H получаются в результате распространения парциальных волн TEM под определенным углом φ к оси z. В общем случае волны E и H могут представлять собой суперпозицию многих парциальных волн TEM, одновременно распространяющихся под различными углами. Однако это не меняет полученных основных выводов (повышенная фазовая скорость, увеличенная длина волны, пониженное волновое сопротивление у волн E и повышенное у волн H). Качественно картина не меняется, если парциальные волны распространяются по криволинейным траекториям.

Изложенная выше концепция парциальных волн впервые была высказана Бриллюэном применительно к частному случаю распространения волны H_{10} в прямоугольном волноводе. В дальнейшем она была обобщена применительно к направляемым волнам в [1].

13.9. Скорость распространения энергии. Групповая скорость

Скорость распространения энергии может быть определена по ф-ле (4.5.35). Трубка, по площади поперечного сечения ΔS которой ведется интегрирование в (4.5.35), должна выбираться так, чтобы отсутствовал поток энергии, нормальный к ее боковой поверхности. Например, в линиях передачи закрытого типа, ограниченных идеально проводящей металлической оболочкой, под ΔS следует понимать поперечное сечение линии передачи. Если металлическая оболочка не идеально проводящая, то появляется поток энергии, нормальный к боковой поверхности силовой трубки, т. е. направленный в металл (см. разд. 11.2). Поэтому поверхность ΔS, строго говоря, должна простираться до бесконечности. Аналогично следует поступить и в случае диэлектрического волновода, если диэлектрик, из которого он выполнен, имеет потери. При этом также появляется поток энергии, нормальный к боковой поверхности силовой трубки, т. е. боковой поверхности диэлектрического стержня.

До сих пор мы рассматривали исключительно монохроматические волны. Однако реальные электромагнитные сигналы являются немонохроматическими, так как состоят из конечного, либо бесконечного числа монохроматических колебаний с различными частотами. В диспергирующих системах (диэлектрическая среда с потерями, линии передачи и др.) фазовая скорость согласно (9.2.9) и (13.6.5) зависит от частоты, т. е., проходя один и тот же путь, монохроматические волны получают различные по величине фазовые сдвиги. В результате изменяется сдвиг по фазе между колебаниями, образующими сигнал, соответственно меняется форма сигнала — сигнал искажается. Чем уже спектр сигнала, тем меньше разница между фазовыми скоростями отдельных монохроматических волн, тем очевидно меньше эти искажения.

Для характеристики перемещения немонохроматических сигналов вводят понятие групповой скорости, понимая под этим скорость перемещения максимума огибающей группы монохроматических волн, близких между собой по частоте. Пусть в диспергирующей системе распространяется соответствующая некоторому сигналу в общем случае бесконечная сумма монохроматических волн, которую можно записать в виде интеграла

$$\dot{E}(z,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{A}_m(\omega)\,e^{i\,[\omega t-\beta(\omega)\,z]}\,d\,\omega, \tag{13.9.1}$$

где $\dot{A}_m(\omega)$ — амплитуда каждой из монохроматических волн и $\beta(\omega)$ — коэффициент распространения каждой из этих волн. Если спектр сигнала достаточно узкий и заключен в интервале частот $\omega_0+\Delta\omega\leqslant\omega\leqslant\omega_0-\Delta\omega$, то $\dot{A}_m(\omega)\approx0$ вне этого интервала. Поэтому

$$\dot{E}(z,\ t)=\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega}\dot{A}_m(\omega)\,e^{i\,[\omega t-\beta(\omega)\,z]}\,d\,\omega. \tag{13.9.2}$$

Разлагая коэффициент распространения $\beta(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности частоты ω_0, получаем

$$\beta(\omega)=\beta_0+\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2+\ \ .\ .\,, \tag{13.9.3}$$

где β_0 — коэффициент распространения на частоте ω_0. Поскольку спектр сигнала узок, то в (13.9.3) можно сохранить лишь два первых члена и поэтому

$$\omega t-\beta(\omega)\,z\approx(\omega_0 t-\beta_0 z)+(\omega-\omega_0)\left[t-\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z\right]. \tag{13.9.4}$$

Подставляя (13.9.4) в (13.9.2), получаем

$$\dot{E}(z,\ t)=e^{i\,(\omega_0 t-\beta_0 z)}\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega}\dot{A}_m(\omega)\,e^{i\,(\omega-\omega_0)\left[t-\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z\right]}\,d\,\omega. \tag{13.9.5}$$

Чтобы не усложнять изложения, предположим, что у передаваемого сигнала $\dot{A}_m(\omega_0+\Delta\omega)=\dot{A}_m(\omega_0-\Delta\omega)$. Тогда интеграл (13.9.5) принимает вид

$$\dot{E}(z,\ t)=\left\{2\int\limits_{\omega_0}^{\omega_0+\Delta\omega}\dot{A}_m(\omega)\cos\left[(\omega-\omega_0)\left(t-\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z\right)\right]d\omega\right\}e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)}. \tag{13.9.6}$$

Величина в фигурных скобках представляет собой амплитуду сигнала, которая, очевидно, достигает максимума, если $\cos\left[(\omega-\omega_0)\left(t-\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z\right)\right]=1$, т. е. когда $t-\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z=0.$

Следовательно, максимум сигнала непрерывно перемещается вдоль оси Z, причем скорость перемещения максимума равна

$$v_{\text{гр}}=\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{\partial\beta/\partial\omega}. \tag{13.9.7}$$

По определению эта величина и является групповой скоростью. Индекс $\omega=\omega_0$ в (13.9.7) опущен, поскольку центральная частота ω_0 была выбрана произвольно. Так как в разложении (13.9.3) отброшены члены порядка выше первого, то условием применимости (13.9.7) является малая скорость изменения коэффициента распространения $\beta(\omega)$ вблизи частоты ω_0 и узость спектра сигнала. При невыполнении этих условий влияние дисперсии становится весьма заметным, и сигнал в процессе распространения так сильно меняет свою форму, что само понятие групповой скорости теряет смысл.

В направляющих системах коэффициент распространения описывается равенством (13.4.6). Подставляя (13.4.6) в (13.9.7), находим групповую скорость в линиях передачи

$$v_{\text{гр}}=\frac{\beta}{\omega\varepsilon_a\mu_a}=v_0\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}, \tag{13.9.8}$$

т. е. $v_{\text{гр}}<v_0$ для распространяющихся волн E, H и $v_{\text{гр}}=v_0$ для волн TEM. Сравнивая (13.9.8) и (13.6.5), замечаем, что

$$v_{\text{гр}}v_{\text{ф}}=v_0^2=1/\varepsilon_a\mu_a, \tag{13.9.9}$$

В окрестности максимума сигнала, очевидно, сосредоточена основная часть энергии. Поэтому скорость перемещения этого максимума, т. е. групповая скорость, характеризует скорость перемещения энергии сигнала по линии передачи. Так как сигнал предполагался весьма узкополосным, то эта скорость должна мало отличаться от скорости распространения энергии $v_э$ монохроматической волны, т. е. $v_э\approx v_{\text{гр}}$. Как показывает расчет по ф-ле (4.5.35), на котором не будем останавливаться, в линиях передачи закрытого типа и некоторых других направляющих системах без потерь $v_э=v_{\text{гр}}$. Поэтому скорость распространения энергии $v_э$ можно определять по ф-ле (13.9.9) с учетом (13.6.5):

$$v_э=\frac{v_0^2}{v_{\text{ф}}}=v_0\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}. \tag{13.9.10}$$

ГЛАВА 14

НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

14.1. Прямоугольный волновод

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ($\dot{E}_z \neq 0$, $\dot{H}_z = 0$)

В прямоугольном волноводе, являющемся частным случаем линии передачи, в которой энергия распространяется внутри полой металлической трубы, могут существовать волны E и H и невозможно существование волн TEM. Анализ начнем с электрических волн. Начало декартовой системы координат поместим в одну из вершин прямоугольника, а оси системы совместим со сторонами прямоугольника, как показано на рис. 13.1.1*ж*.

Поперечные составляющие векторов **E** и **H** у волн E выражаются согласно (13.6.1) и (13.6.2) через продольную составляющую $\dot{E}_z$. Поэтому структура поля в волноводе определяется, если найдены решения ур-ния (13.3.14), имеющего в декартовой системе координат вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \gamma_\perp^2 \dot{E}_z = 0. \qquad (14.1.1)$$

Уравнение (14.1.1) является дифференциальным уравнением в частных производных и решается методом разделения переменных, т. е. решение представляется в виде произведения

$$\dot{E}_z = X(x)\, Y(y)\, e^{-i\beta z}, \qquad (14.1.2)$$

где $X(x)$ — функция только координаты x, а $Y(y)$ — функция только координаты y.

Подставляя (14.1.2) в (14.1.1), получаем после почленного деления на произведение $XYe^{-i\beta z}$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\gamma_\perp^2, \qquad (14.1.3)$$

где x и y — независимые переменные. Поэтому удовлетворение равенства (14.1.3) при произвольных значениях этих переменных возможно, если только

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\gamma_x^2 \text{ и } \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -\gamma_y^2, \qquad (14.1.4)$$

где константы γ_x^2 и γ_y^2 согласно (14.1.3) связаны соотношением

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 = \gamma_\perp^2. \qquad (14.1.5)$$

Решения ур-ний (14.1.4), которые могут быть переписаны в форме $\frac{d^2 X}{dx^2} + \gamma_x^2 X = 0$ и $\frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma_y^2 Y = 0$, как известно, имеют вид:

$$X = A\cos\gamma_x x + B\sin\gamma_x x;$$
$$Y = C\cos\gamma_y y + D\sin\gamma_y y. \qquad (14.1.6)$$

Подставляя в (14.1.2) равенства (14.1.6), получаем

$$\dot{E}_z = (A\cos\gamma_x x + B\sin\gamma_x x)(C\cos\gamma_y y + D\sin\gamma_y y)\,e^{-i\beta z}. \qquad (14.1.7)$$

Так как стенки волновода предполагаются идеально проводящими, то на их поверхности касательная составляющая электрического поля должна равняться нулю. В данном случае эти условия сводятся к тому, что $\dot{E}_z = 0$ при $x=0$, $x=a$ и $\dot{E}_z = 0$ при $y=0$, $y=b$. Полагая в (14.1.7) $x=0$ и $x=a$, получим два уравнения:

$$A(C\cos\gamma_y y + D\cos\gamma_y y)\,e^{-i\beta z} = 0;$$
$$(A\cos\gamma_x a + B\sin\gamma_x a)(C\cos\gamma_y y + D\sin\gamma_y y)\,e^{-i\beta z} = 0. \qquad (14.1.8)$$

Эти равенства удовлетворяются при произвольных значениях y, если $A=0$ и

$$B\sin\gamma_x a = 0. \qquad (14.1.9)$$

Аналогичным образом, полагая в (14.1.7) $y=0$ и $y=b$, приходим к соотношениям $C=0$ и

$$D\sin\gamma_y b = 0. \qquad (14.1.10)$$

Равенства (14.1.9) и (14.1.10) выполняются при $B\neq 0$ и $D\neq 0$, когда

$$\gamma_x a = m\pi \text{ и } \gamma_y b = n\pi, \qquad (14.1.11)$$

где m и n — произвольные целые положительные числа.
При $m=0$ или $n=0$ продольная составляющая $\dot{E}_z$ тождественно равна нулю, что соответствует отсутствию волны E. Поэтому $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Из равенства (14.1.11) находим значения γ_x и γ_y:

$$\gamma_x = \frac{m\pi}{a}; \quad \gamma_y = \frac{n\pi}{b}. \qquad (14.1.12)$$

Подставляя значения A, C, γ_x и γ_y в (14.1.7), получаем

$$\dot{E}_z = E_{0z}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{-i\beta z}, \qquad (14.1.13)$$

где через E_{0z} обозначено произведение BD, имеющее смысл амплитуды продольной составляющей напряженности электрического поля. Эта величина не может быть определена из граничных условий, так как амплитуда составляющих поля зависит от мощности источника, возбуждающего электромагнитную волну в волноводе.

Подставляя в (13.3.8)—(13.3.11) вместо $\dot{E}_z$ его значение из (14.1.13) и положив $\dot{H}_z=0$, определяем поперечные составляющие поля:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x &= -\frac{\mathrm{i}\beta}{\gamma_\perp^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -\frac{\mathrm{i}\beta\gamma_x}{\gamma_\perp^2} E_{0z}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}\\
\dot{E}_y &= -\frac{\mathrm{i}\beta}{\gamma_\perp^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = -\frac{\mathrm{i}\beta\gamma_y}{\gamma_\perp^2} E_{0z}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}\\
\dot{H}_x &= \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_a}{\gamma_\perp^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_a\gamma_y}{\gamma_\perp^2} E_{0z}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}\\
\dot{H}_y &= -\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_a}{\gamma_\perp^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_a\gamma_x}{\gamma_\perp^2} E_{0z}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}
\end{aligned}\right\}, \quad (14.1.14)$$

где согласно (14.1.5) и (14.1.12)

$$\gamma_\perp = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad (14.1.15)$$

Изменение всех составляющих вдоль продольной оси описывается множителем $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}$.

Как следует из выражений (14.1.13) и (14.1.14), структура поля в плоскости поперечного сечения соответствует структуре стоячих волн, причем m равно числу полуволн, укладывающихся вдоль стенки длиной a, и n — числу полуволн, укладывающихся вдоль стенки длиной b. Согласно тем же выражениям каждой паре целых чисел m и n соответствует определенная структура электромагнитного поля, обозначаемая $E_{mn}(TH_{mn})$. Например, E_{11} — это волна E, у которой $m=1$ и $n=1$.

Структура волн E_{11} и E_{21} в некоторый фиксированный момент времени представлена на рис. 14.1.1 для трех сечений волновода. Ориентация составляющих электрического и магнитного полей в каждой точке определяется из равенств (14.1.13) и (14.1.14).

Отметим, что структуру волны E_{21} можно получить, если разделить волновод пополам по широкой стенке (штрих-пунктирная линия на рис. 14.1.1) и в каждой половине построить структуру волны E_{11}. Аналогично можно построить структуру волны E_{mn}: широкая стенка волновода делится на m, а узкая — на n равных частей, и в каждой из образовавшихся клеток строится структура волны E_{11}.

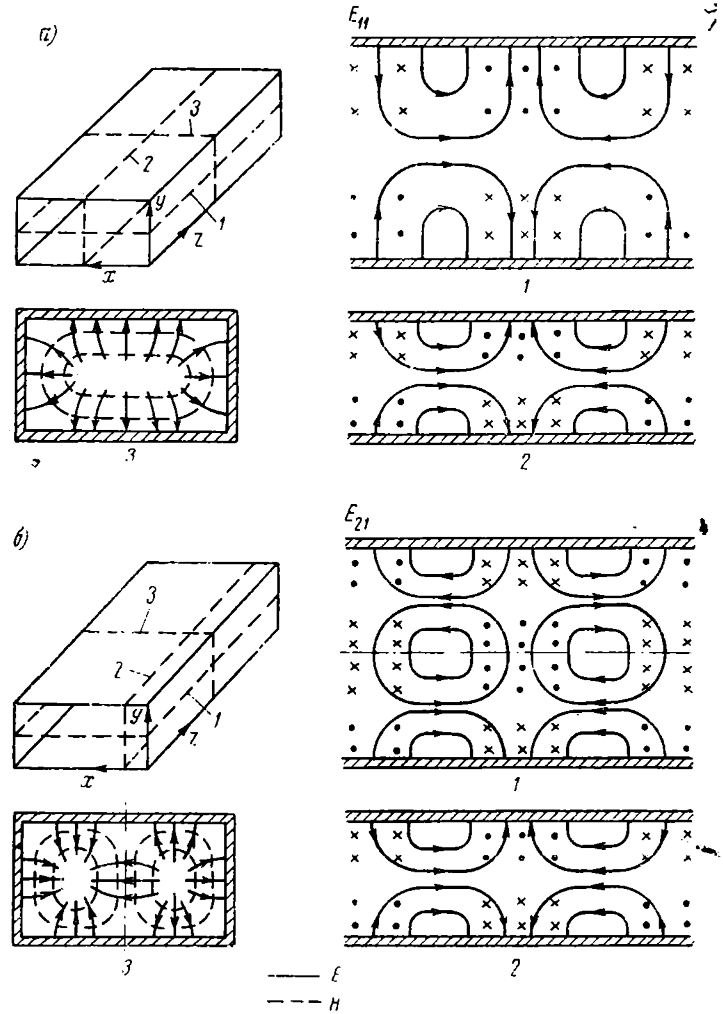


Рис. 14.1.1

Критическая длина волны определяется из (13.4.5) путем подстановки вместо $\gamma_\perp$ его значения из (14.1.15):

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}\ . \qquad (14.1.16)$$

Коэффициент распространения, фазовая скорость и скорость переноса энергии волн E_{mn} определяются соответственно по ф-лам

(13.4.6), (13.6.5) и (13.9.10), а волновое сопротивление по ф-ле (13.6.4).

Низшим типом среди волн E_{mn}, обладающим наибольшей критической длиной волны, является, как следует из равенства (14.1.16), волна E_{11}.

Волны E_{mn} с различной структурой поля, которым соответствуют одинаковые значения $\gamma_\perp$, согласно (13.4.6), (13.6.5) и (13.9.10) имеют равные коэффициенты распространения, фазовые скорости и скорости распространения энергии. Волны, обладающие этим свойством, называются *вырожденными*. В прямоугольном волноводе, как следует из равенства (14.1.15), две волны $E_{m_1 n_1}$ и $E_{m_2 n_2}$ вырождены, когда

$$\left(\frac{m_1}{a}\right)^2+\left(\frac{n_1}{b}\right)^2=\left(\frac{m_2}{a}\right)^2+\left(\frac{n_2}{b}\right)^2 \qquad (14.1.17)$$

МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ($\dot H_z \neq 0$, $\dot E_z = 0$)

В данном случае поперечные составляющие поля выражаются через $\dot H_z$ по ф-лам (13.7.1) и (13.7.2). Составляющая $\dot H_z$ определяется из ур-ния (13.3.15)

$$\frac{\partial^2 \dot H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot H_z}{\partial y^2}+\gamma_\perp^2 \dot H_z=0 \qquad (14.1.18)$$

аналогично тому, как это было сделано при определении $\dot E_z$. Выполнив необходимые преобразования, получаем

$$\dot H_z=(A\cos\gamma_x x+B\sin\gamma_x x)(C\cos\gamma_y y+D\sin\gamma_y y)\,e^{-i\beta z}. \qquad (14.1.19)$$

На поверхности идеально проводящих стенок волновода должно выполняться граничное условие (13.7.5), принимающее в случае прямоугольного волновода вид:

$$\dot E_y \sim \left.\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}\right|_{x=a}=0; \qquad (14.1.20)$$

$$\dot E_x \sim \left.\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}\right|_{y=b}=0. \qquad (14.1.21)$$

Подставляя (14.1.19) в (14.1.20) и (14.1.21), приходим к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &B=0; && D=0\\ &A\sin\gamma_x a=0; && C\sin\gamma_y b=0\end{aligned}\right\}. \qquad (14.1.22)$$

Как следует из (14.1.22), у волн H, как и у волн E, $\gamma_x=\frac{m\pi}{a}$ и $\gamma_y=\frac{n\pi}{b}$.

Таким образом, в прямоугольном волноводе при равных значениях индекса m и равных значениях индекса n критическая длина

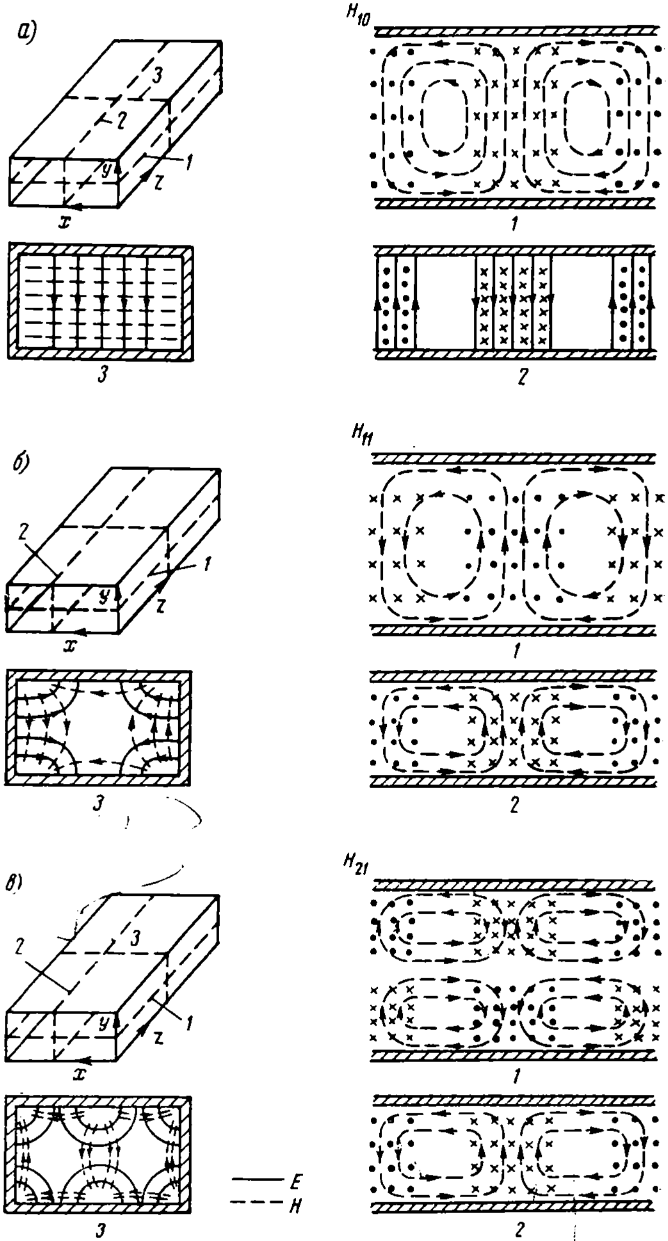


Рис. 14.1.2

волны, коэффициент распространения, фазовая скорость и скорость переноса энергии у волн H те же, что и у волн E, т. е. волны H и E с равными индексами являются вырожденными.

Подставляя в (14.1.19) значения B, D, γ_x и γ_y, получаем

$$\dot{H}_z = H_{0z} \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \beta z}, \tag{14.1.23}$$

где $H_{0z} = AC$ — амплитуда продольной составляющей магнитного поля.

Поперечные составляющие определяем из (13.7.1) и (13.7.2):

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x &= -\frac{\mathrm{i}\omega\mu_a\gamma_y}{\gamma_\perp^2} H_{0z} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z} \\
\dot{E}_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu_a\gamma_x}{\gamma_\perp^2} H_{0z} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z} \\
\dot{H}_x &= +\frac{\mathrm{i}\beta\gamma_x}{\gamma_\perp^2} H_{0z} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z} \\
\dot{H}_y &= +\frac{\mathrm{i}\beta\gamma_y}{\gamma_\perp^2} H_{0z} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}
\end{aligned}\right\}. \tag{14.1.24}$$

При записи (14.1.24) было использовано равенство $\mathrm{grad}_\perp \dot{H}_z = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}$.

Структура поля нескольких волн H_{mn} представлена на рис. 14.1.2. Из (14.1.23) и (14.1.24) следует, что у волн H, как у волн E, структура поля в плоскости поперечного сечения соответствует структуре стоячих волн. Волны H, как и волны E, являются вырожденными, когда они имеют различную структуру (различное сочетание индексов m и n), но одинаковые значения $\gamma_\perp$.

Как следует из равенств (14.1.23) и (14.1.24), у волн H, в отличие от волн E, обращение в нуль одного из индексов (m или n) не влечет за собой обращение в нуль всех составляющих поля. Поэтому, если полагать, что $a>b$, то низшим типом волн среди волн H является волна H_{10}, у которой согласно (14.1.16) $\lambda_{\text{кр}}^{H_{10}} = 2a$. Поскольку $\lambda_{\text{кр}}^{H_{10}} > \lambda_{\text{кр}}^{E_{11}}$, то волна H_{10} является низшим типом волн не только среди волн H, но и среди всех возможных типов волн в прямоугольном волноводе. Это означает, что если $\lambda > 2a$, то передача энергии по прямоугольному волноводу невозможна (см. разд. 13.4).

Фазовая скорость и скорость переноса энергии волн H определяются по ф-лам (13.6.5) и (13.9.10), волновое сопротивление — по ф-ле (13.7.6).

V

Рассмотрим подробнее свойства волны H_{10}, широко используемой в технике сверхвысоких частот. Волна H_{10} имеет наибольшую критическую длину. Поэтому на заданной частоте размеры поперечного сечения волновода, при которых возможна передача энергии по прямоугольному волноводу, для этой волны наименьшие и, следовательно, меньше вес и габариты волновода, ниже его стоимость.

Полагая в (14.1.23) и (14.1.24) $m=1$ и $n=0$, получаем следующие выражения для составляющих поля волны:

$$\dot H_z = H_{0z}\cos\frac{\pi x}{a}\, e^{-i\beta z}; \qquad (14.1.25)$$

$$\dot E_y = \frac{i\omega\mu_a a}{\pi} H_{0z}\sin\frac{\pi x}{a}\, e^{-i\beta z}; \qquad (14.1.26)$$

$$\dot H_x = +\frac{i\beta a}{\pi} H_{0z}\sin\frac{\pi x}{a}\, e^{-i\beta z} \qquad (14.1.27)$$

$$\dot E_x = \dot H_y = 0. \qquad (14.1.28)$$

Структура поля волны H_{10}, построенная в соответствии с (14.1.25) — (14.1.27), представлена на рис. 14.1.2 и 14.1.3. Остановимся на картине распределения поля волны H_{10} в плоскостях, параллельных широким стенкам волновода.

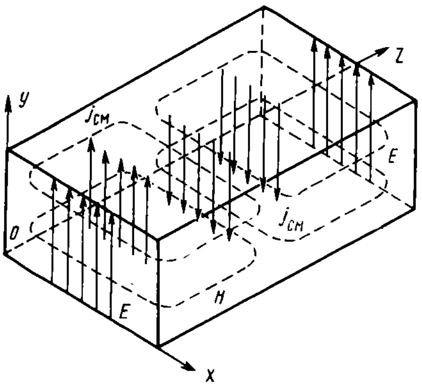


Рис. 14.1.3

Согласно уравнениям Максвелла замкнутые магнитные силовые линии должны охватывать токи проводимости или токи смещения. В волноводе замкнутые магнитные силовые линии пронизываются токами смещения. В электромагнитном поле волны H_{10}, структура которого показана на рис. 14.1.3, магнитные силовые линии охватывают токи смещения, текущие между широкими стенками параллельно оси y. В распространяющейся волне максимальная плотность тока смещения получается в центре замкнутых магнитных силовых линий, где напряженность электрического поля равна нулю. Это следует из того, что вектор плотности тока смещения равен производной $\varepsilon_a \frac{\partial \dot E}{\partial t} = i\omega\varepsilon_a \dot E$ и, следовательно, сдвинут по фазе относительно вектора напряженности электрического поля на угол $\pi/2$, т. е. расстояние между максимумом плотности тока

$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$

смещения и максимумом напряженности электрического поля в фиксированный момент времени равно $\Lambda/4$.

Коэффициент распространения волны H_{10} согласно (13.4.6) и (14.1.16) равен

$$\beta = \kappa \sqrt{1-(\lambda/2a)^2}. \tag{14.1.29}$$

Фазовая скорость и скорость переноса энергии (см. (13.6.5) и (13.9.10)) равны:

$$v_ф = \frac{v_0}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}; \quad v_э = v_0 \sqrt{1-(\lambda/2a)^2}. \tag{14.1.30}$$

Длина волны в волноводе определяется по ф-ле (13.4.7) и равна

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}. \tag{14.1.31}$$

Волновое сопротивление равно (см. 13.7.6))

$$Z_c^{H_{10}} = \frac{Z_c}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}. \tag{14.1.32}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЛНЫ H_{10} НА ПАРЦИАЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Выше (разд. 13.8) было показано, что волны E и H можно рассматривать как суперпозицию парциальных волн *TEM*, распространяющихся по зигзагообразным путям. Ниже концепция парциальных волн рассматривается применительно к волне H_{10} в прямоугольном волноводе.

У волны H_{10} согласно (14.1.25)—(14.1.27) в направлении оси Y векторы **E** и **H** неизменны по фазе и амплитуде. Из этого следует, что вектор скорости распространения парциальных волн *TEM* не имеет составляющей по оси Y. В противном случае в направлении оси Y имело бы место изменение амплитуды или фазы поля (стоячие или бегущие волны). Вдоль координаты x распределение составляющих поля соответствует стоячим волнам. Это означает, что в направлении оси X распространяются две волны в противоположных направлениях.

Из сказанного следует, что поле волны H_{10} может рассматриваться как результат сложения двух парциальных плоских волн, распространяющихся в плоскости XZ со скоростью света под некоторым углом φ к оси Z, как показано на рис. 14.1.4. Эти волны имеют одинаковые составляющие вектора скорости по оси Z ($v_ф$ на рис. 14.1.4) и направленные в противоположные стороны составляющие вектора скорости по оси X (v_x на рис. 14.1.4), причем $v_ф$ и v_x превышают скорость распространения v_0 парциальных волн. В результате сложения полей обеих плоских волн вдоль оси X между узкими стенками волновода образуется стоячая волна с нулевыми значениями $\dot{E}_y$ на боковых стенках. Так как у волны

H_{10} в направлении оси X укладывается полуволна, то половина длины волны вдоль этой оси равна

$$\lambda_x/2 = a. \tag{14.1.33}$$

Фазовая скорость распространения пропорциональна длине волны, поэтому фазовая скорость в направлении оси X равна

$$v_x = c\frac{\lambda_x}{\lambda} = c\frac{2a}{\lambda}. \tag{14.1.34}$$

Отсюда можно найти угол φ, образованный направлением распространения парциальной плоской волны и осью Z. Этот угол опре-

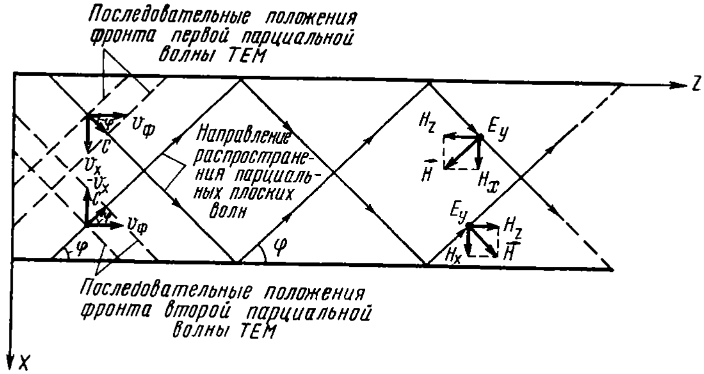


Рис. 14.1.4

деляется из соотношения (см. рис. 14.1.4)

$$\sin\varphi = \frac{c}{v_x} = \frac{\lambda}{\lambda_x} = \frac{\lambda}{2a}. \tag{14.1.35}$$

Составляющая скорости распространения по оси Z, как следует из рис. 14.1.4, равна

$$v_\Phi = \frac{c}{\cos\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}. \tag{14.1.36}$$

Подставляя в (14.1.36) вместо $\sin\varphi$ его значение из (14.1.35), получаем первую ф-лу (14.1.30). По мере уменьшения a увеличивается угол φ. Предельное значение $\varphi = \pi/2$ получается при $\lambda/2a = 1$. В этом случае волны распространяются по нормали к оси Z. Составляющая скорости распространения в направлении оси Z равна нулю. Этот случай является предельным. Таким образом, при $\lambda \geqslant 2a$ распространение энергии вдоль оси Z не имеет места. Другими словами, $\lambda = 2a$ является критической волной.

Для того, чтобы полученные выше ф-лы (14.1.25)—(14.1.27) были справедливы для составляющих поля, необходимо, чтобы векторы $\dot{\mathbf{E}}$ обеих плоских волн были ориентированы вдоль оси Y. Вектор $\dot{\mathbf{H}}$ должен быть при этом направлен так, как показано на рис.

14.1.4. Как видно, составляющие $\dot{H}_x$ обеих плоских волн имеют одинаковые направления, а составляющие $\dot{H}_z$ имеют противоположные направления.

Суммарное электрическое поле равно (см. рис. 14.1.4)

$$\dot{E}_y = E_0 [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\varphi - \mathrm{i}kz\cos\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(a-x)\sin\varphi - \mathrm{i}kz\cos\varphi}], \quad (14.1.37)$$

где E_0 — постоянная.

Подставляя в (14.1.37) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2a}$ получаем

$$\dot{E}_y = -2\mathrm{i}E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}, \quad (14.1.38)$$

что совпадает с (14.1.26) при $E_0 = \frac{\omega\mu_a a}{2\pi} H_{0z}$.

Аналогичным образом нетрудно показать, что $\dot{H}_x$ в направлении оси X также будет меняться по синусоидальному закону. Суммарная составляющая $\dot{H}_z$ будет равна

$$\dot{H}_z = H_0 [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sin\varphi - \mathrm{i}kz\cos\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-a)\sin\varphi - \mathrm{i}kz\cos\varphi}] =$$

$$= 2H_0 \cos\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z} \quad (14.1.39)$$

Формула (14.1.39) с точностью до постоянной совпадает с ф-лой (14.1.25).

Из рисунка 14.1.4 и ф-лы (14.1.36) видно, что по мере повышения частоты уменьшается угол φ и, следовательно, тем меньше становится продольная составляющая $\dot{H}_z$ по сравнению с поперечной составляющей $\dot{H}_x$, т. е. структура волны H_{10} начинает приближаться к структуре волны *TEM*. Одновременно, как следует из (14.1.30), уменьшается разница между $v_ф$, $v_э$ и v_0.

Аналогично можно интерпретировать процесс образования других типов волн в прямоугольном волноводе.

14.2. Круглый волновод

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ($\dot{E}_z \neq 0$, $\dot{H}_z = 0$)

В круглом волноводе, как и в прямоугольном волноводе, возможно раздельное существование волн E и H и невозможно распространение волн *TEM* (см. гл. 13). При анализе естественно использовать цилиндрическую систему координат r, φ, z, совместив z с продольной осью волновода (рис. 13.1.1 *и*).

Уравнение (13.3.14) в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \gamma_\perp^2 \dot{E}_z = 0. \quad (14.2.1)$$

Представив решение ур-ния (14.2.1) в форме, идентичной (12.2.4), получаем (см. разд. 12.2):

$$\Phi(\varphi) = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi = A_1 \cos m(\varphi - \varphi_0), \qquad (14.2.2)$$

где $A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{A}{B}$ и m — целое число;

$$R(r) = C' J_m(\gamma_\perp r) + D' N_m(\gamma_\perp r). \qquad (14.2.3)$$

Функция Бесселя второго рода, как известно, при $r \to 0$ стремится к бесконечности. Так как напряженность поля в любой точке волновода должна быть ограничена, то необходимо положить $D = 0$. Таким образом,

$$\dot{E}_z = E_{0z} J_m(\gamma_\perp r) \cos m(\varphi - \varphi_0)\, e^{-i\beta z}, \qquad (14.2.4)$$

где $E_{0z} = A_1 C'$ — амплитуда продольной составляющей электрического поля.

Подставляя выражение для $\dot{E}_z$ из (14.2.4) в (13.6.1) и (13.6.2) и учитывая, что $\operatorname{grad}_\perp \dot{E}_z = \mathbf{r}_0 \dfrac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \boldsymbol{\varphi}_0 \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi}$, определяем поперечные составляющие поля:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_r &= -\frac{i\beta}{\gamma_\perp} E_{0z} J'_m(\gamma_\perp r) \cos m(\varphi - \varphi_0)\, e^{-i\beta z} \\
\dot{E}_\varphi &= \frac{i m \beta}{\gamma_\perp^2 r} E_{0z} J_m(\gamma_\perp r) \sin m(\varphi - \varphi_0)\, e^{-i\beta z} \\
\dot{H}_r &= -\frac{i \omega \varepsilon_a m}{\gamma_\perp^2 r} E_{0z} J_m(\gamma_\perp r) \sin m(\varphi - \varphi_0)\, e^{-i\beta z} \\
\dot{H}_\varphi &= -\frac{i \omega \varepsilon_a}{\gamma_\perp} E_{0z} J'_m(\gamma_\perp r) \cos m(\varphi - \varphi_0)\, e^{-i\beta z}
\end{aligned}\right\}, \qquad (14.2.5)$$

где штрих означает дифференцирование по всему аргументу функций Бесселя.

Чтобы найти $\gamma_\perp$, воспользуемся граничным условием (3.4.4), согласно которому

$$\dot{E}_z|_{r=a} = 0, \qquad (14.2.6)$$

где a — радиус окружности поперечного сечения волновода (рис. 13.1.1 *и*).

Подставляя (14.2.4) в (14.2.6), получаем

$$J_m(\gamma_\perp a) = 0. \qquad (14.2.7)$$

Имеется бесконечно большое количество значений аргумента, при которых функция Бесселя равна нулю. Эти значения называются корнями функции Бесселя. Обозначая n-й корень функции

ТАБЛИЦА 14.1

Тип волны	E_{01}	E_{11}	E_{21}	E_{02}	E_{31}	E_{12}	E_{41}	E_{22}	E_{03}	E_{51}	E_{32}	E_{61}
ν^{E}_{mn}	2,405	3,832	5,135	5,520	6,379	7,016	7,586	8,417	8,654	8,771	9,760	9,94
$\lambda^{Emn}_{кр}\frac{1}{a}$	2,613	1,640	1,223	1,138	0,985	0,895	0,828	0,746	0,726	0,716	0,644	0,632

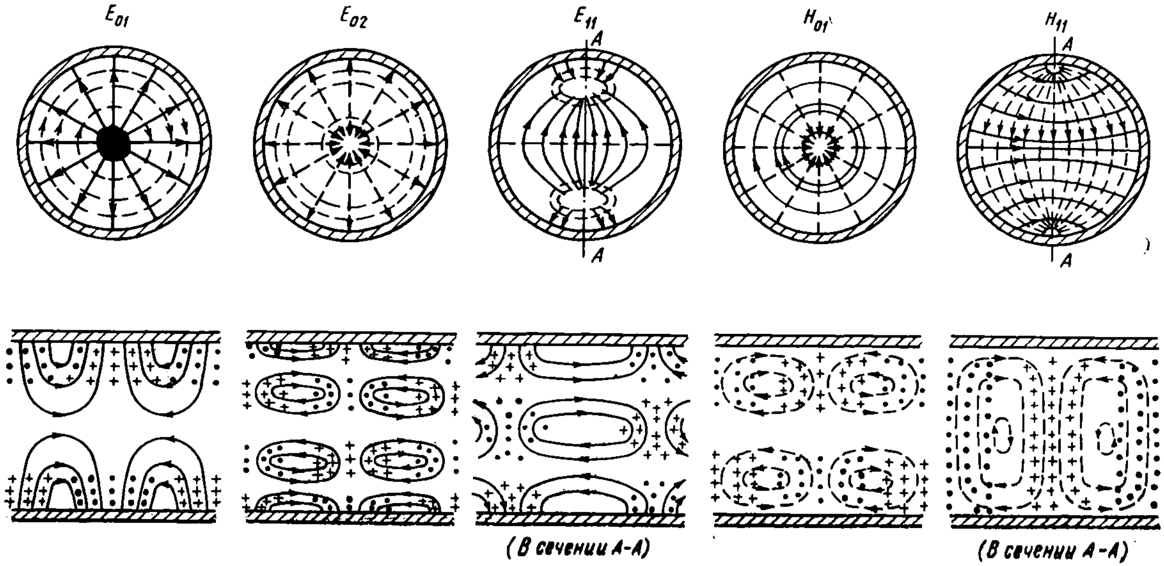


Рис. 14.2.1

Бесселя m-го порядка через ν_{mn}^E из (14.2.7) находим $\gamma_\perp a = \nu_{mn}^E$, откуда

$$\gamma_\perp = \frac{\nu_{mn}^E}{a} . \tag{14.2.8}$$

Нумерация E-волн, отличающихся друг от друга по структуре поля в плоскости поперечного сечения волновода, осуществляется в соответствии с порядковым номером корня ур-ния (14.2.7). Например, корню ν_{01}^E соответствует волна E_{01}, корню ν_{12}^E — волна E_{12} и т. д. При этом индекс m соответствует числу целых стоячих волн поля, укладывающихся по окружности волновода (см. ф-лы (14.2.4) и (14.2.5)), а индекс n характеризует распределение поля стоячей волны вдоль радиуса волновода.

Несколько первых корней функций Бесселя ν_{mn}^E в порядке их возрастания и соответствующие критические длины волн $\lambda_{\text{кр}}^{E_{mn}}$, рассчитанные по ф-ле (13.4.5), представлены в табл. 14.1. Низшим типом среди волн E в круглом волноводе является волна E_{01}.

Фазовая скорость и скорость переноса энергии волн E в круглом волноводе рассчитываются по ф-лам (13.6.5) и (13.9.10), волновое сопротивление — по ф-ле (13.6.4).

Структура поля нескольких волн E_{mn}, построенная в соответствии с (14.2.4) и (14.2.5), представлена на рис. 14.2.1.

МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ($\dot H_z \neq 0$, $\dot E_z = 0$)

Решая ур-ние (13.3.15) аналогично ур-нию (14.2.1), получаем следующее выражение для продольной составляющей магнитного поля в круглом волноводе:

$$\dot H_z = H_{0z} J_m(\gamma_\perp r) \cos m(\varphi - \varphi_0)\, e^{-i\beta z}. \tag{14.2.9}$$

Подставляя выражение для $\dot H_z$ из (14.2.9) в (13.7.1) и (13.7.2) и учитывая, что $\operatorname{grad}_\perp \dot H_z = \mathbf{r}_0 \frac{\partial \dot H_z}{\partial r} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot H_z}{\partial \varphi}$, определяем поперечные составляющие поля:

$$\left.\begin{aligned}
\dot E_r &= \frac{i\omega\mu_a m}{\gamma_\perp^2 r} H_{0z} J_m(\gamma_\perp r) \sin m(\varphi-\varphi_0)\, e^{-i\beta z}\\
\dot E_\varphi &= \frac{i\omega\mu_a}{\gamma_\perp} H_{0z} J'_m(\gamma_\perp r) \cos m(\varphi-\varphi_0)\, e^{-i\beta z}\\
\dot H_r &= -\frac{i\beta}{\gamma_\perp} H_{0z} J'_m(\gamma_\perp r) \cos m(\varphi-\varphi_0)\, e^{-i\beta z}\\
\dot H_\varphi &= \frac{i m\beta}{\gamma_\perp^2 r} H_{0z} J_m(\gamma_\perp r) \sin m(\varphi-\varphi_0)\, e^{-i\beta z}
\end{aligned}\right\}, \tag{14.2.10}$$

где штрих означает дифференцирование по всему аргументу функций Бесселя.

Для определения поперечного волнового числа $\gamma_\perp$ воспользуемся граничным условием (13.7.5). Подставляя (14.2.9) в (13.7.5) и учитывая, что в круглом волноводе дифференцирование по нормали соответствует дифференцированию по радиусу, получаем трансцендентное уравнение

$$J'_m(\gamma_\perp a) = 0. \qquad (14.2.11)$$

Отметим, что при выполнении равенства (14.2.11) согласно (14.2.10) касательная к стенкам волновода составляющая $\dot{E}_\varphi$ электрического поля равна нулю на поверхности стенок волновода. Обозначив корни ур-ния (14.2.11), число которых бесконечно, через ν^H_{mn}, находим поперечное волновое число волн H_{mn}:

$$\gamma_\perp = \nu^H_{mn}/a, \qquad (14.2.12)$$

где нумерация волн H_{mn} аналогична нумерации волн E_{mn}. Несколько первых корней ν^H_{mn} в порядке их возрастания и соответствующие критические длины волн $\lambda_{\text{кр}}^{H_{mn}}$, рассчитанные по ф-ле (13.4.5), представлены в табл. 14.2. Низшим типом среди не только волн H, но и всех волн в круглом волноводе, как следует из сравнения табл. 14.1 и 14.2, является волна H_{11}. Интересно отметить, что структура поля этой волны близка к структуре поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе (рис. 14.1.1 и 14.2.1), также имеющей максимальную критическую длину волны.

Производная функция Бесселя m-го порядка связана с функциями Бесселя m и $(m+1)$-го порядка известным равенством

$$J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x). \qquad (14.2.13)$$

Поэтому ур-ние (14.2.11) эквивалентно следующему уравнению:

$$J_{m+1}(\gamma_\perp a) = \frac{m}{\gamma_\perp a} J_m(\gamma_\perp a). \qquad (14.2.14)$$

При $m=0$ ур-ние (14.2.14) имеет вид

$$J_1(\gamma_\perp a) = 0. \qquad 14.2.15$$

ТАБЛИЦА 14.2

Тип волны	H_{11}	H_{21}	H_{01}	H_{31}	H_{41}	H_{12}	H_{51}	H_{22}	H_{02}	H_{61}	H_{32}	H_{13}
ν^H_{mn}	1,84	3,05	3,83	4,20	5,32	5,33	6,42	6,71	7,02	7,5	8,02	8,54
$\lambda_{\text{кр}}^{H_{mn}} \frac{1}{a}$	3,41	2,06	1,64	1,50	1,182	1,178	0,979	0,934	0,896	0,838	0,784	0,736

Из сравнения (14.2.15) с (14.2.7) вытекает, что

$$\nu_{1n}^{E}=\nu_{0n}^{H}, \tag{14.2.16}$$

т.е. $\lambda_{\text{кр}}^{E_{1n}}=\lambda_{\text{кр}}^{H_{0n}}$, и в круглом волноводе волны E_{1n} и H_{0n} являются вырожденными.

Структура полей нескольких магнитных волн, построенная в соответствии с (14.2.9) и (14.2.10), представлена на рис. 14.2.1.

Фазовая скорость и скорость переноса энергии волн H в круглом волноводе определяются по ф-лам (13.6.5) и (13.9.10), волновое сопротивление—по ф-ле (13.7.6).

14.3. Токи на стенках прямоугольного и круглого волноводов

ТОКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ H_{10}

Каждой структуре поля в волноводе соответствует определенная система токов проводимости на его стенках. Предположим, что стенки волновода являются идеально проводящими. В этом случае токи проводимости текут по поверхности стенок. Плотность поверхностного тока численно равна напряженности тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности проводника. Вектор плотности поверхностного тока направлен нормально к вектору напряженности магнитного поля. Аналитически зависимость между плотностью поверхностного тока и магнитным полем выражается ф-лой (3.4.10). Пользуясь этим соотношением и приведенными выше формулами, описывающими структуру поля в волноводе, можно определить токи на стенках волновода.

Структура электромагнитного поля волны H_{10} в поперечном сечении показана на рис. 14.1.1. У поверхности стенок, параллельных оси X (широкие стенки), имеются две составляющие вектора напряженности магнитного поля $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_z$. Соответственно на этих стенках имеются составляющая плотности тока проводимости $\dot{j}_{Sz}$, параллельная оси Z (продольный ток), и составляющая $\dot{j}_{Sx}$, параллельная оси X (поперечный ток).

Согласно (3.4.10) и (14.1.27) плотность продольного тока на широкой стенке равна

$$\dot{j}_{Sz}=-\frac{\mathrm{i}\beta a}{\pi}H_{0z}\sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}. \tag{14.3.1}$$

Распределение $\dot{j}_{Sz}$ показано на рис. 14.3.1*а*. Как видно из рисунка, продольные токи на нижней и верхней стенках противофазны. Это вытекает из ф-лы (3.4.10), если учесть, что вектор $\mathbf{n}_0$ у верхней и нижней стенок имеет противоположное направление. Плотность поперечного поверхностного тока на широких стенках волновода согласно (3.4.10) и (14.1.25) выражается формулой

$$\dot{j}_{Sx} = H_{0z} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i \beta z}. \qquad (14.3.2)$$

Распределение $\dot{j}_{Sx}$ показано на рис. 14.3.1*б*. Плотность поперечного поверхностного тока равна нулю вдоль средней линии широкой стенки волновода.

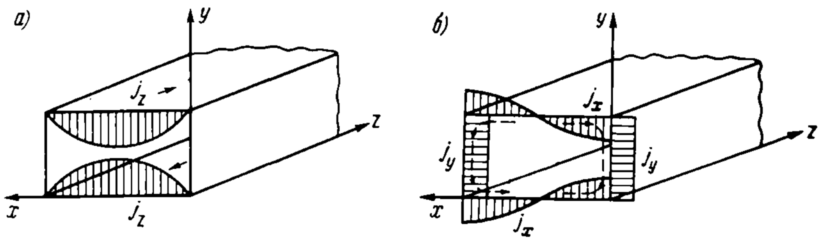


Рис. 14.3.1

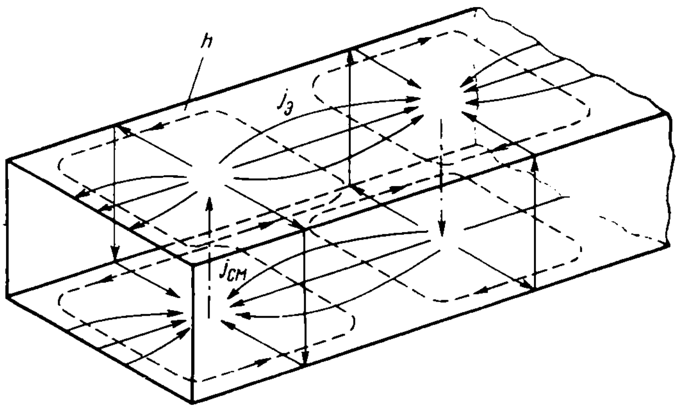


Рис. 14.3.2

На узких стенках, параллельных оси *У*, поверхностный ток определяется только составляющей $\dot{H}_z$ магнитного поля и соответственно имеет только составляющую $\dot{j}_{Sy}$.

Как следует из ур-ния (14.1.25), $\dot{H}_z$ у узких стенок имеет постоянную амплитуду, равную H_{0z}. Соответственно плотность поверхностного тока на узких стенках равна $\dot{j}_{Sy} = \dot{H}_{0z} e^{-i\beta z}$, $\dot{j}_{Sx}$ и $\dot{j}_{Sy}$ образуют единую систему поперечных токов. Модуль комплексной плотности тока в любой точке поверхности широких стенок волновода равен

$$|\dot{j}_S| = \sqrt{|\dot{j}_{Sz}|^2 + |\dot{j}_{Sx}|^2}. \qquad (14.3.3)$$

Распределение суммарной плотности тока показано на рис. 14.3.2.

ТОКИ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ H_{11}

Структура электромагнитного поля волны H_{11} изображена на рис. 14.2.1. У поверхности волновода имеются две отличные от нуля составляющие вектора напряженности магнитного поля $\dot{H}_{\varphi}$ и $\dot{H}_z$, которым согласно (3.4.10) (где следует положить $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{r}_0$) соответствуют составляющие тока проводимости $\dot{j}_{Sz}$ и $\dot{j}_{S\varphi}$. Распределение суммарной плотности тока показано на рис. 14.3.3.

Рис. 14.3.3

ТОКИ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ H_{01}

Структура электромагнитного поля волны H_{01} изображена на рис. 14.2.1. У поверхности волновода отлична от нуля лишь продольная составляющая магнитного поля, которая согласно (14.2.9) остается постоянной по всему периметру волновода и равна (см. табл. 14.2)

$$\dot{H}_z = H_{0z} J_0 \left(\nu_{01}^{H}\right) e^{-i\beta z}. \qquad (14.3.4)$$

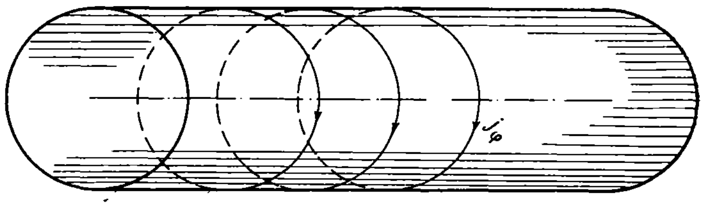


Рис 14.3.4

В соответствии с (3.4.10) на стенках волновода существуют только поперечные $\dot{j}_{S\varphi}$ поверхностные токи (кольцевые токи). Плотность этих токов также одинакова по всему периметру сечения волновода и описывается выражением (14.3.4). Распределение $\dot{j}_{S\varphi}$ показано на рис. 14.3.4.

14.4. Волны в коаксиальной линии

ВОЛНА *TEM*. ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Коаксиальная линия является направляющей системой закрытого типа, состоящей из двух изолированных друг от друга металлических проводников (рис. 13.1.12*е*). В направляющих системах такого типа возможно существование волн *TEM*, *E* и *H* (см. гл.

13). Поскольку у волны TEM $f_{кр}=0$, то эта волна является низшим типом волны в коаксиальной линии.

Совместим ось Z цилиндрической системы координат r, φ, z с осью внутреннего проводника коаксиальной линии, ориентировав оси системы, как изображено на рис. 13.1.1*е*.

Как было показано в гл. 13, поперечный вектор $\dot{E}_\perp$ электрического поля волны TEM можно выразить через градиент функции $\dot{\psi}$ [см. (13.5.6)]. Уравнение Лапласа, которому удовлетворяет функция $\dot{\psi}$ в полярной системе координат, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{\psi}}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (14.4.1)$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, получаем два решения. Одно из них имеет вид

$$\dot{\psi}_1=(Ar^m+Br^{-m})\cos m(\varphi-\varphi_0)\,e^{-i\beta z}, \qquad (14.4.2)$$

где m — целое число, и второе

$$\dot{\psi}_2=-D\ln r\,e^{-i\beta z}. \qquad (14.4.3)$$

На поверхности внутреннего проводника и на внутренней поверхности внешнего проводника коаксиальной линии, которые будем полагать идеально проводящими, касательная составляющая электрического поля должна обращаться в нуль. Следовательно,

$$\dot{E}_\varphi(R_1,\varphi)=\dot{E}_\varphi(R_2,\varphi)=0. \qquad (14.4.4)$$

Нетрудно проверить, что решение (14.4.2) граничному условию (14.4.4) при $A\neq 0$ и $B\neq 0$ не удовлетворяет и его следует отбросить. Для второго решения $\dot{E}_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \varphi}\equiv 0$, т. е. граничное условие (14.4.4) выполняется тождественно при произвольном значении константы D и функция $\dot{\psi}_2$ является искомым решением.

Подставляя в (13.5.6) и (13.5.8) функцию $\dot{\psi}_2$, находим составляющие поля волны TEM:

$$\dot{E}_r=-\frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial r}=\frac{D}{r}\,e^{-i\beta z}; \qquad (14.4.5)$$

$$\dot{H}_\varphi=\frac{\dot{E}_r}{Z_c}=\frac{D}{Z_c r}\,e^{-i\beta z}. \qquad (14.4.6)$$

Постоянную D выразим через модуль напряженности электрического поля у поверхности внутреннего проводника, обозначив эту величину через E_0. Из (14.4.5) следует, что $D=E_0R_1$, где R_1 — радиус внутреннего проводника. Структура поля, соответствующая (14.4.5) и (14.4.6), изображена на рис. 13.5.1*б*. Фазовая скорость и скорость переноса энергии у волны TEM в коаксиальной линии, как у любой волны TEM, равны скорости света в среде, заполняющей пространство между внутренним и внешним проводниками.

Потенциальный характер электрических и магнитных полей позволяет говорить о полном токе и о напряжении в коаксиальной линии. Разность потенциалов между центральным и внешним проводниками равна

$$\dot{U} = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_r \, dr = E_0 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} e^{-i\beta z}. \qquad (14.4.7)$$

Ток, текущий по поверхности центрального проводника и по внутренней поверхности внешнего проводника, равен

$$\dot{I} = \oint_{\Gamma} \dot{\mathbf{H}} \, d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} R_1 \dot{H}_{\varphi}(R_1, \varphi) \, d\varphi = \frac{2\pi R_1 E_0}{Z_c} e^{-i\beta z}. \qquad (14.4.8)$$

Отношение напряжения $\dot{U}$ к току $\dot{I}$ в режиме бегущей волны называется волновым сопротивлением коаксиальной линии

$$Z_в = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_c}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{R_2}{R_1} \ [ом]. \qquad (14.4.9)$$

Внутренний проводник коаксиальной линии может быть сплошным, сплетенным из отдельных проволочек, либо трубчатым. Обычно этот проводник выполняется из меди или с целью увеличения механической прочности, из биметаллической проволоки (сталь-

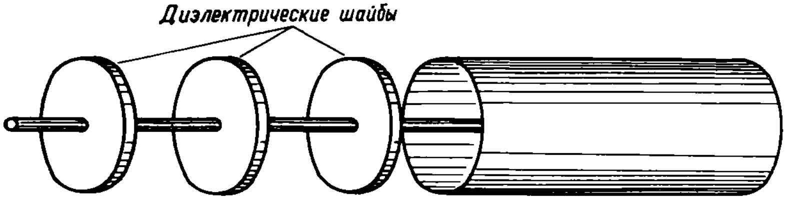


Рис. 14.4.1

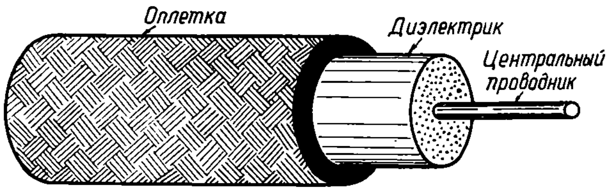


Рис. 14.4.2

ная проволока, покрытая слоем меди). Внешний проводник в зависимости от назначения линии представляет собой либо полую трубу (рис. 14.4.1) — жесткая коаксиальная линия, либо выполняется в виде оплетки (рис. 14.4.2) из медной проволоки или ленты — гибкий коаксиальный кабель.

Коаксиальное расположение внутреннего и внешнего проводников коаксиальной линии обычно поддерживается изоляторами в виде шайб (рис. 14.4.1), колпачков и др. В диапазоне свч изоляторы выполняются из диэлектриков с малыми потерями (фторопласта, полиэтилена, полистирола, свч керамики и др.). Применяют также коаксиальные линии со сплошным диэлектрическим заполнением (рис. 14.4.2). При частичном заполнении коаксиальной линии диэлектриком (рис. 14.4.1) скорость распространения волны меньше скорости света в воздухе, но выше скорости света в сплошной диэлектрической среде.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Продольная составляющая $\dot{E}_z$ волн E является решением ур-ния (14.2.1) и согласно (14.2.2) и (14.2.3) равна

$$\dot{E}_z = [C\,J_m(\gamma_\perp r) + D\,N_m(\gamma_\perp r)]\cos m(\varphi - \varphi_0)\,e^{-i\beta z}. \quad (14.4.10)$$

Поскольку точка $r=0$ находится вне области, где сосредоточено электромагнитное поле волны, то в решении (14.4.10) сохранена функция $N_m(\gamma_\perp r)$, которая была отброшена при анализе полей в круглом волноводе. Так как $\dot{E}_z$ обращается в нуль у поверхности внутреннего и внешнего проводников, то

$$\left.\begin{aligned} C\,J_m(\gamma_\perp R_1) + D\,N_m(\gamma_\perp R_1) = 0 \\ C\,J_m(\gamma_\perp R_2) + D\,N_m(\gamma_\perp R_2) = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (14.4.11)$$

Из (14.4.11) следует трансцендентное уравнение

$$\frac{J_m(\gamma_\perp R_1)}{J_m(\gamma_\perp R_2)} = \frac{N_m(\gamma_\perp R_1)}{N_m(\gamma_\perp R_2)}, \quad (14.4.12)$$

из которого находится величина $\gamma_\perp$. Совершенно аналогично можно показать, что в случае магнитных волн величина $\gamma_\perp$ является корнем трансцендентного уравнения

$$\frac{J'_m(\gamma_\perp R_1)}{J'_m(\gamma_\perp R_2)} = \frac{N'_m(\gamma_\perp R_1)}{N'_m(\gamma_\perp R_2)}. \quad (14.4.13)$$

Корни ур-ний (14.4.12) и (14.4.13), число которых бесконечно, находятся либо графически, либо численными методами.

Как показывает анализ ур-ний (14.4.12) и (14.4.13), первым высшим типом волны в коаксиальной линии является при любом диаметре внутреннего проводника волна H_{11}. Структура этой волны в поперечном сечении линии показана на рис. 14.4.3. Критическую частоту волны H_{11} в коаксиальной линии можно определить достаточно точно, не решая ур-ния (14.4.13). Действительно, если $R_1=0$, то коаксиальная линия превращается в круглый волновод, низшим типом волны в котором является волна H_{11}. Введение вдоль оси круглого волновода тонкого металлического стержня, как это имеет место в коаксиальной линии, слабо влияет на распространение волны H_{11} ввиду отсутствия у нее продольных составляющих электрического поля. Поэтому при малых значениях R_1 критическая длина волны H_{11} в коаксиальной линии приближенно равна критической длине волны H_{11} в круглом волноводе, т. е.

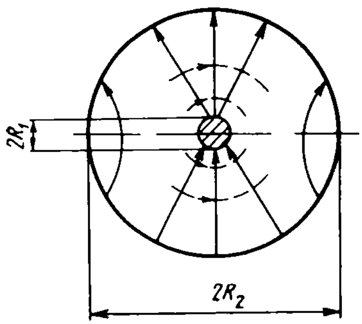


Рис. 14.4.3

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx 3{,}41\, R_2. \qquad (14.4.14)$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда $R_1 \approx R_2$. Структура поля волны H_{11} в плоскости поперечного сечения такой коаксиальной линии изображена на рис. 14.4.4*б*. Для сравнения рядом (рис. 14.4.4*а*) построена структура поля волны H_{20} в прямоугольном волноводе, изогнутом в поперечной плоскости по дуге большого радиуса. Почти полная тождественность обеих структур позволяет считать, что критические частоты волны H_{11} в коаксиальной линии (при $R_1 \to R_2$) и волны H_{20} в прямоугольном волноводе совпадают. Критическая длина волны у H_{20} равна размеру

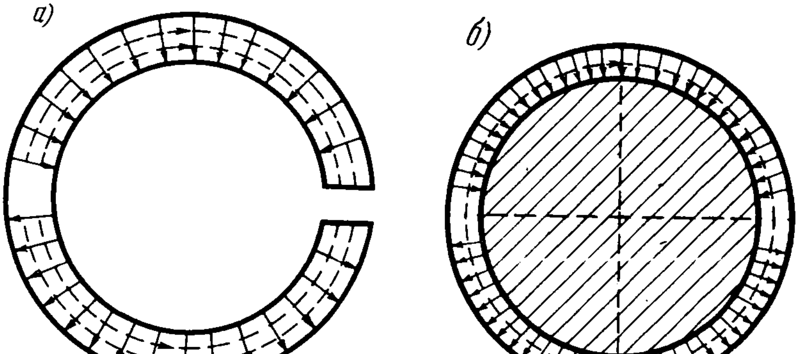


Рис. 14.4.4

широкой стенки прямоугольного волновода (см. разд. 14.1), длину которой в изогнутом волноводе можно приближенно считать равной $\pi(R_1+R_2)$. Следовательно, при $R_1 \to R_2$

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx \pi(R_1+R_2) = 3{,}14\, R_2\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right). \qquad (14.4.15)$$

При $R_1 \ll R_2$ ф-ла (14.4.15) дает значение $\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = 3{,}14\ R_2$, что отличается менее чем на 10% от значения $\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = 3{,}41\ R_2$ в ф-ле (14.4.14).

Таким образом, можно без большой погрешности пользоваться ф-лой (14.4.15) не только при $R_1 \approx R_2$, но и при произвольных значениях R_1 и R_2.

14.5. Волны в полосковой линии

ВОЛНА *TEM*

Полосковая линия, как несимметричная (рис. 14.5.1), так и симметричная (рис. 14.5.2), является частным случаем направляющей системы открытого типа, состоящей из нескольких изолированных друг от друга металлических проводников. Следовательно, низший тип волны в этой линии — волна *TEM*.

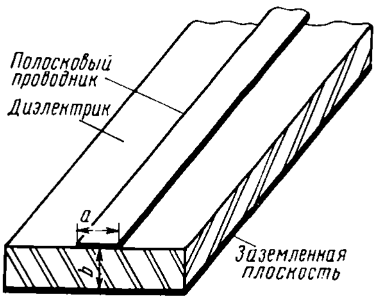


Рис. 14.5.1

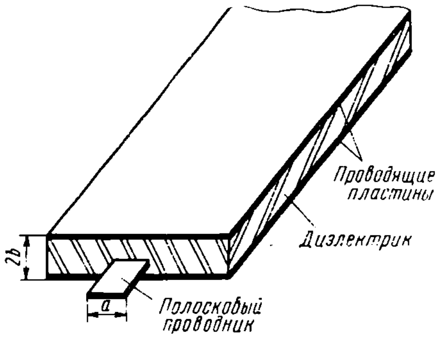


Рис. 14.5.2

Строгий анализ структуры полей в полосковой линии весьма сложен. Ограничимся здесь приближенным рассмотрением этого вопроса путем сопоставления полосковой и коаксиальной линий, основанным на том, что полосковую линию в какой-то степени можно рассматривать как деформированную коаксиальную линию.

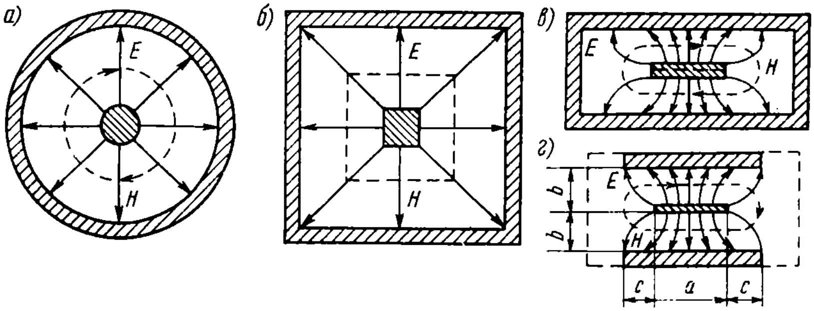


Рис. 14.5.3

Так как поперечное волновое число у волны *TEM* равно нулю независимо от размеров и формы поперечного сечения направляющей системы, то при деформации поперечного сечения коаксиальной линии тип волны в ней не меняется. Меняется только форма силовых линий электрического и магнитного полей. На рис. 14.5.3 показано, как от коаксиальной линии путем последовательного изменения формы проводников можно придти к симметричной полосковой линии. На последнем этапе (рис. 14.5.3*г*) узкие боковые стенки внешнего проводника удаляются на бесконечное расстояние.

ВОЛНЫ ВЫСШИХ ТИПОВ

Рассмотрим первый высший тип волны в симметричной полосковой линии. Последовательно деформируя поперечное сечение коаксиальной линии, в которой распространяется волна H_{11}, находим структуру поля первого высшего типа волны (рис. 14.5.4). Из рисунка видно, что на длине, несколько превышающей ширину центрального проводника полосковой линии, укладывается одна полуволна электрического поля этой волны, т. е. критическая длина этой волны при воздушном заполнении равна

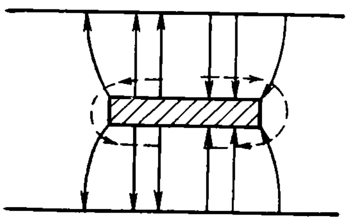


Рис. 14.5.4

$$\lambda_{кр} \approx 2a. \qquad (14.5.1)$$

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

Волновое сопротивление полосковой линии определяется таким же методом, как и волновое сопротивление коаксиальной линии. Ограничимся приведением окончательных формул:

для симметричной полосковой линии

$$Z_в = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{30\pi K(k)}{K(k')}, \ ом; \qquad (14.5.2)$$

для несимметричной полосковой линии

$$Z_в = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{Z_c}{a/b + 2/\pi \left[1 + \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2b}\right)\right]}, \ ом. \qquad (14.5.3)$$

В ф-ле (14.5.2) $K(k)$ и $K(k')$ — полные эллиптические интегралы первого рода [3] от аргументов $k = \operatorname{sch}\frac{\pi a}{4b}$ и $k' = \operatorname{th}\frac{\pi a}{4b}$. Формулы (14.5.2) и (14.5.3) получены в предположении, что толщина центрального проводника много меньше расстояния b между пластинами.

Наиболее распространены полосковые линии, выполненные в виде диэлектрических листов, на поверхность которых приклеиваются или наносятся методами печатного монтажа проводящие пластины (рис. 14.5.1 и 14.5.2). Диэлектрические листы изготовляются из диэлектрика с малыми потерями (полистирол, фторопласт и др.). С целью уменьшения потерь иногда применяют конструкцию, изображенную на рис. 14.5.5, в которой электромагнитное поле существует между узким проводником и соответствующей заземленной пластиной. При этом в листе диэлектрика, разделяющем узкие проводники, концентрация энергии весьма невелика и соответственно малы потери. Основными преимуществами полосковой линии перед остальными линиями передачи являются малый вес и габариты, а также простота изготовления: как саму полосковую линию, так и весь полосковый тракт с разнообразными элементами (фильтрами, мостами и др.) можно изготовлять печатным способом.

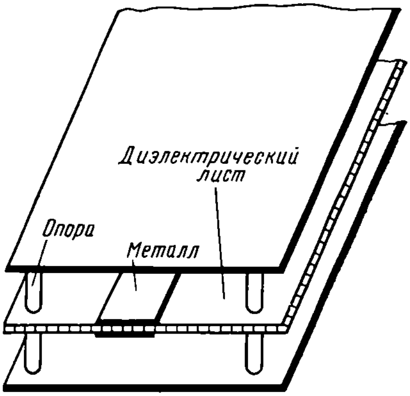


Рис. 14.5.5

В последние годы широкое развитие получила техника интегральных, т. е. сверхминиатюрных, схем диапазона свч. Применение этих схем позволяет существенно повысить надежность, улучшить как воспроизводимость, так и параметры аппаратуры, снизить вес и объем приборов. Пассивные и соединительные элементы в интегральных схемах выполняются обычно из отрезков несимметричной линии. Чтобы уменьшить размеры линии, ее заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью порядка $7 \div 16$ (сапфир, керамики с высоким содержанием окиси алюминия, кварц, арсенид галлия, ферриты и др.). Намечается тенденция к использованию диэлектриков с диэлектрической проницаемостью до 100.

14.6. Линии поверхностной волны

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

Выше, в разд. 10.4, было показано, что волна, распространяющаяся в некоторой среде *1* и падающая на границу раздела с другой средой *2*, при определенных условиях испытывает полное внутреннее отражение. При этом в среде *2* отсутствует поток активной энергии, нормальный границе раздела, и образуется *поверхностная* волна, амплитуда которой в среде 2 экспоненциально убывает в направлении нормали к границе раздела. Энергия электромагнитной волны распространяется вдоль границы раздела. Ниже рассмотрены некоторые линии передачи, называемые линиями поверхностной волны, в которых используется явление полного внутреннего отражения.

МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛОСКОСТЬ, ПОКРЫТАЯ СЛОЕМ ДИЭЛЕКТРИКА

В соответствии со сказанным выше, в диэлектрическом слое, покрывающем металлическую плоскость, могут образоваться поверхностные ~~направляемые~~ волны, распространяющиеся в определенном направлении, например, вдоль оси Z. Такие волны возникают в результате скачкообразного распространения волн *TEM*, последовательно отражающихся от поверхности металла и границы раздела между диэлектриком и воздухом, что согласно концепции парциальных волн соответствует распространению волн E или H. В пространстве над диэлектриком амплитуда поля должна убывать по экспоненциальному закону в направлении нормали к границе раздела.

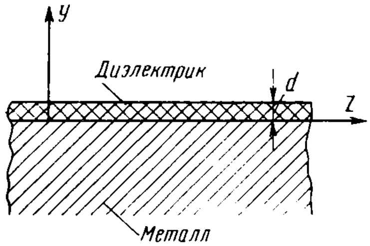


Рис. 14.6.1

Определим структуру электрических волн, распространяющихся параллельно оси Z вдоль безграничной идеально проводящей металлической плоскости, покрытой слоем диэлектрика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ε_{a1} (рис. 14.6.1). Если плоскость и покрывающий ее диэлектрик однородны вдоль оси X, то должна отсутствовать зависимость составляющих поля от этой координаты. Поэтому в волновом ур-нии (13.3.14) необходимо положить $\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2}=0$, и при $y<d$ (пространство, заполненное диэлектриком) составляющая $\dot{E}_z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \dot{E}_z^{(1)}}{dy^2}+\gamma_{\perp д}^2 \dot{E}_z^{(1)}=0, \qquad (14.6.1)$$

где

$$\gamma_{\perp д}^2=\omega^2 \varepsilon_{a1} \mu_0-\beta^2. \qquad (14.6.2)$$

При $y>d$ (пространство над диэлектриком) составляющая $\dot{E}_z$ также удовлетворяет волновому ур-нию (13.3.14). Но диэлектрическая проницаемость среды над диэлектриком равна ε_0, поэтому ур-ние (13.3.14) для $y>d$ записывается в виде

$$\frac{d^2 \dot{E}_z^{(2)}}{d y^2} + \gamma_{\perp в}^2 \dot{E}_z^{(2)} = 0, \qquad (14.6.3)$$

где

$$\gamma_{\perp в}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2. \qquad (14.6.4)$$

На поверхности металла касательная составляющая электрического поля равна нулю, т. е. при $y=0$ $\dot{E}_z^{(1)}=0$. Кроме того, в диэлектрике вдоль оси Y должна образовываться стоячая волна, как и в случае полного внутреннего отражения. Всем этим условиям удовлетворяет решение ур-ния (14.6.1), имеющее вид

$$\dot{E}_z^{(1)} = A \sin \gamma_{\perp д} y \, e^{-i\beta z}. \qquad (14.6.5)$$

В пространстве над диэлектриком амплитуда поля вдоль оси Y должна убывать по экспоненциальному закону. Ввиду этого решение ур-ния (14.6.3) записывается в виде

$$\dot{E}_z^{(2)} = B e^{-\alpha_{\perp в} y} e^{-i\beta z}, \qquad (14.6.6)$$

где $\alpha_{\perp в}$ — действительная положительная величина, связанная с с $\gamma_{\perp в}$ и β равенством

$$\alpha_{\perp в} = i\gamma_{\perp в} = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}. \qquad (14.6.7)$$

Подставляя (14.6.5) и (14.6.6) в (13.6.1) и (13.6.2), получаем следующие выражения для поперечных составляющих:

при $y \leqslant d$:

$$\dot{E}_y^{(1)} = -\frac{i\beta}{\gamma_{\perp д}} A \cos \gamma_{\perp д} y \, e^{-i\beta z}; \qquad (14.6.8)$$

$$\dot{H}_x^{(1)} = \frac{i\omega\varepsilon_{a1}}{\gamma_{\perp д}} A \cos \gamma_{\perp д} y \, e^{-i\beta z}. \qquad (14.6.9)$$

При $y \geqslant d$

$$\dot{E}_y^{(2)} = -\frac{i\beta}{\alpha_{\perp в}} B e^{-\alpha_{\perp в} y} e^{-i\beta z}; \qquad (14.6.10)$$

$$\dot{H}_x^{(2)} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{\alpha_{\perp в}} B e^{-\alpha_{\perp в} y} e^{-i\beta z}. \qquad (14.6.11)$$

Касательные к границе раздела диэлектрик-воздух составляющие электрического и магнитного полей при $y=d$ должны быть непрерывны. Поэтому

$$\dot{E}_z^{(1)}\big|_{y=d} = \dot{E}_z^{(2)}\big|_{y=d} \quad и \quad \dot{H}_x^{(1)}\big|_{y=d} = \dot{H}_x^{(2)}\big|_{y=d}. \qquad (14.6.12)$$

С учетом выражений (14.6.5), (14.6.6), (14.6.9) и (14.6.11) граничные условия (14.6.12) можно записать в виде:

$$A \sin \gamma_{\perp д} d = B e^{-\alpha_{\perp в} d};$$

$$A \frac{\varepsilon_{a1}}{\gamma_{\perp д}} \cos \gamma_{\perp д} d = B \frac{\varepsilon_0}{\alpha_{\perp в}} e^{-\alpha_{\perp в} d} \tag{14.6.13}$$

Разделив обе части каждого из равенств (14.6.13) на A и исключив из полученной системы отношение B/A, приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$\operatorname{tg} \gamma_{\perp д} d = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_0} \frac{\alpha_{\perp в}}{\gamma_{\perp д}}. \tag{14.6.14}$$

Пользуясь соотношениями (14.6.14), (14.6.2) и (14.6.7), можно графически или численно определить $\gamma_{\perp в}$, $\alpha_{\perp в}$ и коэффициент распространения β.

Полное внутреннее отражение на границе диэлектрик-воздух прекращается, когда парциальная волна *TEM* падает на границу под углом, меньшим критического. При этом часть энергии преломляется, и в пространстве над диэлектриком появляется поток активной энергии, нормальный границе раздела.

Аналогичное явление имеет место и в рассматриваемой направляющей системе (рис. 14.6.1). Действительно, если на некоторой частоте

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2 < 0, \tag{14.6.15}$$

то согласно (14.6.7) величина $\alpha_{\perp в}$ становится чисто мнимой и появляется волна, бегущая вдоль оси Y, т. е. появляется поток активной энергии, нормальной оси Z. Следовательно, поверхностная волна существует только на тех частотах, где выполняется неравенство

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2 > 0. \tag{14.6.16}$$

Частота, на которой $\alpha_{\perp в} = 0$, т. е. когда

$$\omega_{кр} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \beta, \tag{14.6.17}$$

называется *критической*.

Низшим типом среди волн E, как показывает анализ корней ур-ния (14.6.14), является волна, у которой $\pi/2 > \gamma_{\perp д} d > 0$. Распространение этой поверхностной волны возможно на всех частотах, превышающих нулевую, и при любой толщине диэлектрического покрытия.

На рис. 14.6.2 изображена построенная в соответствии с (14.6.5), (14.6.6), (14.6.8)—(14.6.11) структура поля этой волны.

Одним из параметров, характеризующих поверхностную волну, является поверхностное сопротивление, равное отношению касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела ($y=d$). Согласно (14.6.6) и (14.6.11) это отношение равно

$$Z_S^E = \frac{\dot{E}_z^{(2)}}{\dot{H}_x^{(2)}} = \mathrm{i}\frac{\alpha_{\perp\text{в}}}{\omega\varepsilon_0}\,. \tag{14.6.18}$$

Как видно, Z_S^E — реактивное, индуктивное по характеру сопротивление, пока выполняется неравенство (14.6.16). Это означает, что у распространяющейся волны сдвиг фаз между $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_x$ равен 90°,

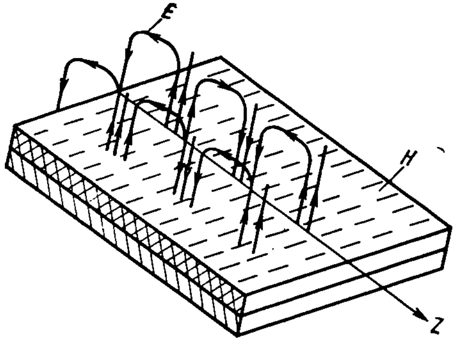


Рис. 14.6.2

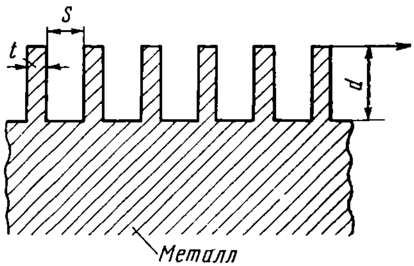


Рис. 14.6.3

и отсутствует средний за период поток энергии, направленный перпендикулярно оси Z. Отсутствие активного потока в направлении, перпендикулярном оси Y, — характерный признак поверхностной волны, поэтому поверхностная электрическая волна возникает во всех случаях, когда на границе раздела поверхностное сопротивление чисто реактивное и индуктивное. Существуют различные способы создания реактивного поверхностного сопротивления. Например, можно прорезать канавки в металлической поверхности, как показано на рис. 14.6.3. Каждую канавку подобной *гребенчатой* структуры можно рассматривать как короткозамкнутый отрезок линии длиной d. Поэтому, когда глубина d канавки не превышает четверти длины волны, ее входное сопротивление чисто реактивное и носит индуктивный характер. Если число канавок на единицу длины волны достаточно велико ($s+t\ll\lambda$), то можно пренебречь влиянием тонких металлических перегородок и полагать, что в сечении $y=0$ расположена плоскость, в любой точке которой поверхностное сопротивление реактивное и носит индуктивный характер. Следовательно, когда $d<\frac{\lambda}{4}$, вдоль гребенчатой структуры, как и вдоль металлической плоскости с диэлектриком, распространяется поверхностная электрическая волна. Структура этой волны весьма близка к структуре волны E, изображенной на рис. 14.6.2.

Как следует из неравенства (14.6.16), коэффициент распространения β поверхностной волны не превышает коэффициента распространения в среде с параметрами ε_0, μ_0. Поэтому фазовая скорость поверхностных волн всегда ниже скорости света в среде, окружающей линию передачи. Волны, обладающие этим свойством, называют *замедленными*.

Аналогичным образом проведенный анализ показывает, что для магнитных волн коэффициент распространения определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma_{\perp д} d = -\frac{\gamma_{\perp д}}{\alpha_{\perp в}}, \tag{14.6.19}$$

а поверхностное сопротивление равно

$$Z_S^H = -\mathrm{i}\frac{\omega \mu_0}{\alpha_{\perp в}}. \tag{14.6.20}$$

Согласно (14.6.20), если выполняется (14.6.16), то для волн H величина Z_S^H также чисто реактивная и носит емкостной характер. Поэтому магнитные поверхностные волны распространяются во всех случаях, когда на границе раздела поверхностное сопротивление имеет емкостной характер.

Низшим типом среди волн H, как показывает анализ корней ур-ния (14.6.19), является волна, у которой $\frac{\pi}{2} < \gamma_{\perp} d < \pi$. На критической частоте, когда выполняется равенство (14.6.17), $\alpha_{\perp в} = 0$ и согласно (14.6.19) $\gamma_{\perp д} d = \pi/2$. Подставляя в это равенство выражение (14.6.2) для $\gamma_{\perp д}$ и значение β из (14.6.17), находим критическую длину волны:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi c}{\omega_{кр}} = 4d\sqrt{\varepsilon - 1}, \tag{14.6.21}$$

где c — скорость света в вакууме.

Так как в направляющих системах волны распространяются лишь на тех частотах, где $\lambda < \lambda_{кр}$, то должно выполняться неравенство $\lambda < 4\, d\sqrt{\varepsilon - 1}$, откуда находим

$$d > \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon - 1}}. \tag{14.6.22}$$

Следовательно, распространение низшего типа магнитных волн возможно только на тех частотах, где выполняется неравенство (14.6.22). Так как критическая частота волны E, структура которой изображена на рис. 14.6.2, равна нулю, т. е. меньше, чем у рассмотренной волны H, то низшим типом среди волн E и H является волна E с $\omega_{кр} = 0$.

Магнитные волны, как и электрические, являются замедленными, ибо условие (14.6.16) должно выполняться для любой поверхностной волны независимо от ее типа.

ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИЙ ЦИЛИНДР, ПОКРЫТЫЙ СЛОЕМ ДИЭЛЕКТРИКА

Не останавливаясь здесь на строгом анализе, рассмотрим основные свойства волны низшего типа, используя то обстоятельство, что проводящий цилиндр, покрытый слоем диэлектрика (рис. 14.6.4), можно приближенно рассматривать как металлическую

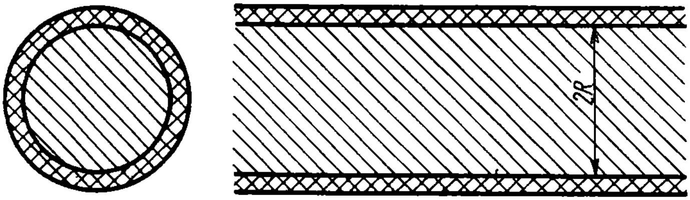


Рис. 14.6.4

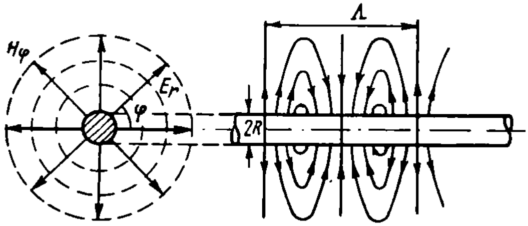


Рис. 14.6.5

плоскость, покрытую диэлектриком и свернутую в цилиндр. Из сказанного следует, что низшим типом волны в исследуемой линии является волна *E*, структура поля которой изображена на рис. 14.6.5.

Затухание в металлическом проводе с диэлектрической оболочкой определяется потерями в металле и потерями в оболочке. Чем толще слой диэлектрика и чем тоньше сам проводник, тем, очевидно, выше потери. Поэтому в сантиметровом диапазоне толщину слоя диэлектрика выбирают достаточно малой, порядка 0,05÷÷0,1 *мм*, а диаметр проводника берут не менее 1 *мм*. Полное затухание в такой линии с диэлектрическим покрытием из полистирола в 2—3 раза меньше, чем в прямоугольном волноводе на тех же частотах. Однако существенная зависимость параметров линии от атмосферных условий и расположенных вблизи линии проводящих тел не позволяет широко использовать эту линию на практике.

Волна *E*, изображенная на рис. 14.6.5, может также распространяться вдоль проводника и при отсутствии диэлектрической оболочки, если на его поверхности из-за коррозии образуется тонкая пленка с относительно низкой проводимостью. Эта пленка эквивалентна тонкому диэлектрическому слою с комплексной диэлектрической проницаемостью.

При большой, но конечной проводимости проводника волна, подобная изображенной на рис. 14.6.5, возникает также и при отсутствии пленки или диэлектрического покрытия. Если глубина проникновения поля в проводник много меньше диаметра ($2R$) стержня из металла с конечной проводимостью, то электромагнитное поле проникает в тонкий поверхностный слой. Следовательно, при $\Delta_0 \ll 2R$, что обычно имеет место на достаточно высоких частотах, роль диэлектрической оболочки выполняет тонкий поверхностный слой металла. Если условие $\Delta_0 \ll 2R$ не выполняется, то провод конечной проводимости следует рассматривать как диэлектрический волновод с комплексной диэлектрической проницаемостью.

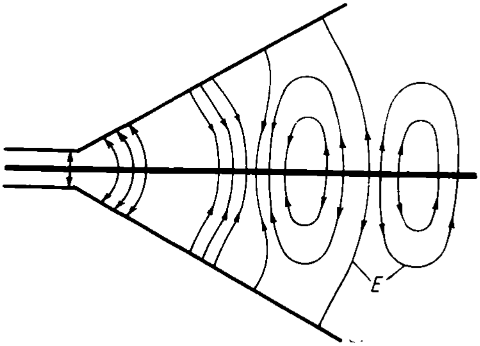


Рис. 14.6.6

Однопроводная линия в виде проводника, покрытого слоем диэлектрика, известна в литературе как линия Губо, по имени автора, предложившего эту линию. Схема возбуждения волны низшего типа в такой линии показана на рис. 14.6.6. Как видно из рисунка, энергия подводится к коаксиальной линии, наружная оболочка которой переходит в конический рупор. Благодаря рупору, обеспечивается плавный переход структуры поля волны *TEM* коаксиальной линии передачи в структуру поверхностной волны. Аналогичное устройство применяется на приемном конце, т. е. в месте перехода энергии поверхностной волны в нагрузку.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Рассмотрим бесконечно длинный диэлектрический цилиндр (рис. 14.6.7) радиуса R, выполненный из диэлектрика с параметрами ε_{a1}, μ_0, расположенный в среде с параметрами ε_0, μ_0.

Продольные составляющие электрического $(\dot{E}_z^{(1)})$ и магнитного $(\dot{H}_z^{(1)})$ полей внутри стержня должны удовлетворять ур-ниям (13.3.14) и (13.3.15), которые целесообразно записать в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_z^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \gamma_{\perp д}^2 \dot{E}_z^{(1)} = 0; \qquad (14.6.23)$$

$$\frac{\partial^2 \dot H_z^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \dot H_z^{(1)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot H_z^{(1)}}{\partial \varphi^2}+\gamma_{\perp д}^2 \dot H_z^{(1)}=0, \qquad (14.6.24)$$

где величина $\nu_{д}$ описывается (14.6.2). Вне диэлектрического стержня, составляющие $\dot E_z^{(2)}$ и $\dot H_z^{(2)}$ также должны удовлетворять волновым уравнениям. Но так как параметры среды другие, то

$$\frac{\partial^2 \dot E_z^{(2)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \dot E_z^{(2)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot E_z^{(2)}}{\partial \varphi^2}+\gamma_{\perp в}^2 \dot E_z^{(2)}=0; \qquad (14.6.25)$$

$$\frac{\partial^2 \dot H_z^{(2)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \dot H_z^{(2)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot H_z^{(2)}}{\partial \varphi^2}+\gamma_{\perp в}^2 \dot H_z^{(2)}=0, \qquad (14.6.26)$$

где величина $\gamma_{\perp в}$ описывается (14.6 4).

Общим решением ур-ний (14.6.23) и (14.6.24) является линейная комбинация функций Бесселя и Неймана (см. разд. 12.2). Однако напряженность полей в любой внутренней точке цилиндра, в том числе и в его центре ($r=0$), должна быть конечной. Поэтому функции Неймана необходимо исключить из решения и при $r \leqslant R$:

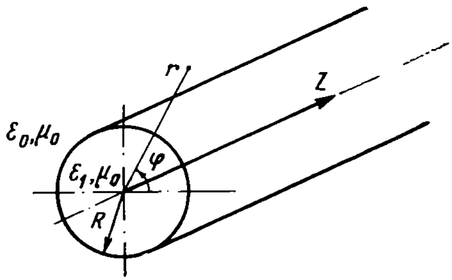


Рис. 14.6.7

$$\dot E_z^{(1)} = A_m J_m(\gamma_{\perp д} r)\, e^{i m \varphi} e^{-i\beta z}; \qquad (14.6.27)$$

$$\dot H_z^{(1)} = B_m J_m(\gamma_{\perp д} r)\, e^{i m \varphi} e^{-i\beta z}. \qquad (14.6.28)$$

Вне цилиндра, где структура поля соответствует структуре поверхностной волны, амплитуды полей должны убывать по экспоненциальному закону. Этому требованию удовлетворяют функции Ханкеля второго рода от чисто мнимого аргумента $H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} r)=$ $=H_m^{(2)}(-i\alpha_{\perp в} r)$. Поэтому решение ур-ний (14.6.25) и (14.6.26) записывается в виде:

$$\dot E_z^{(2)} = C_m H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} r)\, e^{i m \varphi} e^{-i\beta z}; \qquad (14.6.29)$$

$$\dot H_z^{(2)} = D_m H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} r)\, e^{i m \varphi} e^{-i\beta z}. \qquad (14.6.30)$$

Поперечные составляющие электрического и магнитного полей, касательные к границе раздела ($r=R$), определяем, подставляя (14.6.27)—(14.6.30) в соотношения (13.3.12) и (13.3.13):

$$\dot E_\varphi^{(1)} = \frac{i}{\gamma_{\perp д}^2}\left[-A_m \frac{i\beta m}{r} J_m(\gamma_{\perp д} r) + B_m \omega \mu_0 \gamma_{\perp д} J_m'(\gamma_{\perp д} r)\right] e^{i m\varphi} e^{-i\beta z};$$

$$\dot H_\varphi^{(1)} = -\frac{i}{\gamma_{\perp д}^2}\left[A_m \omega \varepsilon_{a1} \gamma_{\perp д} J_m'(\gamma_{\perp д} r) + B_m \frac{i m\beta}{r} J_m(\gamma_{\perp д} r)\right] e^{i m\varphi} e^{-i\beta z};$$

$$\left.\begin{aligned}\dot E_\varphi^{(2)} &= \frac{i}{\gamma_{\perp в}^2}\left[-C_m \frac{i\beta m}{r} H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} r) + D_m \omega \mu_0 \gamma_{\perp в} H_m^{(2)\prime}(\gamma_{\perp в} r)\right] e^{im\varphi} e^{-i\beta z}\\ \dot H_\varphi^{(2)} &= -\frac{i}{\gamma_{\perp в}^2}\left[C_m \omega \varepsilon_0 \gamma_{\perp в} H_m^{(2)\prime}(\gamma_{\perp в} r) + D_m \frac{im\beta}{r} H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} r)\right] e^{im\varphi} e^{-i\beta z}\end{aligned}\right\}. \tag{14.6.31}$$

На границе раздела двух диэлектриков, т. е. при $r=R$, тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей должны быть непрерывны, что аналитически можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\dot E_\varphi^{(1)}(R) &= \dot E_\varphi^{(2)}(R), & \dot E_z^{(1)}(R) &= \dot E_z^{(2)}(R)\\ \dot H_\varphi^{(1)}(R) &= \dot H_\varphi^{(2)}(R), & \dot H_z^{(1)}(R) &= \dot H_z^{(2)}(R)\end{aligned}\right\}. \tag{14.6.32}$$

Подставляя (14.6.27)—(14.6.31) в граничные условия (14.6.32) и исключая из системы неизвестные коэффициенты A_m, B_m, C_m и D_m, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\left[\frac{\mu_0}{\gamma_{\perp д} R}\frac{J_m'(\gamma_{\perp д} R)}{J_m(\gamma_{\perp д} R)} - \frac{\mu_0}{\gamma_{\perp в} R}\frac{H_m^{(2)\prime}(\gamma_{\perp в} R)}{H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} R)}\right]\left[\frac{\omega^2 \varepsilon_{a1}}{\gamma_{\perp д} R}\frac{J_m'(\gamma_{\perp д} R)}{J_m(\gamma_{\perp д} R)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{\gamma_{\perp в} R}\frac{H_m^{(2)\prime}(\gamma_{\perp в} R)}{H_m^{(2)}(\gamma_{\perp в} R)}\right] = m^2\beta^2\left[\frac{1}{(\gamma_{\perp д} R)^2} - \frac{1}{(\gamma_{\perp в} R)^2}\right]^2. \tag{14.6.33}$$

Это уравнение служит для определения неизвестного коэффициента распространения β, который связан с $\gamma_{\perp в}$ и $\gamma_{\perp д}$ равенством (14.6.2) и (14.6.4). После подстановки (14.6.2) и (14.6.4) в (14.6.33) трансцендентное уравнение может быть решено численно либо графически относительно величины β.

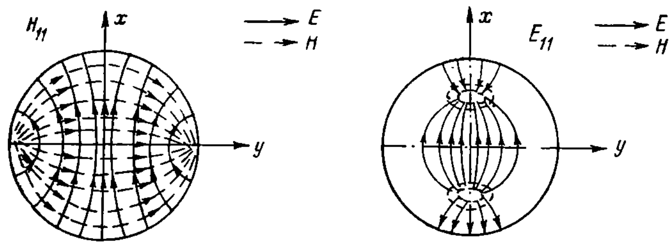


Рис. 14.6.8

Подробный анализ полученного решения изложен в [1]. Приведем лишь конечные результаты этого анализа:

— в диэлектрическом волноводе может существовать бесконечно большое число различных типов волн, имеющих различный характер изменения поля по координатам φ и r;

— в диэлектрическом волноводе невозможно раздельное существование несимметричных волн E и H. Оба эти типа волн образуют единую смешанную волну и распространяются совместно. Симметричные волны E_{0n} и H_{0n} могут существовать в диэлектрическом волноводе независимо друг от друга;

— каждый тип волны имеет свою критическую частоту, которая находится из условия (14.6.17). Низшим типом волны является волна HE_{11}, являющаяся суперпозицией волн H_{11} и E_{11} (рис. 14.6.8). Эта волна не имеет критической частоты, т. е. может распространяться вдоль диэлектрического стержня на всех частотах и при любом диаметре стержня;

— величина фазовой скорости распространения волны в диэлектрическом волноводе лежит между величиной фазовой скорости волны TEM, распространяющейся в среде, окружающей волновод, и величиной фазовой скорости этой же волны в среде, имеющей такие же постоянные ε_{a1} и μ_{a1}, как постоянные материала, из которого сделан волновод;

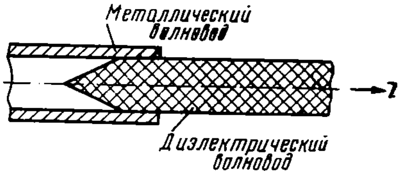


Рис. 14.6.9

— энергия волны распространяется внутри и вне диэлектрического стержня. Чем больше радиус стержня по сравнению с длиной волны электромагнитных колебаний и чем больше $\varepsilon_{a1}/\varepsilon_0$, тем бо́льшая часть энергии распространяется внутри диэлектрического стержня. По мере приближения к критической частоте энергия внутри стержня стремится к нулю. У волны HE_{11} величина энергии внутри стержня стремится к нулю при $R/\lambda \to 0$.

Одна из возможных схем возбуждения диэлектрического волновода изображена на рис. 14.6.9. Как видно из рисунка, скошенный конец диэлектрического стержня вставляется в волновод. Наличие скосов обеспечивает малые отражения на границе диэлектрик-воздух.

ГЛАВА 15

ПЕРЕДАЧА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ПО НАПРАВЛЯЮЩИМ СИСТЕМАМ

15.1. Требования, предъявляемые к линиям передачи. Одноволновый и многоволновый режимы

К линиям передачи обычно предъявляют следующие требования:

— линия должна вносить минимальное затухание;

— линия должна пропускать без пробоя необходимую мощность;

— амплитудные и фазовые искажения, вносимые линией, в передаваемой полосе частот не должны превышать допустимых пределов;

— как сама линия передачи, так и ее элементы должны обладать минимальным весом и габаритами.

К линиям передачи может предъявляться также ряд других требований, вытекающих из условий эксплуатации и технологии их производства.

При анализе линий передачи в гл. 14 была доказана возможность существования в них бесконечного числа типов волн, отличающихся друг от друга структурой электрического и магнитного полей, критическими частотами, фазовой скоростью и другими параметрами. Однако при конструировании линий передачи обычно принимают все меры к тому, чтобы энергия переносилась каким-либо одним типом волны. Объясняется это тем, что различным типам волн соответствуют различные групповые скорости. Поэтому при передаче сигнала несколькими типами волн один и тот же сигнал приходит в точку приема в виде нескольких смещенных во времени сигналов, что приводит к его искажению и увеличению уровня шумов. Характер искажений зависит от способа модуляции, вида и скорости передаваемой информации и других факторов.

Передача энергии одним типом волны обеспечивается наиболее просто, когда в линии может распространяться только волна низшего типа, имеющая наибольшую критическую длину. Для этого достаточно так выбрать поперечные размеры линии, чтобы на любой частоте рабочего диапазона длина волны электромагнитных колебаний не превышала критической длины волны низшего типа ($\lambda_{кр(1)}$), но была больше критической волны первого высшего типа ($\lambda_{кр(2)}$):

$$\lambda_{кр\,(2)} < \lambda < \lambda_{кр\,(1)}. \qquad (15.1.1)$$

Режим, при котором удовлетворяется неравенство (15.1.1), называют *одноволновым*. Полосу частот, в пределах которой сохраняется одноволновый режим, обычно характеризуют коэффициентом широкополосности

$$\xi = \frac{\lambda_{кр\,(1)}}{\lambda_{кр\,(2)}}. \qquad (15.1.2)$$

Однако работа в одноволновом режиме ограничивает возможность увеличения поперечных размеров линий, что часто не позволяет уменьшить затухание в линии до приемлемой величины (см. ниже разд. 15.4 и 15.5). В таких случаях применяются волноводы с увеличенными поперечными размерами, по которым могут распространяться несколько типов волн (многоволновые волноводы). Многоволновые волноводы используются также для передачи больших мощностей (см. ниже разд. 15.3). При этом для обеспечения передачи энергии одним типом волны принимаются специальные меры для подавления остальных возможных типов волн.

15.2. Электрическая прочность линии передачи. Тепловой пробой. Предельная и допустимая мощности

Повышение уровня мощности в линии передачи вызывает соответствующее увеличение напряженности электрического поля в линии. В результате этого в направляющей системе может возникнуть электрический разряд, т. е. наступит пробой воздуха или диэлектрического заполнения. Плотность тока проводимости в разрядом промежутке достигает относительно больших значений (15 *а/см*^{2} и более), что приводит к интенсивному выделению тепла и резкому повышению температуры в месте пробоя. Кроме того, активное сопротивление разрядного промежутка ввиду значительной плотности электронов в нем (до 10^{15} электрон/*см*^{3}) мало, и пробой вызывает почти полное короткое замыкание линии передачи в том сечении, где происходит разряд. Поступление мощности в нагрузку практически прекращается, так как бóльшая часть энергии падающей волны отражается от места, где произошел пробой. Это может привести к выходу из строя генератора либо элементов волноводного тракта.

Повышение уровня мощности в направляющей системе нарушает в некоторых случаях нормальную передачу энергии не только из-за электрического пробоя. Чем бóльшая мощность передается по системе, тем выше абсолютная величина потерь в ней.

Значительное выделение тепла может привести к недопустимому нагреванию диэлектрика, заполняющего линию, и, как следствие, к его разрушению. Наступает так называемый *тепловой пробой*. Поэтому при работе на высоком уровне мощности избегают применения линий передачи с диэлектрическими вставками или диэлектрическим заполнением. Исключение составляют некоторые специальные газы (элегаз) и жидкие диэлектрики, обладающие высокой электрической прочностью (>100 *кв/см*) (нонан, декан, гескан, гептан). Линии передачи иногда специально заполняют этими веществами для повышения электрической прочности. С этой же целью линии передачи заполняют воздухом либо другим газом под давлением, в несколько раз превышающим атмосферное. При этом возрастает вероятность столкновения образующихся свободных электронов с положительно заряженными ионами газа, что снижает ионизацию и повышает электрическую прочность. При существенном понижении давления газа электрическая прочность также возрастает, поскольку вероятность столкновения свободных электронов с молекулами газа резко снижается.

Для характеристики электрической прочности линий передачи вводят понятия *предельной* и *допустимой* мощности. Предельной ($P_{\text{пред}}$) называют наибольшую мощность, которую можно передать по однородной линии без электрического пробоя. Предельное значение передаваемой мощности определяется предельной напряженностью электрического поля $E_{\text{пред}}$, при превышении которой происходит электрический разряд. Для воздуха при нормальном атмосферном давлении и нормальной ионизации $\left(\approx 10\,\dfrac{\text{электронов}}{сек\cdot см^3}\right)$

$E_{\text{пред}} \approx 30\,\dfrac{кв}{см}$.

Допустимая мощность ($P_{\text{доп}}$) обычно в несколько раз меньше, чем предельная, поскольку наличие неоднородностей в линии (см. гл. 17), присутствие отраженной волны (см. гл. 18) и некоторые другие факторы во многих случаях приводят к повышению напряженности электрического поля в отдельных сечениях линии, что может вызвать пробой при мощностях, существенно меньших $P_{\text{пред}}$. Обычно полагают $P_{\text{доп}} = (0{,}2 \div 0{,}3)\,P_{\text{пред}}$.

15.3. Затухание в линиях передачи

КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ

Приведенный в гл. 14 анализ полей в линиях передачи сделан в предположении, что металлические стенки линии являются идеально проводящими и заполняющая волновод среда не вносит потерь. При этом коэффициент распространения γ для всех распространяющихся типов волн совпадает с фазовой постоянной $i\beta$ и является чисто мнимой величиной. По аналогии с безграничными средами можно полагать, что зависимость полей от координаты z в направляющей системе с потерями имеет формально тот же вид, что и в линии без потерь: $e^{-\gamma z}$, где величина γ является комплексной $\gamma=\alpha+i\beta$, и поэтому

$$e^{-\gamma z}=e^{-\alpha z}e^{-i\beta z}, \tag{15.3.1}$$

где множитель $e^{-\alpha z}$ характеризует изменение абсолютной величины любой составляющей электромагнитного поля вдоль оси Z. Так как изменение мощности $P_{\text{ср}}$ вдоль оси Z пропорционально квадрату изменения амплитуды поля, то

$$P_{\text{ср}}=P_{0\,\text{ср}}e^{-2\alpha z}, \tag{15.3.2}$$

где $P_{0\,\text{ср}}$ — средняя мощность в сечении $z=0$ направляющей системы.

Разность между мощностями в точке z и в точке $z+\Delta z$ равна мощности потерь на отрезке линии длиной Δz:

$$\Delta P_{\text{п ср}}=P_{\text{ср}}(z)-P_{\text{ср}}(z+\Delta z). \tag{15.3.3}$$

Разделив обе части равенства на Δz и устремив Δz к нулю, найдем величину мощности тепловых потерь, приходящуюся на единицу длины линии:

$$P'_{\text{п ср}}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{P_{\text{ср}}(z)-P_{\text{ср}}(z+\Delta z)}{\Delta z}=-\frac{\partial P_{\text{ср}}}{\partial z}. \tag{15.3.4}$$

Подставляя (15.3.2) в (15.3.4), находим

$$P'_{\text{п ср}}=2\alpha P_{0\,\text{ср}}e^{-2\alpha z}=2\alpha P_{\text{ср}}, \tag{15.3.5}$$

т. е.

$$\alpha=\frac{P'_{\text{п ср}}}{2P_{\text{ср}}}. \tag{15.3.6}$$

ЗАТУХАНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ПОТЕРЯМИ В СРЕДЕ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ЛИНИЮ ПЕРЕДАЧИ

Наилучшим диэлектриком для заполнения является воздух, поскольку поглощение электромагнитной энергии в нем на всех частотах, кроме некоторых, практически отсутствует[1]. В отдельных случаях, по тем или иным соображениям, может оказаться необходимым заполнение направляющей системы каким-либо диэлектриком. В этом случае будет иметь место рассеивание энергии в диэлектрике.

---

[1]) В диапазоне свч величина кванта энергии электромагнитной волны становится соизмеримой с разностью энергий близко расположенных энергетических уровней атомов и молекул. Поэтому под влиянием электромагнитной волны может происходить переход электронов с более низкого энергетического уровня на более высокий, что сопровождается поглощением части энергии волны. В сантиметровом и миллиметровом диапазонах подобное поглощение наблюдается на частотах, близких к 22,23 *Ггц*, в парах воды и на частотах, близких к 60 и 120 *Ггц*, в молекулах кислорода.

Если диэлектрическая постоянная заполняющего линию диэлектрика равна $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon''$, то в соответствии с ур-нием (13.4.6) коэффициент распространения в такой линии равен

$$\gamma=\sqrt{\omega^2\tilde{\varepsilon}\mu_a-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2}=\sqrt{\omega^2\varepsilon'\mu_a-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2-i\,\omega^2\varepsilon''\mu_a}\,. \quad (15.3.7)$$

Извлекая корень квадратный из комплексного числа, получаем:

$$\beta\sqrt{2}=\sqrt{\beta_0^2+\sqrt{\beta_0^4+\omega^4\varepsilon''\mu_a}}\,; \quad (15.3.8)$$

$$\alpha\sqrt{2}=\sqrt{-\beta_0^2+\sqrt{\beta_0^4+\omega^4\varepsilon''\mu_a}}\,, \quad (15.3.9)$$

где $\beta_0=\sqrt{\omega^2\varepsilon'\mu_a-\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2}$ — фазовый коэффициент при $\varepsilon''=0$. Интересно отметить, что, как следует из (15.3.8) и (15.3.9), на критической частоте и на более низких частотах, когда в линии без потерь свободное распространение электромагнитных волн становится невозможным, в направляющей системе, заполненной диэлектриком с потерями, электромагнитная волна может распространяться, хотя и со значительными потерями. Это явление характерно для любой линии с потерями, независимо от того, что является причиной потерь.

ЗАТУХАНИЕ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ПОТЕРЯМИ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКАХ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Анализ структуры поля в линиях передачи, сделанный в предположении идеальной проводимости стенок волновода, неточен для реальных линий с конечной проводимостью стенок. Однако если проводимость стенок конечна, но весьма велика (что обычно имеет место), то действительная структура поля мало отличается от структуры поля, полученной в предположении идеальной проводимости стенок. Отличие в основном сводится к тому, что в соответствии с граничным условием Леонтовича—Щукина (см. гл. 11) вдоль стенок волновода появляется некоторая весьма малая тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля. Например, действительная структура электрического поля волны типа H_{10} в волноводе прямоугольного сечения благодаря конечной проводимости стенок волновода имеет вид, показанный на рис. 15.1.1. Как видно из рисунка, электрические силовые линии вблизи стенок волновода несколько наклонены в направлении распространения, в то время как согласно сделанному выше анализу они должны быть строго нормальны к поверхностям стенок. Отметим, что наклон силовых линий весьма мал (наклон силовых линий на рис. 15.1.1 для наглядности преувеличен). Аналогичные изменения структуры поля происходят и при распространении волн других типов.

Изменению структуры электрических силовых линий соответствует изменение структуры магнитных силовых линий. В частности, у стенок волновода нормальная составляющая вектора **H** не равна нулю. Однако, как мы уже отмечали, эти изменения поля весьма малы и можно полагать, что приведенные выше уравнения достаточно точно описывают структуру магнитного поля и токи на стенках волновода. Изменение структуры токов в основном сводится к тому, что они в действительности текут не по поверхности, а проникают на некоторую глубину внутрь стенок.

Наличие отличной от нуля тангенциальной составляющей векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ у стенок волновода означает, что вектор Пойнтинга имеет составляющую, нормальную стенкам волновода, и, следовательно, в них имеются потери на тепло (см. гл. 11).

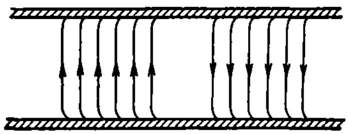


Рис. 15.1.1

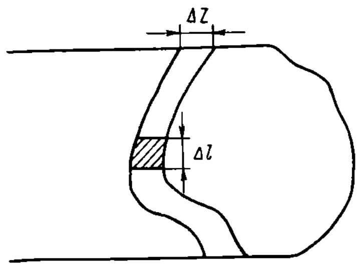


Рис. 15.1.2

Выделим на поверхности металлического проводника направляющей системы участок длиной Δz, как показано на рис. 15.1.2. Средняя мощность тепловых потерь $\Delta P_{\text{п ср}}$ на отрезке проводника длиной Δz согласно (11.2.4) равна

$$\Delta P'_{\text{п ср}} = \frac{1}{2\sigma\Delta_0}\int_0^{\Delta z} dz \oint_{\text{Г}} |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2\, dl = \frac{\Delta z}{2\sigma\Delta_0}\oint_{\text{Г}} |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2\, dl, \qquad (15.3.10)$$

т. е. потери на единицу длины

$$P'_{\text{п ср}} = \frac{\Delta P_{\text{п ср}}}{\Delta z} = \frac{1}{2\sigma\Delta_0}\oint_{\text{Г}} |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2\, dl. \qquad (15.3.11)$$

Подставляя (15.3.11) в (15.3.6), получаем

$$\alpha = \frac{R_S}{4P_{\text{ср}}}\oint_{\text{Г}} |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2\, dl, \qquad (15.3.12)$$

где через R_S обозначена активная часть поверхностного сопротивления, согласно (9.2.23) равная

$$R_S = \frac{1}{\sigma\Delta_0} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}}\,. \qquad (15.3.13)$$

Так как для всех металлов, кроме ферромагнитных, $\mu_a \approx \mu_0$, то

$$R_S \approx 1{,}987\sqrt{\frac{f}{\sigma}}\cdot 10^{-3}\,,\ \text{ом}, \qquad (15.3\,14)$$

где f — частота в герцах.

Как следует из равенства (15.3.12), коэффициент затухания убывает прямо пропорционально величине поверхностного сопротивления R_S. Поэтому волноводы целесообразно изготовлять из металлов с высокой удельной проводимостью: серебра, меди, алюминия. Серебро слишком дорогой материал, поэтому для изготовления волноводов обычно используют медь, алюминий и латунь, содержащую более 90% меди.

Значительное влияние на затухание в линиях передачи оказывает коррозия металлических стенок. Окислы, образующиеся на поверхности металла, имеют большое удельное сопротивление, что вызывает увеличение потерь. Чтобы избежать этого, на стенки линии передачи наносят тонкий слой лака, предохраняющего металл от коррозии, или осаждают электролитическим методом слой серебра, значительно более стойкого к окислению, чем медь или латунь. Поверхностное сопротивление электролитически осажденного серебра несколько больше, чем чистой меди, но значительно меньше, чем латуни. Поэтому толщина серебряного покрытия на проводящих поверхностях из чистой меди должна быть существенно меньше глубины проникновения тока в серебро. Основная часть поверхностного тока течет по поверхности меди, а не в слое серебра, и дополнительные потери за счет худшей проводимости серебра малы. В случае, когда проводящие поверхности выполнены из латуни, толщина серебряного покрытия выбирается несколько больше глубины скин-слоя в серебре. Потери определяются потерями в серебре, и поэтому в посеребренных латунных поверхностях потери существенно ниже, чем в непосеребренных. В отдельных случаях в качестве антикоррозийного покрытия применяют золото.

Заметно увеличивает затухание в проводниках неизбежная шероховатость поверхности металла. В сантиметровом диапазоне волн глубина проникновения тока в металл не превышает 0,1—0,2 *мк*. В этом диапазоне неровности металлических поверхностей даже после тщательной обработки и шлифовки обычно значительно больше глубины проникновения тока в металл, что приводит к увеличению пути, проходимого током по металлической поверхности, а следовательно, к возрастанию потерь. Поэтому действительные значения коэффициента затухания оказываются несколько выше рассчитанных по ф-ле (15.3.12). Некоторое дополнительное увеличение коэффициента затухания вызывает также нанесение лаковой пленки.

15.4. Передача энергии по прямоугольному волноводу

МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ ПО ВОЛНОВОДУ

В прямоугольном волноводе наибольшую критическую длину $\lambda_{кр}^{H_{10}} = 2a$ имеет волна H_{10}, т. е. эта волна является низшим типом волны. Следующим по порядку, т. е. первым высшим типом волны, может быть одна из волн: либо H_{01}, у которой $\lambda_{кр}=2b$, либо H_{20}, у которой $\lambda_{кр}=a$. Поэтому условие одноволновости (15.1.1) для прямоугольного волновода имеет вид:

$$2a > \lambda > a; \quad \lambda > 2b. \qquad (15.4.1)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\lambda}{2} < a < \lambda; \quad b < \frac{\lambda}{2}; \quad \xi = 2. \qquad (15.4.2)$$

Чтобы сделать невозможным распространение волн высших типов во всем двухкратном диапазоне волн, неравенства (15.4.1) должны выполняться на самой короткой длине волны рабочего диапазона. Поэтому

$$a \approx 0{,}75\,\lambda_0; \quad b \approx 0{,}5\,a, \qquad (14.3)$$

где λ_0 — средняя длина волны рабочего диапазона.

Частотный диапазон использования прямоугольных волноводов, охватывающий частоты от 400 *Мгц* до 140 *Ггц,* в соответствии с рекомендацией Международной электротехнической комиссии разбит на 28 поддиапазонов, частично перекрывающих друг друга, и для каждого поддиапазона рекомендованы стандартные размеры волновода. На частотах порядка 500 *Мгц* и ниже прямоугольные волноводы применяются редко из-за значительных габаритов и веса. Например, отрезок волновода из алюминия длиной 1 *м* при размерах поперечного сечения 457×228,5 *мм* ($\lambda_0 \approx 60$ *см*) и толщине стенок 3 *мм* весит около 11 *кг,* а медный того же сечения и с той же толщиной стенок — около 36 *кг.*

Мощность, переносимую электромагнитной волной по прямоугольному волноводу, можно определить, подставив в (13.10.14) и (13.10.15) выражения (14.1.13) для составляющей $\dot{E}_z$ и выражение (14.1.23) для составляющей $\dot{H}_z$:

$$P_{ср}^{E} = \frac{\beta^2}{2\,Z_с^E\,\gamma_\perp^2}\,E_{0z}^2 \int\limits_0^a \int\limits_0^b \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{\beta^2 E_{0z}^2}{8\,Z_с^E\,\gamma_\perp^2}\,ab; \qquad (15.4.4)$$

$$P_{ср}^{H} = \frac{\beta^2 Z_с^H}{2\,\gamma_\perp^2}\,H_{0z}^2 \int\limits_0^a \int\limits_0^b \cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{H_{0z}^2 Z_с^H}{4}\,ab\left(\dfrac{\lambda_{кр}}{\Lambda}\right)^2 \text{ при } \begin{matrix} m=0, & n \geqslant 1; \\ m \geqslant 1, & n=0 \end{matrix} \\ \dfrac{H_{0z}^2 Z_с^H}{8}\,ab\left(\dfrac{\lambda_{кр}}{\Lambda}\right)^2 \text{ при } m \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \end{cases} \qquad (15.4.5)$$

В прямоугольном волноводе энергия обычно переносится волной H_{10}. Полагая в (15.4.5) $m=1$ и $n=0$, получаем

$$P_{ср}^{H_{10}} = H_{0z}^2\,\frac{Z_c ab}{4}\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \qquad (15.4.6)$$

Подставляя в (15.4.6) вместо H_{0z} амплитудное значение составляющей $\dot{E}_y$ из (14.1.26), после преобразований приходим к равенству

$$P_{\text{ср}}^{H_{10}} = \frac{E_{0y}^2 ab}{4 Z_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \qquad (15.4.7)$$

При стандартных размерах волновода [см. (15.4.3)] и $E_{0y} = 30$ *кв/см* $P_{\text{пред}}^{H_{10}} \leqslant 125\,\lambda^2$, *квт*, где длина волны выражена в сантиметрах. Например, при $\lambda = 30$ *см* $P_{\text{пред}}^{H_{10}} \leqslant 112$ *Мвт*. Соответственно $P_{\text{доп}}^{H_{10}} = 28$ *Мвт*. Как видно, в дециметровом диапазоне по прямоугольному волноводу стандартного сечения можно передавать весьма значительную мощность. Однако по мере повышения частоты допустимая мощность быстро уменьшается и при $\lambda = 1$ *см* не превышает $(30 \div 45)$ *квт*.

Когда методы повышения электрической прочности, указанные в разд. 15.2, почему-либо неприемлемы, то, как следует из ф-лы (15.4.6), предельную мощность можно существенно повысить, увеличив площадь поперечного сечения волновода по сравнению со стандартными.

Если размеры волновода увеличены настолько, что в части или во всем рабочем диапазоне волновод оказывается в многоволновом режиме, то необходимо принять специальные меры для предотвращения распространения всех типов волн, кроме H_{10}.

ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН

Определим коэффициент затухания α, учитывающий потери энергии в стенках прямоугольного волновода. Для этого воспользуемся ф-лой (15.3.12). Потери в диэлектрическом заполнении, если оно есть, можно рассчитать, используя ф-лу (15.3.9).

Согласно (14.1.14) квадрат модуля касательного к стенкам волновода вектора магнитного поля равен:

на широких стенках (при $y=0$ и $y=b$)

$$|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2}{\gamma_\perp^4} E_{0z}^2 \gamma_y^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a}\,; \qquad (15.4.8)$$

на узких стенках (при $x=0$ и $x=a$)

$$|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2}{\gamma_\perp^4} E_{0z}^2 \gamma_x^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b}\,. \qquad (15.4.9)$$

Подставляя (15.4.8) и (15.4.9) в ф-лу (15.3.12), получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2\, dl = \frac{2\,\omega^2 \varepsilon_a^2}{\gamma_\perp^4} E_{0z}^2 \left\{ \gamma_y^2 \int\limits_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a}\, dx + \gamma_x^2 \int\limits_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b}\, dy \right\} =$$

$$= \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2}{\gamma_\perp^4} E_{0z}^2 (a\gamma_y^2 + b\gamma_x^2). \qquad (15.4.10)$$

Поток энергии $P^E_{\text{ср}}$ был вычислен выше и описывается ф-лой (15.4.4). После подстановки (15.4.4) и (15.4.10) в (15.3.12), приходим к выражению

$$\alpha^E = \frac{2R_S}{Z_c^E}\,\frac{a\gamma_y^2 + b\gamma_x^2}{\gamma_\perp^2\, ab}\,. \tag{15.4.11}$$

ЗАТУХАНИЕ МАГНИТНЫХ ВОЛН

У волн H согласно (14.1.23) и (14.1.24):
на широких стенках

$$|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 = H_{0z}^2\left(\cos^2\frac{m\pi x}{a} + \frac{\beta^2\gamma_x^2}{\gamma_\perp^4}\sin^2\frac{m\pi x}{a}\right); \tag{15.4.12}$$

на узких стенках

$$|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 = H_{0z}^2\left(\cos^2\frac{n\pi y}{b} + \frac{\beta^2\gamma_y^2}{\gamma_\perp^4}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{15.4.13}$$

Подставляя (15.4.12), (15.4.13) и (15.4.5) в (15.3.12), после интегрирования и несложных преобразований получаем

$$\alpha^H = \begin{cases} \dfrac{R_S}{bZ_c\sqrt{1-\left(\dfrac{m\lambda}{2a}\right)^2}}\left[1+\dfrac{2b}{a}\left(\dfrac{m\lambda}{2a}\right)^2\right] & m\geqslant 1,\ n=0; \\[2ex] \dfrac{R_S}{aZ_c\sqrt{1-\left(\dfrac{n\lambda}{2b}\right)^2}}\left[1+\dfrac{2a}{b}\left(\dfrac{n\lambda}{2b}\right)^2\right] & m=0,\ n\geqslant 1 \\[2ex] \dfrac{2R_S}{abZ_c}\,\dfrac{\left\{a\left[\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2+\left(\dfrac{m\lambda_{\text{кр}}}{2a}\right)^2\right]+b\left[\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2+\left(\dfrac{n\lambda_{\text{кр}}}{2b}\right)^2\right]\right\}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} & m\geqslant 1,\ n\geqslant 1 \end{cases} \tag{15.4.14}$$

На рис. 15.4.1 показан график зависимости коэффициента затухания от частоты при неизменных размерах поперечного сечения волновода. Как видно из рисунка и следует из (15.4.11) и (15.4.14), потери в волноводе резко возрастают при приближении частоты к критической. Это свойство, характерное для всех металлических волноводов, вытекает из концепции парциальных волн. Действительно, у волн E и H парциальные волны

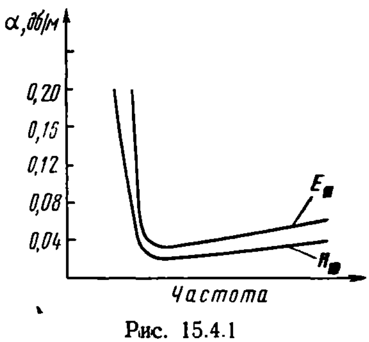


Рис. 15.4.1

распространяются по ломаным линиям, многократно отражаясь от поверхности металлических проводников. На частотах, близких к критической, угол падения парциальных волн на металлические поверхности мало отличается от нулевого. Но чем ближе угол падения к нулю, тем большее число отражений испытывают парциальные волны при своем движении на некотором отрезке линии. При каждом отражении часть энергии электромагнитной волны теряется из-за неидеальной проводимости металла. Поэтому потери в металлических проводниках линии, перенос энергии по которым осуществляется волнами E и H, растут по мере приближения к критической частоте. Вслед за резким падением затухания при удалении от критической частоты (рис. 15.4.1) снова начинается его монотонное возрастание, вызванное увеличением поверхностного сопротивления металла с ростом частоты.

Расчет по ф-лам (15.4.11) и (15.4.14) показывает, что минимальные потери в прямоугольном волноводе имеют место при передаче энергии волной H_{10}. Согласно (15.4.14) для этой волны

$$\alpha^{H_{10}} = \frac{R_S}{b Z_c} \frac{1 + \frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} . \tag{15.4.15}$$

Если размеры поперечного сечения волновода выбраны стандартными в соответствии с (15.4.3), то

$$\alpha^{H_{10}} \approx 1{,}4 \frac{R_S}{\lambda} \cdot 10^{-2} , \ \frac{неп}{м} , \tag{15.4.16}$$

где λ выражена в *см*.

Так как для меди $R_S \approx \frac{0{,}005}{\sqrt{\lambda}}$, то

$$\alpha^{H_{10}} \approx \frac{0{,}7}{\lambda \sqrt{\lambda}} \cdot 10^{-3} , \ \frac{дб}{м} . \tag{15.4.17}$$

Как следует из ф-лы (15.4.17), в коротковолновой части сантиметрового диапазона потери в стандартных волноводах весьма велики. Например, при $\lambda = 0{,}01$ *м* $\alpha^{H_{10}} = 0{,}7$ *дб/м*, т. е. при длине линии всего в 10 *м* потери энергии будут составлять 7 *дб* (четыре пятых входящей мощности). Объясняется это тем, что при заданной мощности уменьшение поперечных размеров волновода сопровождается возрастанием плотности поверхностного тока проводимости в его стенках, и соответственно возрастают потери. Поэтому на волнах порядка 1 *см* и короче применение прямоугольных волноводов целесообразно только в виде коротких отрезков. В некоторых случаях, чтобы уменьшить потери, размеры поперечного сечения волновода увеличивают по сравнению со стандартными.

15.5. Передача энергии по круглому волноводу

МОЩНОСТЬ, ПЕРЕНОСИМАЯ ПО ВОЛНОВОДУ

В круглом волноводе низшим типом волны, как было показано в разд. 14.2, является волна H_{11}, а первым высшим типом — волна E_{01}. Поэтому в соответствии с данными табл. 14.1 и 14.2 условие одноволновости (15.1.1) принимает вид

$$2{,}61\,a < \lambda < 3{,}41\,a, \tag{15.5.1}$$

откуда

$$\frac{\lambda}{2{,}61} > a > \frac{\lambda}{3{,}41}; \quad \xi = 1{,}3, \tag{15.5.2}$$

т. е. коэффициент широкополосности в одноволновом режиме у круглого волновода существенно ниже, чем у прямоугольного.

Мощность, переносимая электромагнитной волной по круглому волноводу, рассчитывается по ф-ле (13.10.14). Подставляя в нее выражение (14.2.4) для составляющей $\dot{E}_z$, получаем

$$P^E_{\text{ср}} = \frac{\beta^2 E^2_{0\,z}}{2\,Z^E_c\,\gamma^2_\perp} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} J^2_m(\gamma_\perp r)\cos^2 m(\varphi-\varphi_0)\,r\,dr\,r\,d\varphi =$$

$$= \frac{\beta^2 E^2_{0\,z}}{2\,Z^E_c\,\gamma^2_\perp} \int\limits_0^{2\pi}\cos^2 m(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi \cdot \int\limits_0^{a} J^2_m(\gamma_\perp r)\,r\,dr. \tag{15.5.3}$$

Входящие в (15.5.3) интегралы табличные и равны:

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 m(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{при} \quad m=0, \\ \pi & \text{при} \quad m\geqslant 1; \end{cases} \tag{15.5.4}$$

$$\int\limits_0^{a} J^2_m(\gamma_\perp r)\,r\,dr = \frac{a^2}{2}\,J'^2_m(\gamma_\perp a) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{m^2}{\gamma^2_\perp}\right) J^2_m(\gamma_\perp a). \tag{15.5.5}$$

В соответствии с граничным условием (14.2.7) $J_m(\gamma_\perp a)=0$, и поэтому

$$P^E_{\text{ср}} = (1+\delta_m)\,\frac{E^2_{0z}\,\pi a^2}{4\,Z^E_c}\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\Lambda}\right)^2 J'^2_m(\gamma_\perp a), \tag{15.5.6}$$

где

$$\delta_m = 1 \text{ при } m=0 \text{ и } \delta_m = 0 \text{ при } m\geqslant 1.$$

Подставляя в (13.10.15) выражение (14.2.9) для составляющей $\dot{H}_z$, получаем

$$P_{\text{ср}}^{H} = \frac{\beta^2 Z_c^H H_{0z}^2}{2\gamma_\perp^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} J_m^2(\gamma_\perp r) \cos^2 m(\varphi - \varphi_0)\, r dr\, d\varphi. \qquad (15.5.7)$$

Подынтегральное выражение в (15.5.7) то же самое, что и в (15.5.3). Однако для магнитных волн в соответствии с граничным условием (14.2.11) $J'_m(\gamma_\perp a) = 0$, и в (15.5.5) отлично от нуля второе слагаемое. Поэтому

$$P_{\text{ср}}^{H} = (1 + \delta_m) \frac{H_{0z}^2 Z_c^H \pi a^2}{4} \left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\Lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{m^2}{\gamma_\perp^2 a^2}\right) J_m^2(\gamma_\perp a). \qquad (15.5.8)$$

Если энергия по круглому волноводу переносится волной H_{11}, то предельно допустимую мощность можно увеличить вдвое, возбудив в нем одновременно две линейно поляризованные волны H_{11} со взаимно перпендикулярной поляризацией, сдвинутые по фазе друг относительно друга на 90°. Суперпозиция двух таких волн, как показано в разд. 9.3, соответствует волне с круговой поляризацией. Поэтому суммарный вектор электрического поля волн H_{11}, не меняя своей амплитуды, вращается в поперечной плоскости волновода. В результате максимальная напряженность электрического поля в волноводе будет такой же, как и при нахождении одной линейно поляризованной волны H_{11}.

ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН

Определим коэффициент затухания α, учитывающий потери энергии в стенках круглого волновода.

Согласно (14.2.5) и граничному условию (14.2.7) квадрат модуля вектора магнитного поля, касательного к стенкам волновода равен при $r = a$

$$|\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2}{\gamma_\perp^2} E_{0z}^2 J'^2_m(\gamma_\perp a) \cos^2 m(\varphi - \varphi_0), \qquad (15.5.9)$$

и поэтому интеграл в числителе ф-лы (15.3.12) равен

$$\oint\limits_\Gamma |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 dl = (1 + \delta_m) \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2}{\gamma_\perp^2} E_{0z}^2 \pi a J'^2_m(\gamma_\perp a). \qquad (15.5.10)$$

Подставляя (15.5.6) и (15.5.10) в (15.3.12), получаем

$$\alpha^E = \frac{R_S}{a Z_c} \frac{\Lambda}{\lambda}. \qquad (15.5.11)$$

Для магнитных волн согласно (14.2.9)—(14.2.11) при $r=a$

$$|\dot{H}_m^0|^2 = H_{0z}^2 J_m^2(\gamma_\perp a)\left[\frac{m^2\beta^2}{a^2\gamma_\perp^4}\sin^2 m(\varphi-\varphi_0)+\cos^2 m(\varphi-\varphi_0)\right]. \quad (15.5.12)$$

Выполнив необходимые преобразования, получаем

$$\alpha^H=\frac{R_S}{aZ_c}\frac{\Lambda}{\lambda}\left[\frac{m^2}{(\nu_{mn}^H)^2-m^2}+\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right]. \quad (15.5.13)$$

На рис. 15.5.1 показан график зависимости коэффициента затухания от частоты при неизменных размерах поперечного сечения волновода.

Одним из основных типов волн, используемых при передаче энергии по круглому волноводу, является волна H_{11}. Коэффициент затухания этой волны согласно (15.5.13) и (15.3.13) равен

$$\alpha^{H_{11}}=\sqrt{\frac{\pi f\mu_a}{\sigma}}\frac{1}{aZ_c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{3,41a}\right)^2}}\left[0,42+\left(\frac{\lambda}{3,41a}\right)^2\right]. \quad (15.5.14)$$

Если выбрать радиус волновода в соответствии с (15.5.2), то, как показывает расчет по ф-ле (15.5.14), затухание в волноводе оказывается относительно большим. Для уменьшения потерь увеличивают радиус волновода, допуская возможность распространения волн более высокого порядка. В частности, в СССР широко применяют волноводы, имеющие диаметр порядка длины волны ($2a\approx\lambda$). В таких волноводах, помимо волны H_{11} возможно распространение волны E_{01}, для подавления которой вводят специальные фильтры.

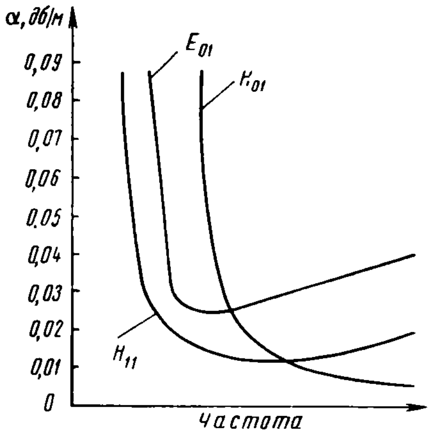


Рис. 15.5.1

Как видно из рис. 15.5.1, у волны H_{01} в круглом волноводе затухание монотонно уменьшается по мере увеличения частоты. Подобная зависимость объясняется тем, что у волны H_{01} вектор поверхностного тока проводимости в стенках волновода не имеет продольной составляющей (см. разд. 14.3). Поперечная составляющая тока проводимости возбуждается продольной составляющей $\dot{H}_z$ магнитного поля. При повышении частоты в волноводе с неизменными размерами структура поля любой волны приближается к структуре поля волны TEM, у которой $\dot{H}_z=0$ (см. разд. 13.8). Следовательно, у волны H_{01} при повышении частоты $\dot{H}_z \to 0$ и одновременно стремится к нулю плотность поперечных токов проводимости. Но это означает, что потери должны непрерывно уменьшаться. Как показывает численный расчет, потери в круглом волноводе на волне H_{01} меньше потерь в волноводе того же радиуса на волне H_{11}, если только $a/\lambda>2$, а существенный выигрыш достигается при $a/\lambda \geqslant 3 \div 4$. Волновод подобного радиуса имеет приемлемые габариты и вес на волнах короче 1—3 *см*. Следовательно, применение круглого волновода с волной H_{01} целесообразно в коротковолновой части сантиметрового и в миллиметровом диапазоне волн. Расчет по ф-ле (15.5.13) показывает, что в подобных волноводах из меди затухание не должно превышать 1—2 *дб/км*. Поэтому круглые волноводы с волной H_{01} пригодны для передачи широкополосных сигналов на большие расстояния.

По волноводу диаметром 60 *мм* можно, например, одновременно передавать с малыми потерями спектр частот от 35 ($\lambda \approx 8{,}6$ *мм*) до 100 *Ггц* ($\lambda=3$ *мм*), т. е. рабочая полоса линии связи составляет 65 *Ггц* (65 000 *Мгц*). При импульсно-кодовой модуляции на один телевизионный канал отводится полоса частот порядка 270 *Мгц*. Следовательно, по такой линии можно транслировать одновременно около 240 телевизионных программ либо около 300 000 телефонных разговоров.

При радиусе $R \geqslant (3 \div 4)\lambda$ в круглом волноводе, помимо H_{01} могут распространяться свыше 100 других типов волн. В связи с этим весьма сложной проблемой является предотвращение преобразования волны H_{01} в волны другого типа. Небольшая по величине, но неизбежно меняющаяся вдоль оси волновода эллиптичность поперечного сечения, малые изгибы стенок, небольшие изменения размеров поперечного сечения вдоль длины волновода — все это вызывает искажения структуры поля волны H_{01}. Но любое искажение структуры поля означает, что, кроме волны H_{01}, в волноводе возникают другие типы волны, т. е. под влиянием неоднородностей часть энергии волны H_{01} переходит в энергию других типов волн, имеющих значительно больший коэффициент затухания. Поэтому преобразование ведет к увеличению общего затухания волны H_{01} в волноводе. Кроме того, у вновь образовавшихся типов волн групповая скорость отлична от групповой скорости волны H_{01}, и часть энергии этих волн на неоднородностях преобразуется снова в энергию волны H_{01}. Возникает так называемый попутный поток, являющийся источником шумов и приводящий иногда к значительным искажениям передаваемого сигнала. Чтобы ослабить эти неприятные явления, при изготовлении и монтаже волноводов приходится соблюдать чрезвычайно жесткие допуски. Кроме того, на внутреннюю поверхность медного волновода наносят тонкую (около 0,1 *мм*) диэлектрическую пленку. Введение пленки приводит к существенному увеличению затухания на всех волнах, кроме волн H_{0n}, и, в частности, волны

H_{01}. Это объясняется тем, что у волн H_{01} амплитуда электрического поля вблизи стенок волновода существенно ниже, чем у других типов волн. Волноводы с диэлектрическим покрытием менее чувствительны к малым неоднородностям, что позволяет снизить требования к точности их изготовления и монтажу.

Еще один метод устранения паразитных волн основан на различии в структуре токов проводимости волн H_{01} и всех остальных типов волн. У вектора тока проводимости волны H_{01}, как было

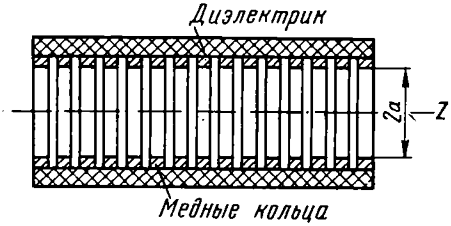


Рис. 15.5.2

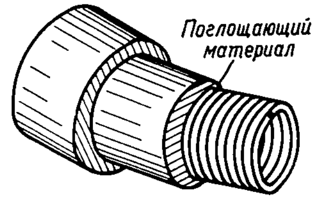


Рис. 15.5.3

показано в разд. 14.3, отсутствует продольная составляющая. Поэтому нормальное распространение этой волны возможно в волноводе, состоящем из металлических и диэлектрических колец, чередующихся друг с другом (рис. 15.5.2). Если зазор между металлическими кольцами значительно меньше длины волны, то дополнительными потерями на излучение энергии через эти зазоры можно пренебречь. Аналогичными свойствами, очевидно, обладает любая из волн H_{0n}. Так как для распространения всех типов волн, кроме H_{0n}, необходима продольная составляющая тока проводимости, то в таком волноводе их распространение невозможно. Аналогичными свойствами обладает спиральный волновод (рис. 15.5.3). Если шаг спирали сделать достаточно малым, то величина коэффициента затухания в спиральном волноводе оказывается лишь на 20—30% выше, чем в обычном металлическом волноводе.

15.6. Волноводы сложной формы

Одноволновый режим в стандартном прямоугольном волноводе, как было показано в разд. 15.4, сохраняется в двукратной полосе частот. Однако используемый на практике диапазон частот обычно не превышает полуторакратного, поскольку в области частот, близких к критической, велики тепловые потери и мала допустимая мощность.

В значительно более широкой полосе частот можно сохранить одноволновый режим у изображенных на рис. 15.6.1 и рис. 13.1.1з $П$- и $Н$-волноводов. Если так подобрать поперечные размеры этих волноводов, чтобы коэффициент их широкополосности был равен коэффициенту широкополосности прямоугольного волновода, то как H, так и $П$-волновод будут иметь меньшие габариты, чем прямоугольный волновод. На рис. 15.6.2 и 15.6.3 показана структура электрического поля соответственно волн H_{10} и H_{20} в поперечном сечении $П$-волновода. Эти волны условно названы H_{10} и H_{20}. Основанием для этого является то, что при плавном уменьшении высоты ребра они постепенно преобразуются в волны H_{10} и H_{20} прямоугольного волновода.

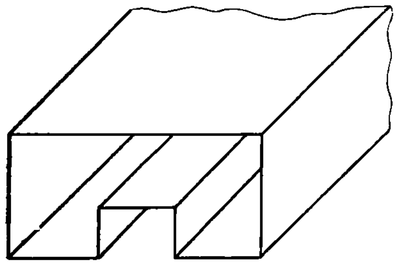


Рис. 15.6.1

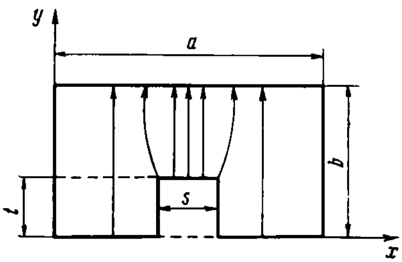


Рис. 15.6.2

При равных размерах a и b расширение рабочей полосы частот у H и $П$-волноводов по сравнению с прямоугольным достигается за счет того, что они имеют практически равные критические частоты для волны H_{20}, а критическая частота для волны H_{10} в H- и $П$-волноводах существенно ниже, чем в прямоугольных. Сказанное можно объяснить следующим образом. Ребро (или ребра у H-волновода) находится в пучности напряженности электрического поля волны H_{10}, где концентрация электромагнитного поля относительно велика. Наличие ребра приводит к еще большей концентрации поля и энергии в этом месте. Поэтому свойства волны и, в частности, критическая частота определяются в основном структурой поля в зазоре. Пока отношение ширины ребра s (рис. 15.6.2) к ширине волновода a не превышает 0,2÷0,3, энергия электрического и магнитного полей вблизи боковых стенок волновода мала. Невелика амплитуда парциальных волн, отражающихся в соответствии с концепцией парциальных волн от боковых стенок волновода, и мала продольная составляющая $\dot{H}_z$ магнитного поля. Распространяющаяся в $П$-волноводе волна близка по структуре к волне TEM. Поэтому введение ребра приближает структуру волны H_{10} к структуре волны TEM и приводит к понижению[1]) критиечской частоты волны H_{10}.

Чем больше высота t ребра, т. е. чем ближе отношение t/b к единице, тем выше концентрация поля в зазоре и тем, следовательно, ниже критическая частота волны H_{10}. В то же время влияние относительно узкого ($s/a \leqslant 0{,}2 \div 0{,}3$) ребра (или ребер в

[1]) Напомним, что у волны TEM $f_{кр}=0$ (см. разд. 13.5).

H-волноводе) на критическую частоту волны H_{20} незначительно, так как ребро вводится в сечение, где напряженность электрического поля волны H_{20} мала (рис. 15.6.3). Поэтому при $s/a \leqslant 0{,}2 \div \div 0{,}3$ коэффициент широкополосности ξ H- и Π-волноводов существенно выше, чем прямоугольного волновода с теми же размерами a и b (рис. 15.6.4). Дальнейшее увеличение отношения s/a приводит к уменьшению коэффициента широкополосности, так как боковые стенки волновода приближаются к краям ребер, возрастает энергия полей вблизи боковых стенок и увеличивается амплитуда парциальных волн, отражающаяся от них. Возрастает продольная составляющая $\dot{H}_z$ магнитного поля, повышается критическая частота волны H_{10}, уменьшается коэффициент широкополосности.

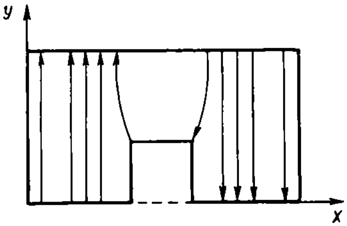


Рис. 15.6.3

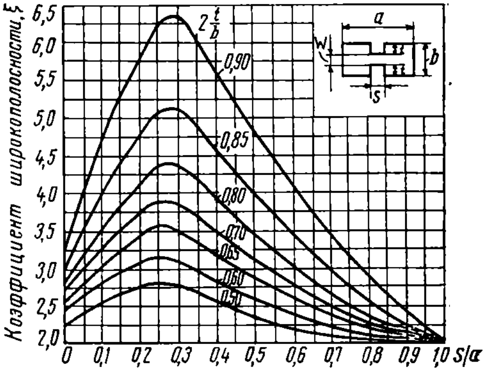


Рис. 15.6.4

Недостатком H- и Π-волноводов являются повышенный по сравнению с прямоугольным волноводом уровень потерь и пониженная электрическая прочность. Чем больше высота ребра t, тем меньше предельная мощность и выше потери. Поэтому обычно применяют H- и Π-волноводы с $\xi \leqslant 4$.

15.7. Передача энергии по коаксиальной линии

В коаксиальной линии одноволновый режим сохраняется, если согласно (14.4.15) $\lambda > \lambda_{\text{кр}}^{H_{11}}$. Подставляем вместо $\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}}$ его значение:

$$R_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) < \frac{\lambda}{\pi}. \tag{15.7.1}$$

Мощность, переносимая волной TEM по коаксиальной линии, в соответствии с (13.10.5) и (14.4.5) равна

$$P_{\text{ср}}^{TEM} = \frac{1}{2Z_c} \int\limits_{R_1}^{R_2} \int\limits_{0}^{2\pi} |\dot{E}_r|^2 r\, d r\, d\varphi = \frac{\pi E_0^2 R_1^2}{Z_c} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{15.7.2}$$

Максимальная напряженность электрического поля, как следует из выражения (14.4.5), имеет место у поверхности центрального проводника и определяется из соотношения (15.7.2)

$$E_0^2 = \frac{Z_c P_{\text{ср}}^{TEM}}{\pi R_1^2 \ln R_2/R_1}. \qquad (15.7.3)$$

Пользуясь ф-лой (15.7.3), определим оптимальное соотношение между R_1 и R_2, при котором напряженность электрического поля у поверхности центрального проводника минимальна, что соответствует передаче по коаксиальной линии максимально допустимой мощности. Для этого необходимо найти условия, когда знаменатель в выражении (15.7.3) достигает максимума. Полагая $R_2 = \text{const}$, дифференцируем знаменатель в (15.7.3) по R_1 и приравниваем производную нулю. В результате получаем следующее условие максимума знаменателя:

$$\ln R_2/R_1 = 0{,}5. \qquad (15.7.4)$$

Этому соотношению между R_2 и R_1 согласно (14.4.9) соответствует волновое сопротивление коаксиальной линии

$$Z_{\text{в}} = 30 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}},\ \textit{ом}. \qquad (15.7.5)$$

Подставляя (15.7.4) в (15.7.2) и учитывая, что для воздушного заполнения $E_0 \leqslant 30 \frac{\textit{кв}}{\textit{см}}$, находим предельную мощность, передаваемую по коаксиальной линии при воздушном заполнении:

$$P_{\text{пред}} \leqslant \frac{\pi E_0^2 R_1^2}{2 Z_c} \approx 3{,}75 R_1^2 \cdot 10^3,\ \textit{квт}, \qquad (15.7.6)$$

где величина R_1 выражена в *см*.

Так как согласно (15.7.4) $R_2/R_1 = \sqrt{e}$, то из условия одноволновости (15.7.1) определяем максимальный радиус центрального проводника $R_1 \leqslant 0{,}12\lambda$. При этом

$$P_{\text{пред}} \leqslant 54\,\lambda^2,\ \textit{квт}, \qquad (15.7.7)$$

где λ выражена в *см*.

В некоторых случаях представляет интерес определить отношение R_2/R_1, при котором разность потенциалов U между внутренним и внешним проводниками минимальна. Полагая $R_2 = \text{const}$, дифференцируем равенство (14.4.7) по R_1 и приравниваем производную нулю. После преобразований получаем $\ln R_2/R_1 = 1$, что соответствует волновому сопротивлению:

$$Z_{\text{в}} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},\ \textit{ом}. \qquad (15.7.8)$$

В соответствии с рекомендацией Международной электротехнической комиссии волновое сопротивление коаксиальной линии, предназначенной для передачи значительной мощности, выбирается равным 50 *ом* (при $\varepsilon=\mu=1$), что приблизительно соответствует полусумме значений, определяемых из (15.7.5) и (15.7.8).

Если пространство между центральным и внешним проводниками коаксиальной линии заполнено полностью или частично диэлектриком, то максимальная мощность, которую можно передать по линии, в несколько раз ниже, чем рассчитанная по ф-ле (15.7.7). Объясняется это как возможностью теплового пробоя диэлектрика, так и увеличением напряженности электрического поля в небольших (порядка $10^{-2}\div10^{-3}$ *см*) воздушных зазорах между диэлектриком и центральным проводниками коаксиальной линии, неизбежно возникающих даже при самом тщательном изготовлении линии. Можно показать, что напряженность электрического поля в зазоре в ε раз выше, чем максимальная напряженность в диэлектрике. Для предотвращения пробоя воздушного зазора предельная мощность должна быть уменьшена в ε^2 раз.

Потери в коаксиальной линии складываются из потерь в диэлектрике, заполняющем линию, и потерь в металлических проводниках. Таким образом, коэффициент затухания $\alpha=\alpha_д+\alpha_м$. При сплошном заполнении величина $\alpha_д$ находится из выражения (15.3.9). Если заполнение частичное, то величина $\alpha_д'$ приближенно может быть определена по формуле

$$\alpha_д' = \frac{V_д}{V_л}\,\alpha_д, \tag{15.7.9}$$

где $V_д$ — объем диэлектрического заполнения в коаксиальной линии единичной длины и $V_л$ — полный внутренний объем линии.

Определим затухание, обусловленное потерями в металлических проводниках. Амплитуда касательной составляющей магнитного поля согласно (14.4.6) равна на поверхности центрального проводника E_0/Z_c, а на внутренней поверхности внешнего проводника E_0R_1/Z_cR_2. Подставляем эти значения $|\dot{\mathbf{H}}_m^0|$ в ф-лу (15.3.12):

$$\oint\limits_{\Gamma} |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2\,dl = \frac{2\pi E_0^2 R_1^2}{Z_c^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{15.7.10}$$

Поэтому с учетом равенства (15.7.2) из (15.3.12) имеем

$$\alpha_м = \frac{R_s}{2Z_c R_2}\,\frac{1+R_2/R_1}{\ln R_2/R_1}\,. \tag{15.7.11}$$

Так как $R_1<R_2$, то бóльшая часть энергии теряется в центральном проводнике. Увеличение радиуса R_1 центрального проводника сопровождается уменьшением плотности поверхностного тока проводимости в этом проводнике и соответствующим уменьшением потерь. Однако, с другой стороны, увеличение R_1 при неизменной

величине R_2 влечет за собой понижение волнового сопротивления, что при заданной мощности приводит к увеличению тока в линии и соответствующему увеличению потерь. Поэтому следует ожидать существования оптимального соотношения между R_1 и R_2, при котором затухание, вызываемое потерями в металлических проводниках, минимально. Это соотношение определяется из условия, что $\partial\alpha_м/\partial R_1=0$. Дифференцируя (15.7.11), находим $R_2/R_1\approx 3{,}6$, что соответствует волновому сопротивлению $Z_в=77\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, *ом*.

Как показывает расчет по ф-лам (15.7.9) и (15.7.11), на волнах короче 10 *см* суммарное затухание $\alpha_д+\alpha_м$ в коаксиальной линии становится столь значительным по сравнению с затуханием в металлических волноводах, что на этих волнах применяют лишь короткие отрезки коаксиальной линии.

15.8. Передача энергии по полосковой линии

Одноволновый режим в полосковой линии сохраняется, если $\lambda>\lambda_{кр}$, где $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны первого высшего типа волн. Так как согласно (14.5.1) $\lambda_{кр}\approx 2a$, то необходимо, чтобы $a<\frac{\lambda}{2}$, где λ — длина волны в среде, заполняющей полосковую линию. Полосковая линия является направляющей системой открытого типа. Поэтому поперечные размеры линии выбираются так, чтобы подавляющая часть энергии концентрировалась в зазоре между центральным проводником и внешними пластинами. Это требование выполняется, когда $a\gg b$ и $c\gg b$.

Как показывает анализ и экспериментальные данные [12], по полосковой линии можно передавать мощности того же порядка, что и по коаксиальной линии. Для увеличения электрической прочности края центрального проводника следует закруглять. Как и в случае коаксиальной линии, при заполнении полосковой линии диэлектриком, предельная и допустимая мощности снижаются в ε^2 раз, где ε — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Получение точных выражений для коэффициента затухания, обусловленного потерями в проводниках полосковой линии, встречает определенные трудности. Как показывает расчет по приближенным формулам и результаты экспериментального исследования, потери в проводниках полосковой и коаксиальной линий примерно равны, если одинаковы их поперечные размеры. Потерями на излучение практически можно пренебречь, если размеры проводников выбраны, как указывалось выше. Затухание в диэлектрике, заполняющем линию, рассчитывается по ф-ле (15.3.9).

ГЛАВА 16

ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ. КРУГОВАЯ ДИАГРАММА ПОЛНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

16.1. Распространение электромагнитных волн в линиях передачи конечной длины

В предыдущих главах рассматривались регулярные линии передачи бесконечной длины. Реальные линии, очевидно, всегда имеют конечную длину. Пусть отрезок регулярной линии передачи включен между источником электромагнитных колебаний (генератором) и оконечным устройством, которое в дальнейшем будем называть нагрузкой (рис. 16.1.1). Предположим, что линия работает в одноволновом режиме.

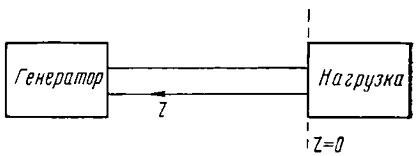


Рис. 16.1.1

Обрыв линии передачи и включение нагрузки в общем случае эквивалентны изменению граничных условий. В результате на конце линии образуется новая, соответствующая изменившимся граничным условиям структура электрических и магнитных полей, что, в свою очередь, влечет за собой изменение структуры полей во всей линии. Это изменение можно трактовать как появление в линии, кроме основной волны, бегущей к нагрузке (падающая волна), дополнительной волны, распространяющейся от конца линии к ее началу (отраженная волна), которая и является причиной изменения структуры полей в линии. Рассмотрим подробнее структуру отраженной волны.

В главе 14 было показано, что в однородных линиях передачи может существовать бесконечное число типов волн, отличающихся друг от друга структурой полей в поперечном сечении. Очевидно, что сколь угодно сложная по структуре отраженная электромагнитная волна, образовавшаяся после подключения нагрузки, должна быть суперпозицией этих волн. Однако при одноволновом режиме амплитуда волн всех типов, кроме низшего, экспоненциально убывает по мере удаления от места возбуждения. Поэтому на достаточно большом расстоянии от нагрузки (обычно порядка нескольких длин волн) структура поля отраженной волны в плоскости поперечного сечения линии практически не отличается от структуры волны низшего типа.

Если в месте включения нагрузки образуется такая структура поля, что в состав отраженной волны не входит волна низшего типа, то на достаточно большом расстоянии от нагрузки вообще не обнаружим отраженной волны. Из закона сохранения энергии вытекает, что вся энергия падающей волны поглощается в нагрузке, так как сама линия передачи предполагается без потерь. Говорят, что в этом случае линия идеально согласована с нагрузкой либо, что линия работает в режиме бегущей волны.

16.2. Коэффициент отражения. Коэффициент бегущей волны ($K_{бв}$) Коэффициент стоячей волны ($K_{св}$)

Падающая и отраженные волны в линии на достаточном удалении от места включения нагрузки являются волнами одного типа. Поэтому безразмерный коэффициент p_E, вводимый равенством

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp отр} = p_E \dot{\mathbf{E}}_{\perp пад}\,, \tag{16.2.1}$$

является функцией только координаты z и носит название коэффициента отражения электрического поля.

Совместим начало системы координат ($z=0$) с тем сечением линии, где нарушается ее регулярность, полагая, что положительным значениям z соответствует перемещение от конца линии к ее началу (рис. 16.1.1). Если принять фазу падающей волны нулевой в точке $z=0$, то согласно (13.3.1)

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp пад} = \dot{\mathbf{E}}_{\perp s пад}\, e^{i\beta z}\,; \quad \dot{\mathbf{E}}_{\perp отр} = \dot{\mathbf{E}}_{\perp s\, отр}\, e^{-i\beta z}\,. \tag{16.2.2}$$

Подставляя (16.2.2) в (16.2.1), находим

$$p_E = p_H\, e^{-2i\beta z}\,, \tag{16.2.3}$$

где комплексная величина

$$p_H = |\,p_H\,|\, e^{i\varphi} \tag{16.2.4}$$

равна коэффициенту отражения, измеренному в сечении $z=0$, где включена нагрузка. Величина $p_н$ называется коэффициентом отражения от нагрузки.

Коэффициент отражения можно также ввести по напряженности магнитного поля с помощью равенств

$$\dot{\mathbf{H}}_{\perp отр} = p_м\, \dot{\mathbf{H}}_{\perp пад}; \quad p_м = -p_E\,. \tag{16.2.5}$$

Различие в знаке между $p_м$ и p_E объясняется тем, что падающая и отраженная волны имеют взаимопротивоположное направление распространения. Везде ниже под коэффициентом отражения будет подразумеваться величина p_E. Поэтому для упрощения записи нижний индекс опускается.

Полная напряженность поперечных составляющих электрического и магнитного полей в некотором сечении линии передачи есть алгебраическая сумма поперечных составляющих электрического и магнитного полей падающей волны и отраженной:

$$\dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{\perp пад} + \dot{E}_{\perp отр} = \dot{E}_{\perp пад}(1 + p); \tag{16.2.6}$$

$$\dot{H}_{\perp} = \dot{H}_{\perp пад} + \dot{H}_{\perp отр} = \dot{H}_{\perp пад}(1 - p). \tag{16.2.7}$$

На рис. 16.2.1 представлена зависимость от координаты z нормированных по отношению к падающей волне амплитуд величин $\dot{E}_{\perp}$ и $\dot{H}_{\perp}$, равных согласно (16.2.6), (16.2.7), (16.2.3) и (16.2.4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{|\dot{E}_{\perp}|}{|\dot{E}_{\perp пад}|} &= \sqrt{1 + |p|^2 + 2|p|\cos(2\beta z - \varphi)} \\ \frac{|\dot{H}_{\perp}|}{|\dot{H}_{\perp пад}|} &= \sqrt{1 + |p|^2 - 2|p|\cos(2\beta z - \varphi)} \end{aligned}\right\}. \tag{16.2.8}$$

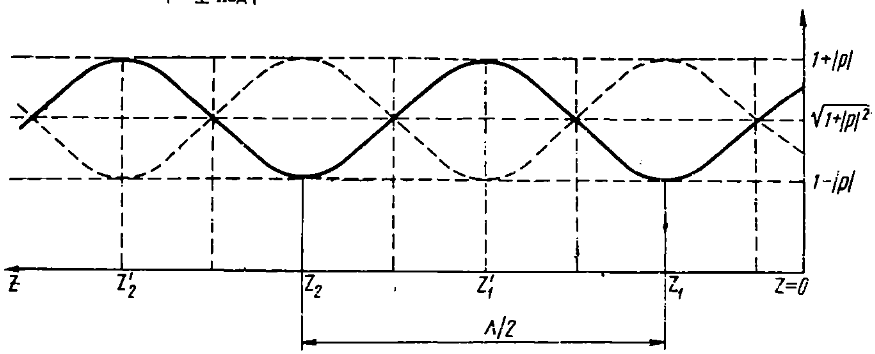


Рис. 16.2.1

Как видно из кривых на рис. 16.2.1, напряженность электрического поля достигает минимума, равного $1 - |p|$, в точках, где $\cos(2\beta z_n - \varphi) = -1$, т. е. при

$$2\beta z_n = (2n - 1)\pi + \varphi, \tag{16.2.9}$$

и максимума, равного $1 + |p|$, когда $\cos(2\beta z'_n - \varphi) = 1$, т. е. при

$$2\beta z'_n = 2(n - 1)\pi + \varphi. \tag{16.2.10}$$

В формулах (16.2.9) и (16.2.10) число n — порядковый номер узла или максимума, причем первый номер присваивается ближайшим к концу линии узлу и максимуму. Расстояние между соседними максимумами или минимумами всегда одно и то же и равно половине длины волны, соответствующей распространяющемуся типу волны (рис. 16.2.1). Отметим, что из равенства (16.2.9) можно определить фазу φ коэффициента отражения от нагрузки, полатая известным (например, из эксперимента) расстояние z_n:

$$\varphi = 2\beta z_n - (2n-1)\pi. \qquad (16.2.11)$$

Подставляя (16.2.11) и (16.2.4) в (16.2.3), получаем

$$p = -\,|\,p\,|\,e^{-2i\beta(z-z_n)} = -\,|\,p\,|\,e^{-i\psi}. \qquad (16.2.12)$$

Аналогично φ определяется из (16.2.10):

$$\varphi = 2\beta z_n' - 2(n-1)\pi. \qquad (16.2.13)$$

В этом случае

$$p = |\,p\,|\,e^{-2i\beta\left(z-z_n'\right)} = |\,p\,|\,e^{-i\psi'}. \qquad (16.2.14)$$

Отношение минимального значения амплитуды электрического (или магнитного) поля к максимальному значению амплитуды того же поля (рис. 16.2.1) называют *коэффициентом бегущей волны ($K_{бв}$)*:

$$K_{бв} = \frac{1-|\,p\,|}{1+|\,p\,|}. \qquad (16.2.15)$$

min / max

На практике часто пользуются понятием *коэффициента стоячей волны ($K_{св}$)*, равного

$$K_{св} = \frac{1}{K_{бв}} = \frac{1+|\,p\,|}{1-|\,p\,|}. \qquad (16.2.16)$$

В идеально согласованной линии, очевидно, $|p|=0$ и соответственно $K_{бв}=K_{св}=1$. При полном отражении амплитуды отражений и падающей волн равны, поэтому $|p|=1$, $K_{бв}=0$ и $K_{св}=\infty$.

16.3. Аналогия между произвольной линией передачи и длинной линией[1]

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В длинной линии, как известно, процесс передачи энергии имеет волновой характер. В главе 13 было показано, что аналогичный процесс передачи энергии существует в любой линии передачи. Теория длинных линий основывается на концепции падающих и отраженных волн напряжения и тока. Весьма близкие по смыслу понятия были введены в предыдущем разделе, причем на конструкцию линии передачи и тип волны в ней не накладывалось никаких ограничений. *Достаточно, чтобы линия передачи работала в одноволновом режиме.* Напряжение и ток в длинной линии рассматриваются как алгебраическая сумма напряжений и токов па-

[1] Под длинной линией подразумевается двухпроводная линия, свойства которой хорошо известны из курса теоретических основ электротехники.

дающей и отраженной волн. Буквально так же определялась в предыдущем разделе напряженность электрического и магнитного полей в некотором сечении произвольной линии передачи. Если сравнить кривые на рис. 16.2.1 с аналогичными кривыми, характеризующими распределение напряжения и тока в длинной линии, то, предположив, что в длинной линии коэффициент распространения равен коэффициенту распространения волны в линии передачи, мы не заметим абсолютно никакой разницы. Столь значительное сходство основных процессов в длинной линии и в произвольной линии передачи, работающей в одноволновом режиме, позволяет использовать при анализе линий передачи конечной длины основные понятия теории длинных линий.

НОРМИРОВАННОЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ. НОРМИРОВАННОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ НАГРУЗКИ

Отношение напряжения $\dot{U}$ к току $\dot{I}$ в произвольном сечении длинной линии равно эквивалентному сопротивлению линии в этом сечении:

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}_{\text{пад}}+\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}+\dot{I}_{\text{отр}}}=Z_{\text{в}}\frac{1+p_U}{1-p_U}, \tag{16.3.1}$$

где $Z_{\text{в}}$ — волновое сопротивление длинной линии, равное отношению $\dot{U}_{\text{пад}}/\dot{I}_{\text{пад}}$, и p_U — коэффициент отражения напряжения.

Разделив обе части равенства (16.3.1) на $Z_{\text{в}}$, получим нормированное эквивалентное сопротивление длинной линии:

$$Z'=\frac{Z}{Z_{\text{в}}}=\frac{1+p_U}{1-p_U}. \tag{16.3.2}$$

В произвольной линии передачи коэффициенту p_U соответствует коэффициент p_E. Поэтому нормированным эквивалентным сопротивлением произвольной линии передачи назовем безразмерную величину

$$Z'=\frac{1+p_E}{1-p_E}. \tag{16.3.3}$$

В режиме бегущей волны ($p_E=0$) нормированное сопротивление произвольной линии, как следует из ф-лы (16.3.3), равно единице. Во всех сечениях линий, где амплитуда напряженности электрического поля максимальна или минимальна, линия имеет чисто активное сопротивление, равное

$$R'_{\text{мин}}=\frac{1-|p|}{1+|p|}\leqslant 1; \tag{16.3.4}$$

$$R'_{\text{макс}}=\frac{1+|p|}{1-|p|}=\frac{1}{R'_{\text{мин}}}\geqslant 1. \tag{16.3.5}$$

Сравнивая (16.3.4) и (16.3.5) с (16.2.15) и (16.2.16), замечаем, что $R'_{\text{макс}}=K_{\text{св}}$ и $R'_{\text{мин}}=K_{\text{бв}}$. Подставляя в (16.3.3) выражение (16.2.3) и (16.2.12), получаем

$$Z'=\frac{1+p_H\ e^{-2i\beta z}}{1-p_H\ e^{-2i\beta z}}=\frac{1-|p|\ e^{-i\psi}}{1+|p|\,e^{-i\psi}}. \tag{16.3.6}$$

Об изменении нагрузки на конце линии можно судить по изменению модуля и фазы комплексного коэффициента отражения. Это позволяет сопоставить с помощью ф-лы (16.3.6) каждому значению коэффициента отражения в линии некоторое нормированное эквивалентное сопротивление на конце линии передачи, которое естественно назвать сопротивлением нагрузки. Так как предполагается, что нагрузка расположена в сечении $z=0$, то из (16.3.6) получаем

$$Z'_H=\frac{1+p_H}{1-p_H}. \tag{16.3.7}$$

Выразив с помощью ф-лы (16.3.7) $p_{\text{н}}$ через Z'_H и подставив $p_{\text{н}}$ в (16.3.6), находим связь между Z'_H и Z':

$$Z'=\frac{Z'_H+i\operatorname{tg}\beta z}{1+i Z'_H\operatorname{tg}\beta z}. \tag{16.3.8}$$

Величина, обратная нормированному эквивалентному сопротивлению линии, называется *нормированной эквивалентной проводимостью,* т. е.

$$Y'=\frac{1}{Z'}=\frac{1-p}{1+p}. \tag{16.3.9}$$

Аналогично определяется величина

$$Y'_H=\frac{1}{Z'_H}=\frac{1-p_H}{1+p_H}. \tag{16.3.10}$$

ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ПО НАПРЯЖЕНИЮ И ТОКУ

При анализе различных устройств, выполненных из отрезков линий передачи, во многих случаях оказывается полезным по аналогии с длинной линией ввести понятие волнового сопротивления, как отношение напряжения к току в линии в режиме бегущей волны. Для линий передачи, в которых энергия переносится волной *TEM,* такая величина была определена без всяких затруднений (см. гл. 14), что объясняется потенциальным характером поля этой волны. У волн *E* и *H* электрические и магнитные поля имеют вихревой характер. При этом величина контурного интеграла от напряженности электрического поля, который равен напряжению, или контурного интеграла от напряженности магнитного поля, который равен току, зависит не только от положения начальной и конечной точек контура интегрирования, но и от формы контура, что не позволяет установить однозначное соответствие между напряжением и током и напряженностью полей в линии. Чтобы устранить эту трудность, обычно заранее оговаривают форму контура в этих интегралах.

Рассмотрим подробнее, как определяется $Z_в$ на примере волны H_{10} в прямоугольном волноводе. Продольные токи, текущие в противоположных направлениях на обеих широких стенках, могут рассматриваться как токи, эквивалентные току в длинной линии. Величина этого тока равна [см. (14.1.27)]

$$\dot{I}=\int_0^a \dot{H}_x dx=-\frac{2\mathrm{i}\,\beta\, a^2}{\pi^2}H_{0z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}\,. \tag{16.3.11}$$

Напряжение можно определить, например, как разность потенциалов между центрами широких стенок волновода [см. (14.1.26)]:

$$\dot{U}=\int_0^b E_y\left(\frac{a}{2},\ z\right)dy=-\frac{\mathrm{i}\,\omega\mu_a\, a}{\pi}bH_{0z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}\,. \tag{16.3.12}$$

Следовательно,

$$Z_в^{H_{10}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{b}{a}\,Z_c^{H_{10}}\,. \tag{16.3.13}$$

Изменив форму контура либо методику определения напряжения и тока, можно прийти к другим значениям $Z_в^{H_{10}}$. Однако во всех случаях ф-ла (16.3.13) будет иметь вид $Z_в^{H_{10}}=A\frac{b}{a}Z_c^{H_{10}}$, где A — числовой коэффициент, зависящий от способа вычисления величин $\dot{U}$, $\dot{I}$. Неопределенность в выборе этого коэффициента существенного значения не имеет, так как при соединении отрезков линии важно знать отношение волновых сопротивлений отрезков, которое от величины A не зависит, а не конкретное значение каждого из них.

Формулой (16.3.13) широко пользуются для приближенного определения коэффициента отражения от стыка двух прямоугольных волноводов, у которых не совпадают размеры a и b.

16.4. Круговая диаграмма полных сопротивлений

Круговая диаграмма полных сопротивлений, изображенная на рис. 16.4.1, является графическим аналогом ф-лы (16.3.6). Чтобы убедиться в этом, перепишем равенство (16.3.6) в виде

$$Z'=\frac{1-(p_1-\mathrm{i}\,p_2)}{1+(p_1-\mathrm{i}\,p_2)}=R'+\mathrm{i}\,X', \tag{16.4.1}$$

где p_1 и p_2 — соответственно действительная и мнимая части комплексной величины $(-p)$, записанной в виде (16.2.12). После выделения в (16.4.1) действительной и мнимой частей получаем:

$$R' = \frac{1 - p_1^2 - p_2^2}{(1 + p_1)^2 + p_2^2}\,; \tag{16.4.2}$$

$$X' = \frac{2p_2}{(1 + p_1)^2 + p_2^2}\,. \tag{16.4.3}$$

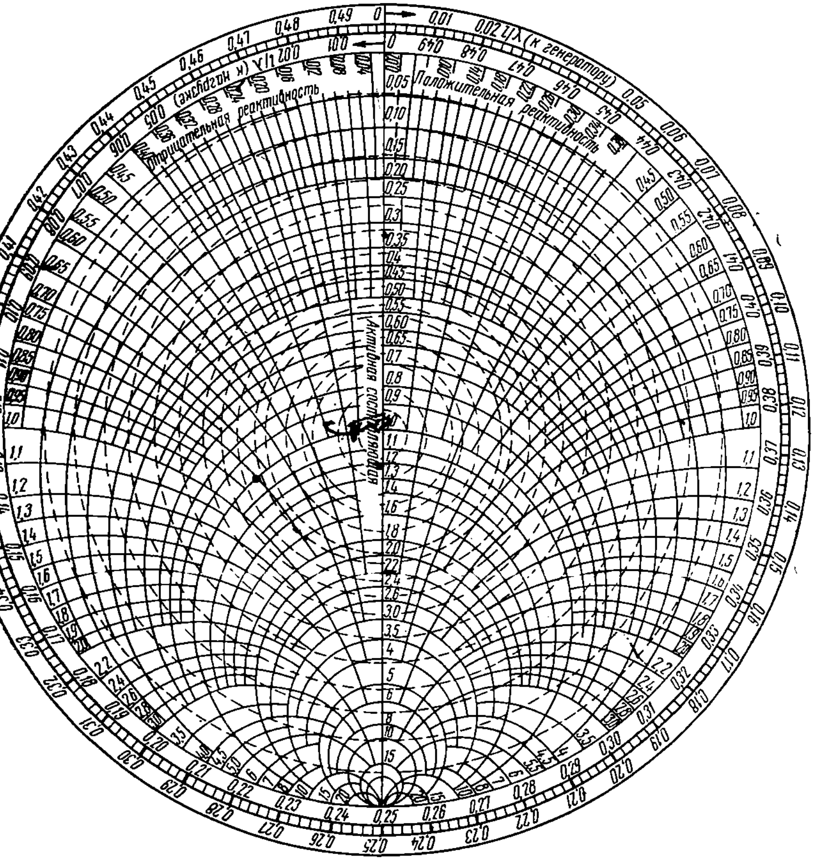


Рис. 16.4.1

Построим в плоскости комплексной переменной декартову систему координат (рис. 16.4.2). По оси абсцисс отложим величину p_2, а по оси ординат — величину p_1. Все точки, соответствующие данному модулю коэффициента отражения $|p|$, лежат на окружности, радиус которой равен $|p|$. После несложных преобразований (16.4.2) и (16.4.3) приходим к равенствам:

$$\left(p_1 + \frac{R'}{1+R'}\right)^2 + p_2^2 = \frac{1}{(1+R')^2}\ ; \qquad (16.4.4)$$

$$(p_1 + 1)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{X'}\right)^2 = \frac{1}{(X')^2}\ . \qquad (16.4.5)$$

Если рассматривать каждое из равенств (16.4.4) и (16.4.5) как уравнение некоторого семейства кривых, построенных в системе координат p_1, p_2, то, как следует из структуры этих равенств, оба семейства являются окружностями. Согласно (16.4.4) центры первой группы окружностей радиусом $1/1+R'$ расположены в точках с координатами $p_1 = -R'/1+R'$ и $p_2=0$, т. е. лежат на отрицательной полуоси p_1 (рис. 16.4.3). Согласно (16.4.5) центры второй группы окружностей радиусом $1/X'$ расположены в точках с координатами $p_1= -1$ и $p_2=1/X'$, т. е. лежат на перпендикуляре к оси p_1, проходящем через точку $p_1=-1$ (рис. 16.4.4). Если

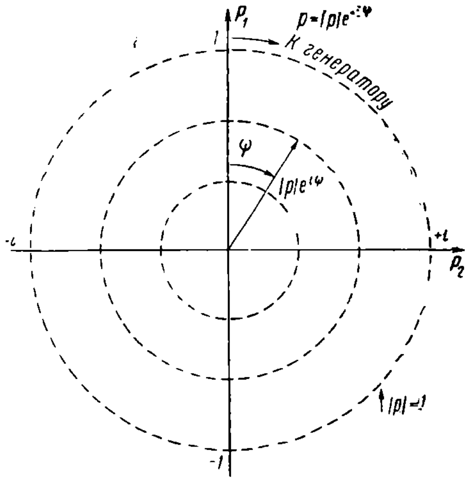


Рис. 16.4.2

реактивная часть полного сопротивления носит индуктивный характер, то $X'>0$. Поэтому окружности, соответствующие индуктивным сопротивлениям, располагаются в правой полуплоскости. Соответственно точки с емкостным сопротивлением лежат в левой полуплоскости. В пассивных цепях $|p|\leqslant 1$, и все решения ур-ния (16.4.1), расположенные вне круга $|p|=1$, следует отбросить, как не имеющие физического смысла. Совместив кривые, изображенные на рис. 16.4.3 и 16.4.4, приходим к круговой диаграмме полных сопротивлений, изображенной на рис. 16.4.1.

Началу отсчета на круговой диаграмме соответствует то сечение линии передачи, где располагается минимум амплитуды электрического поля, т. е. [см. (16.2.12)] $\psi=0$. На внешнем круге наносится величина $\Delta\psi/2\pi$, пропорциональная расстоянию от минимума амплитуды электрического поля в линии до точки, где определяется сопротивление:

$$\frac{\Delta\psi}{2\pi} = \frac{z - z_n}{\Lambda} = \frac{\Delta z}{\Lambda}\ . \qquad (16.4.6)$$

Положительным значениям $z—z_n$ соответствует перемещение от минимума к генератору ($z>z_n$), т. е. к началу линии, а отрицательным ($z<z_n$) — к нагрузке, т. е. к концу линии. Полному повороту **вектора** $|\rho|e^{-i\psi}$ в комплексной плоскости соответствует изменение угла ψ на 2π. Поэтому согласно (16.4.6) $\left|\frac{\Delta z_{макс}}{\Lambda}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. $0 \leqslant |\Delta z_{макс}| \leqslant \frac{\Lambda}{2}$.

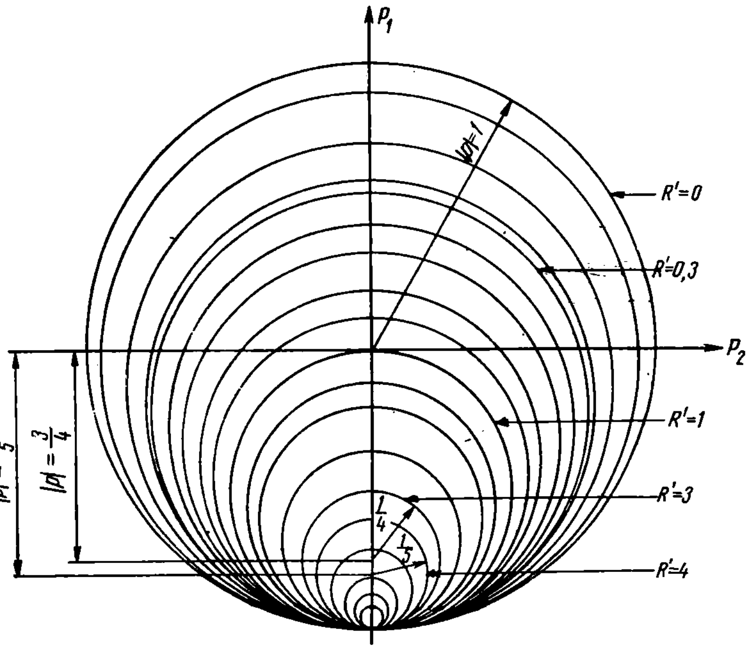


Рис. 16.4.3

Круговая диаграмма полных сопротивлений одновременно является круговой диаграммой полных проводимостей. Действительно, в соответствии с ф-лами (16.3.9) и (16.2.14)

$$Y' = \frac{1}{Z'} = \frac{1-|\rho|e^{-i\psi'}}{1+|\rho|e^{-i\psi'}}. \tag{16.4.7}$$

Сравнивая выражения (16.4.7) и (16.3.6), легко заметить, что они совпадают, если заменить в (16.4.7) ψ' на ψ. Но графическим аналогом (16.3.6) является круговая диаграмма полных сопротивлений на рис. 16.4.1. Следовательно, эта же диаграмма является графическим аналогом (16.4.7), когда фаза коэффициента отражения отсчитывается от сечения, где амплитуда напряженности электрического поля достигает максимума. При этом термин «реактивность» на круговой диаграмме рис. 16.4.1 необходимо везде заменить термином «проводимость». Как следует из равенств (16.2.12) и (16.2.14), переход от сопротивлений к проводимости

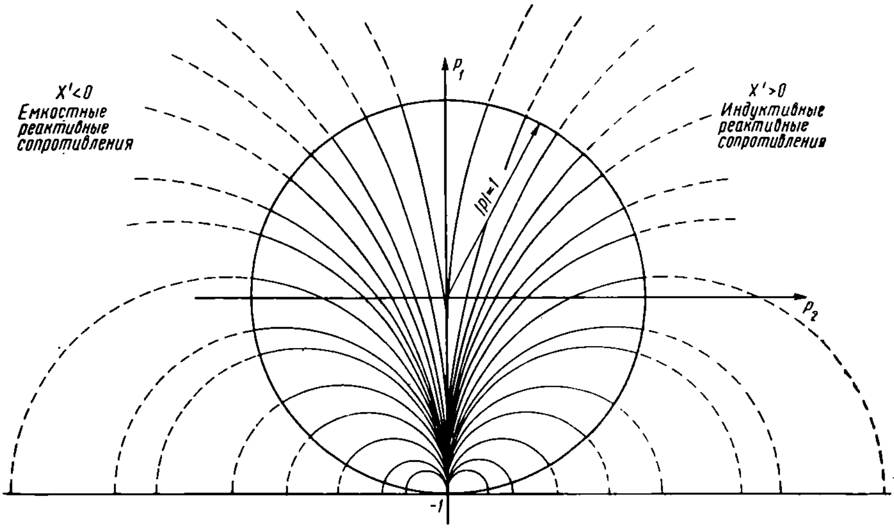


Рис. 16.4.4

соответствует повороту по круговой диаграмме на угол 180°. Следовательно, на круговой диаграмме точки, соответствующие Z'_H и $Y'_H = \dfrac{1}{Z'_H}$, лежат на противоположных концах диаметра окружности с центром в начале координат.

16.5. Волновые матрицы четырехполюсников

МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ И ПЕРЕДАЧИ

Предположим, что к нагрузке подключен не один отрезок однородной линии передачи, а два: один на входе (линия *1* на рис. 16.5.1) нагрузки, второй на ее выходе (линия *2* на рис. 16.5.1). Тогда, кроме волны, отраженной от входа нагрузки, появится волна, проходящая через нагрузку и поступающая в линию на выходе. Если предположить, что линии передачи на входе и выходе нагрузки работают в одноволновом режиме, то в сечениях *I* и *II* (рис. 16.5.1), достаточно удаленных от нагрузки, структура поля как отраженной в сечении *I*, так и прошедшей (в сечении *II*) волны практически не отличается от структуры волны низшего типа в каждой из линий передачи. Нагрузку, изображенную на рис.

16.5.1, можно представить в виде некоторого четырехполюсника (рис. 16.5.2), включенного в эквивалентную линию, который создает в этой линии точно такие же отраженную и прошедшую волны, что и нагрузка на рис. 16.5.1 в подключенных к ней отрезках

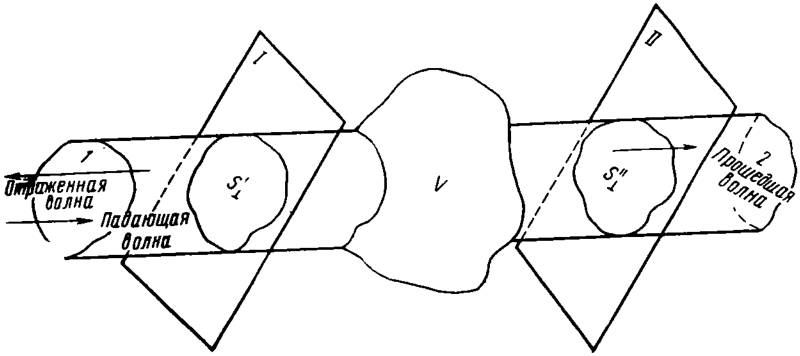


Рис. 16.5.1

линии передачи. Зажимы четырехполюсника расположены в сечениях *I* и *II*, где амплитуда высших типов волн пренебрежимо мала.

В общем случае в линии *2* может существовать отраженная волна, создаваемая нагрузкой, подключенной к ее концу. Эта волна, падающая на сечение *II* и характеризуемая напряженностью поля $\dot{E}_{II\,\text{пад}}$, частично проходит через четырехполюсник в линию *1*, образуя в ней волну, бегущую справа налево, и частично отражается, образуя в линии *2* волну, бегущую слева направо. Таким образом, как в линии *1*, так и в линии *2* волны, бегущие от четырехполюсника, являются суммой двух волн.

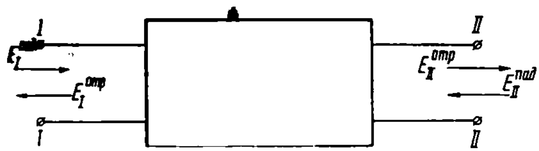


Рис. 16.5.2

Для характеристики четырехполюсников на сверхвысоких частотах обычно используют волновую матрицу рассеяния $\|S\|$ и волновую матрицу передачи $\|T\|$. Элементы матрицы рассеяния являются коэффициентами пропорциональности между амплитудами падающих и отраженных волн в граничных сечениях *I* и *II*, причем падающими считаются все волны, бегущие к четырехполюснику, а отраженными — все волны, выходящие из четырехполюсника (рис. 16.5.2):

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{I\,\text{отр}} &= s_{11}\dot{E}_{I\,\text{пад}} + s_{12}\dot{E}_{II\,\text{пад}} \\ \dot{E}_{II\,\text{отр}} &= s_{21}\dot{E}_{I\,\text{пад}} + s_{22}\dot{E}_{II\,\text{пад}} \end{aligned}\right\}; \qquad (16.5.1)$$

т. е.

$$\|S\| = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (16.5.2)$$

Нагрузим выход четырехполюсника (в сечении II) на неотражающее сопротивление. В этом случае $\dot{E}_{II\,пад}=0$ и

$$s_{11}=\frac{\dot{E}_{I отр}}{\dot{E}_{I пад}}=p;\quad s_{21}=\frac{\dot{E}_{II отр}}{\dot{E}_{I пад}}, \qquad (16.5.3)$$

т. е. s_{11} — коэффициент отражения от выхода четырехполюсника, а s_{21} — коэффициент передачи четырехполюсника, когда к его выходу подключена согласованная нагрузка.

Изменив направление движения энергии через четырехполюсник и нагрузив его вход на согласованную нагрузку, мы точно так же определим параметры s_{22} и s_{12}.

Элементы волновой матрицы передачи устанавливают связь между падающей и отраженной волнами на входе и выходе четырехполюсника:

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_{I\,пад}&=t_{11}\dot{E}_{II отр}+t_{12}\dot{E}_{II пад}\\ \dot{E}_{I отр}&=t_{21}\dot{E}_{II отр}+t_{22}\dot{E}_{II пад}\end{aligned}\right\}; \qquad (16.5.4)$$

т. е.

$$\|T\|=\left\|\begin{matrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{matrix}\right\|. \qquad (16.5.5)$$

Коэффициенты t_{11}, t_{12}, t_{21} и t_{22} можно найти из равенств, аналогичных (16.5.3). Решив систему (16.5.1) относительно $\dot{E}_{I\,пад}$ и $\dot{E}_{I\,отр}$ и сравнив полученные формулы с (16.5.4), получаем:

$$t_{11}=\frac{1}{s_{21}};\quad t_{22}=-\frac{s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21}}{s_{21}}; \qquad (16.5.6)$$

$$t_{12}=-\frac{s_{22}}{s_{21}};\ t_{21}=\frac{s_{11}}{s_{21}}.$$

Как видно, для коэффициента t_{11} можно дать простое физическое толкование. По смыслу квадрат модуля этого коэффициента равен коэффициенту затухания по мощности четырехполюсника, когда в сечении II включена согласованная нагрузка. Целесообразность введения матрицы передачи оправдывается тем, что, как известно из теории четырехполюсников, у цепочки последовательно включенных четырехполюсников матрица передачи есть произведение матриц передачи отдельных четырехполюсников. Поэтому анализ цепей, содержащих несколько включенных друг за другом неоднородностей, удобнее производить, используя матрицу $\|T\|$, а не $\|S\|$. Следует отметить, что равенства (16.5.1) и (16.5.4) верны, если линии 1 и 2 идентичны.

Большинство неоднородностей, вводимых в линии передачи, обладает обычно пренебрежимо малыми потерями, т. е. эквивалентные этим неоднородностям четырехполюсники можно рассматривать как чисто реактивные. В этом случае энергия, сосредоточенная в сходящихся к четырехполюснику волнах, должна быть равна энергии волн, отраженных от него, т. е.

$$|\dot{E}_{I\,пад}|^2+|\dot{E}_{II\,пад}|^2=|\dot{E}_{I\,отр}|^2+|\dot{E}_{II\,отр}|^2. \qquad (16.5.7)$$

Подставляя (16.5.1) в (16.5.7) и учитывая, что $|\dot{E}|^2=\dot{E}\overset{*}{\dot{E}}$, получаем

$$|\dot{E}_{I\,пад}|^2+|\dot{E}_{II\,пад}|^2=(|s_{11}|^2+|s_{21}|^2)|\dot{E}_{I\,пад}|^2+$$
$$+(|s_{12}|^2+|s_{22}|^2)|\dot{E}_{II\,пад}|^2+2\mathrm{Re}[(\overset{*}{s}_{11}s_{12}+\overset{*}{s}_{21}s_{22})\dot{E}_{I\,пад}\overset{*}{\dot{E}}_{II\,пад}]. \qquad (16.5.8)$$

При произвольных значениях $\dot{E}_{I\,пад}$ и $\dot{E}_{II\,пад}$ правая и левая части равенства (16.5.8) тождественно совпадают, если только

$$|s_{11}|^2+|s_{21}|^2=1; \quad |s_{12}|^2+|s_{22}|^2=1; \qquad (16.5.9)$$

$$\overset{*}{s}_{11}s_{12}+\overset{*}{s}_{21}s_{22}=0. \qquad (16.5.10)$$

Согласно (16.5.9) в реактивном четырехполюснике сумма мощностей прошедшей и отраженной волн всегда равна мощности падающей волны. Чтобы выяснить характер ограничений, вытекающих из выражений (16.5.10), перепишем (16.5.10) в виде

$$|s_{11}||s_{12}|\,e^{i(\varphi_{11}-\varphi_{12})}+|s_{21}||s_{22}|\,e^{i(\varphi_{21}-\varphi_{22})}=0, \qquad (16.5.11)$$

где $|s_{11}|$, $|s_{12}|$ и т. д. — модули элементов матрицы рассеяния, а φ_{11}, φ_{12} и т. д. — фазы тех же элементов. Легко проверить, что выполнение равенства (16.5.11) возможно, лишь когда

$$\varphi_{11}-\varphi_{12}=\pm(2n-1)\pi+(\varphi_{21}-\varphi_{22}) \quad (n=1,2,\ .\ .\ .) \qquad (16.5.12)$$

и

$$|s_{11}||s_{12}|-|s_{21}||s_{22}|=0. \qquad (16.5.13)$$

Совместное решение ур-ний (16.5.13) и (16.5.9) приводит к равенствам:

$$|s_{11}|=|s_{22}|; \quad |s_{12}|=|s_{21}|, \qquad (16.5.14)$$

т. е. модули коэффициента отражения и коэффициента передачи в реактивном четырехполюснике не зависят от направления движения энергии через четырехполюсник.

Реактивный четырехполюсник называется *взаимным*, если не только модуль, но и фаза коэффициента передачи не зависят от направления распространения энергии через четырехполюсник, т. е. во взаимном реактивном четырехполюснике

$$|s_{12}|=|s_{21}|; \quad \varphi_{12}=\varphi_{21}. \qquad (16.5.15)$$

С учетом (16.5.15) равенство (16.5.12) принимает вид

$$\varphi_{22}+\varphi_{11}=2\varphi_{12}\pm(2n-1)\pi. \qquad (16.5.16)$$

Подставляя равенства (16.5.9), (16.5.14) и (16.5.16) в (16.5.6), можно найти элементы матрицы передачи реактивных четырехполюсников.

Реактивный четырехполюсник называется *симметричным*, если

$$|s_{12}| = |s_{21}|; \quad \varphi_{12}=\varphi_{21}; \quad |s_{11}|=|s_{22}|; \quad \varphi_{11}=\varphi_{22}, \qquad (16.5.17)$$

т. е. модуль и фаза коэффициента передачи и отражения у симметричного реактивного четырехполюсника не зависят от направления движения энергии. С учетом (16.5.17) равенство (16.5.16) принимает вид

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} \pm (2n-1)\pi/2. \qquad (16.5.18)$$

Реактивный четырехполюсник называется *антиметричным*, если

$$|s_{12}| = |s_{21}|; \quad \varphi_{12}=\varphi_{21}; \quad |s_{11}| = |s_{22}|; \quad \varphi_{11}=\varphi_{22} \pm \pi, \qquad (16.5.19)$$

что позволяет записать (16.5.16) в виде

$$\varphi_{11}=\varphi_{12} \pm n\pi. \qquad (16.5.20)$$

Опираясь на равенства (16.5.12)—(16.5.20), нетрудно определить минимальное число вещественных параметров, полностью описывающих свойства реактивного четырехполюсника. В случае произвольного реактивного четырехполюсника такими параметрами могут быть $|s_{11}|$; φ_{11}; φ_{12}; φ_{21}, т. е. четыре параметра. Когда реактивный четырехполюсник взаимен, минимальное число независимых параметров снижается до трех. Симметрия либо антиметрия в реактивном взаимном четырехполюснике уменьшает число параметров до двух: ($|s_{11}|$ и φ_{11}), т. е. фактически до одного комплексного параметра $s_{11}=|s_{11}|e^{i\varphi_{11}}$.

Если четырехполюсник минимально фазовый, то его амплитудная и фазовая характеристики однозначно связаны. В этом случае реактивный взаимный минимально фазовый симметричный или антиметричный четырехполюсник полностью характеризуется одним действительным параметром ($|s_{11}|$ или φ_{11}).

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАССИВНЫЕ МНОГОПОЛЮСНИКИ

Совершенно аналогично описываются более сложные неоднородности, к которым присоединено более двух линий передачи. Если граничные плоскости проходят достаточно далеко от неоднородности и во всех линиях имеет место одноволновый режим, то такая неоднородность может быть заменена эквивалентным линейным пассивным многополюсником. Матрицы рассеяния и передачи многополюсника строятся по тому же принципу, что и четырехполюсника.

3. Линейные устройства свч

ГЛАВА 17

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

17.1. Неоднородности в линиях передачи

Неоднородностью является любой элемент или совокупность элементов, введение которых в регулярную линию передачи влечет за собой изменения в структуре поля волны, распространяющейся по линии. К неоднородностям относятся устройства, обеспечивающие возбуждение электромагнитных волн, согласующие устройства, т. е. устройства, предназначенные для устранения отраженной волны в линии, изогнутые отрезки линий передачи, плавные или ступенчатые переходы между линиями передачи, вращающиеся сочленения, разнообразные разветвления линий передачи, фильтрующие устройства и др.

В разделе 16.1 было отмечено, что структура поля до неоднородности и после нее является суперпозицией волн, которые могут существовать в регулярных линиях, подключенных к неоднородности. Так как число этих волн бесконечно, то и ряды, описывающие поля до и после неоднородности, в общем случае бесконечны. Следовательно, напряженность электрического поля до и после неоднородности описывается рядами вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{E}_n^{(1)} + \dot{E}_{\text{пад}} \\ \dot{E}^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dot{E}_n^{(2)} \end{aligned}\right\}, \qquad (17.1.1)$$

где a_n и b_n — амплитуды каждого из типов волн, который может существовать в линии до неоднородности $(\dot{E}_n^{(1)})$ и после нее $(\dot{E}_n^{(2)})$; $\dot{E}_{\text{пад}}$ — вектор электрического поля падающей на неоднородность волны.

Аналогичные разложения в ряды можно записать и для векторов магнитного поля.

объединяемые общим названием — возбуждающие устройства, имеют весьма разнообразную конструкцию. В большинстве случаев это различные модификации электрического вибратора (рис. 17.4.1), магнитного вибратора в виде рамки с током (рис. 17.4.2) или отверстия связи в общей стенке двух линий передачи (рис. 17.4.3).

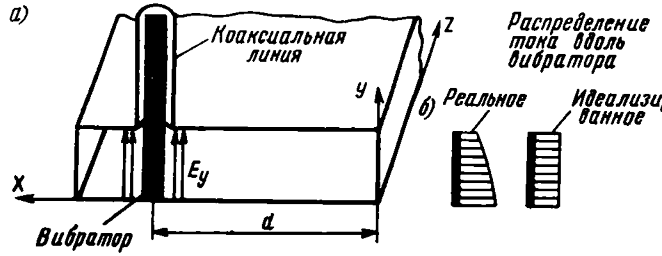


Рис. 17.4.1

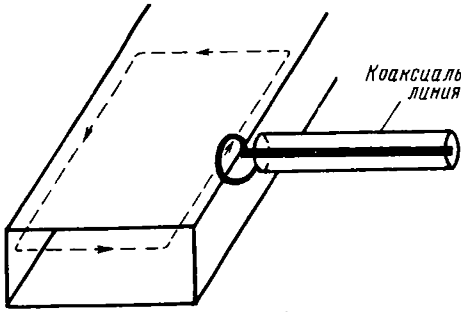


Рис. 17.4.2

Из теоремы единственности для уравнений Максвелла вытекает, что задание функции распределения сторонних источников и граничных условий на стенках линии передачи однозначно определяет структуру электрических и магнитных полей в линии. Так как перенос энергии по волноводам желательно осущест-

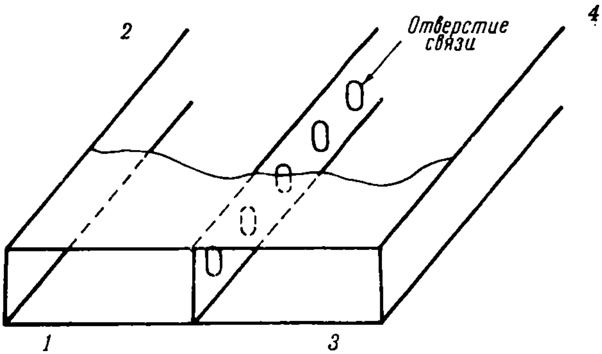


Рис. 17.4.3

влять одним типом колебания, то сторонние источники должны создавать в некотором поперечном сечении структуру электрических и магнитных полей, по возможности близкую к структуре полей волны желаемого типа. Это накладывает определенные ограничения на распределение сторонних источников, т. е. в конечном итоге на конструкцию возбуждающего устройства и его положение в линии.

Точное распределение сторонних источников в линии передачи, как правило, не известно, так как оно зависит не только от конструкции возбуждающего устройства, но и от формы волновода, структуры возбуждаемого колебания, местоположения возбуждающего устройства в линии и др. Учет влияния всех этих факторов на распределение источников чрезвычайно сложен. Поэтому законом распределения токов, зарядов или полей в сторонних источниках обычно задаются, исходя при этом из общих соображений, основанных на имеющемся большом опыте по определению распределения токов, зарядов и полей. Критерием правильности служит совпадение результатов анализа с экспериментальными данными.

Сформулируем основные требования, предъявляемые к возбуждающим устройствам:

— возбуждающее устройство должно обеспечивать эффективное возбуждение желаемого типа волны и, по возможности, должно затруднять возбуждение всех других типов волн;

— коэффициент отражения от входа возбуждающего устройства должен быть минимальным в нужной полосе частот;

— возбуждающее устройство должно иметь электрическую прочность, достаточную для пропускания необходимой мощности.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВИБРАТОР

Одна из возможных схем возбуждения прямоугольного волновода электрическим вибратором изображена на рис. 17.4.1*а*. Как видно из рисунка, вибратор одним концом подключен к центральному проводнику коаксиальной линии, а второй его конец соединен с нижней стенкой волновода. Поэтому в первом приближении вибратор можно рассматривать как замкнутую на конце однопроводную линию передачи, возбуждаемую от коаксиальной линии. Распределение тока в короткозамкнутой линии носит характер стоячей волны, т. е. ток вдоль вибратора распределен по косинусоидальному закону, как показано на рис. 17.4.1*б*.

Под влиянием тока, протекающего по вибратору, в волноводе возбуждается волна типа H_{10}, распространяющаяся в обе стороны от вибратора. Следовательно, вибратор — это короткозамкнутый отрезок однопроводной линии, которая теряет энергию на излучение в волновод. Поэтому в общем случае входное сопротивление вибратора комплексно: активная часть сопротивления характеризует мощность, передаваемую волне H_{10} в волноводе, а реактивная характеризует реактивную мощность полей вблизи вибратора. Чтобы вся энергия из коаксиальной линии, питающей вибратор, без отражений передавалась в волновод, входное сопротивление вибратора должно совпадать с волновым сопротивлением коаксиальной линии. Поэтому желательно реактивную часть входного сопротивления вибратора свести к нулю, а активную сделать равной волновому сопротивлению линии.

Определим входное сопротивление вибратора в волноводе. Для упрощения анализа предположим, что размер узкой стенки волновода, а следовательно, и длина вибратора много меньше длины волны. При таком предположении плотность поверхностного тока вдоль вибратора можно принять равномерной (рис. 17.4.1*в*), и электродинамическая задача о возбуждении волновода адекватна решенной в данной главе задаче об определении вторичного поля, создаваемого в волноводе тонким индуктивным штырем. Различие состоит в том, что амплитуда тока проводимости в случае первой задачи является не искомой величиной, а полагается заданной и зависит от уровня мощности, подводимого к штырю от генератора. Таким образом, выражение (17.3.17) может быть применено для описания электрического поля в прямоугольном волноводе, возбуждаемом вибратором.

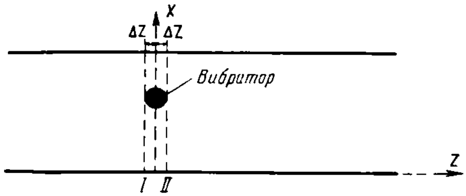


Рис. 17.4.4

Мысленно проведем на расстоянии $\Delta z = r_0$ (r_0 — радиус штыря) две плоскости *I* и *II*, перпендикулярные оси волновода (рис. 17.4.4). Так как штырь возбуждает в каждом из этих сечений волны равной амплитуды, то можно ограничиться подсчетом мощности, проходящей, например, через сечение *I*, и удвоить полученный результат. Поток энергии, пересекающий сечение *I*, равен

$$P_{I\text{ср}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \dot{E}_y \overset{*}{H}_x dx dy, \tag{17.4.1}$$

где величина $\dot{E}_y$ определяется из равенства (17.3.12) при $z = r_0$, а $\dot{H}_x$ находится из соотношения

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}\bigg|_{|z|=|r_0|} = -\frac{4\dot{I}_y}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi d}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} e^{-\mathrm{i}\beta_m r_0}. \tag{17.4.2}$$

Подставляя (17.3.12) и (17.4.2) в (17.4.1), перемножая ряды и учитывая, что

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} a/2, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n, \end{cases}$$

получаем $\widetilde{P}_I = I_y^2 \frac{4b\,\omega\mu_0}{a\,\pi^2\beta_1}\sin^2\frac{\pi d}{a} + I_y^2\frac{4b\,\omega\mu_0}{a\,\pi^2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{m\pi d}{a}}{\beta_m}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta_m r_0}$.

Так как согласно (13.7.6) $\frac{\omega\mu_0}{\beta_1} = Z_c^{H_{10}}$ и при стандартных размерах волновода $\beta_m \approx -\mathrm{i}\,\frac{m\pi}{a}$ $(m \geqslant 2)$, то

$$\widetilde{P}_I \approx I_y^2\frac{4bZ_c^{H_{10}}}{\pi^2 a}\sin^2\frac{\pi d}{a} + \mathrm{i}\,I_y^2\frac{4bZ_c^{H_{10}}\beta_1}{\pi^3}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{m\pi d}{a}}{m}\,\mathrm{e}^{-\frac{2m\pi}{a}r_0}. \quad (17.4.3)$$

Бесконечный ряд (17.4.3) совпадает с рядом (17.3.16), если в последнем положить $x=d$ и $|z|=2r_0$. Подставляя (17.3.16) в (17.4.3), находим мощность, отдаваемую вибратором в волновод:

$$\widetilde{P} = \widetilde{P}_I + \widetilde{P}_{II} = 2\widetilde{P}_I = I_y^2\frac{8bZ_c^{H_{10}}}{\pi^2 a}\sin^2\frac{\pi d}{a} + \mathrm{i}\,I_y^2\frac{8Z_c^{H_{10}}\beta_1 b}{\pi^3}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{2\pi r_0}{a} - \cos\frac{2\pi d}{a}}{\mathrm{ch}\frac{2\pi r_0}{a} - 1} - \sin^2\frac{\pi d}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi r_0}{a}}\right]. \quad (17.4.4)$$

Но, с другой стороны, полная мощность, отдаваемая штырю питающей его коаксиальной линией, равна

$$\widetilde{P} = \frac{1}{2} I_y^2 Z_{\text{вх}}, \quad (17.4.5)$$

где $Z_{\text{вх}}$ — входное сопротивление штыря.

Поскольку мощности, определяемые из равенств (17.4.5) и (17.4.4), должны совпадать, то

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + \mathrm{i}\,X_{\text{вх}} = \frac{16}{\pi^2}Z_c^{H_{10}}\frac{b}{a}\sin^2\frac{\pi d}{a} + \mathrm{i}\,\frac{16}{\pi^2}\frac{bZ_c^{H_{10}}\beta_1}{\pi}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\mathrm{ch}\frac{2\pi r_0}{a} - \cos\frac{2\pi d}{a}}{\mathrm{ch}\frac{2\pi r_0}{a} - 1} - \sin^2\frac{\pi d}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi r_0}{a}}\right]. \quad (17.4.6)$$

Как показывает расчет по ф-ле (17.4.6) при $b/a=0{,}2$, где $a=0{,}75\lambda$, и $d=\frac{a}{2}$, активная часть входного сопротивления вибратора существенно превышает стандартные значения волнового сопротивления коаксиальной линии. При $b/a>0{,}2$ ф-ла (17.4.6) неприменима, поскольку распределение тока вдоль вибратора уже нельзя полагать равномерным. Однако можно утверждать, что вплоть до $b/\lambda \approx 0{,}25$ входное сопротивление должно повышаться. Действительно, вибратор — это короткозамкнутый на конце отрезок линии. Входное сопротивление такой линии непрерывно повышается в интервале $0<b/\lambda<0{,}25$, достигая максимума при $b\approx\lambda/4$, а затем медленно понижается, достигая минимума при $b\approx 0{,}5\lambda$. Следовательно, входное сопротивление вибратора, введенного в середину широкой стенки стандартного волновода ($b/\lambda\approx 0{,}35$), значительно выше волнового сопротивления питающей коаксиальной линии. Как следует из (17.4.6), $R_{вх}$ можно уменьшить, если сместить вибратор от центра к боковой стенке волновода. Существенное увеличение диаметра штыря также позволяет снизить активную часть входного сопротивления вибратора и, как следует из (17.4.6), одновременно уменьшает индуктивную по характеру реактивную составляющую входного сопротивления. Поэтому в широкополосных возбуждающих устройствах часто применяют вибраторы пестиковой формы (рис. 17.4.5).

Как следует из равенства (17.3.12), если вибратор введен в середину широкой стенки волновода ($d=a/2$), амплитуда всех волн с четными значениями первого индекса (H_{20}, H_{40} и т. д.) равна нулю. Объясняется это тем, что электрический вибратор в поперечном сечении волновода по обе стороны от точки расположения возбуждает синфазные электрические поля почти равной амплитуды, поляризованные параллельно оси вибратора.

Аналогичное соотношение между амплитудами и фазами электрического поля имеет место в пучности стоячей волны электрического поля. Поэтому при расположении вибратора в точке $d=\frac{a}{2}$ возбуждаются только те волны, у которых в середине поперечного сечения волновода расположена пучность электрического поля, т. е. волны H_{10}, H_{30} и т. д. Очевидно, что высказанные здесь соображения о выборе местоположения электрического вибратора можно распространить на случай произвольного волновода: для эффективного возбуждения в волноводе с любой формой поперечного сечения одного из типов волн электрический вибратор необходимо помещать, во-первых, параллельно силовым линиям электрического поля волны желаемого типа и, во-вторых, в сечениях, близких к пучности электрического поля этой волны. Если пучностей несколько, то можно помещать вибраторы в каждую из них, учитывая возможный сдвиг фаз между полями в пучностях.

На рис. 17.4.6 показана схема возбуждения волны H_{11} в круглом волноводе. Вибратор расположен в поперечной плоскости волновода параллельно силовым линиям электрического поля волны H_{11}. Если радиус волновода $\frac{\lambda}{3{,}41}<R<\frac{\lambda}{2{,}62}$, то в волноводе будет распространяться лишь волна H_{11}.

При введении штыря параллельно оси волновода, как показано на рис. 17.4.7, возбуждение волн H невозможно, так как штырь возбуждает в основном продольные составляющие вектора электрического поля, отсутствующие у волн H. Если $\frac{\lambda}{2,61} < R < \frac{\lambda}{1,64}$, то в волноводе будет распространяться лишь волна E_{01}, несмотря на то, что волны H_{11} и H_{21} при указанных размерах волновода в принципе также являются распространяющимися.

Во всех схемах, представленных на рис. 17.4.1, 17.4.5—17.4.7, возбуждение вибратора осуществляется с помощью коаксиальной линии. Такие схемы можно рас-

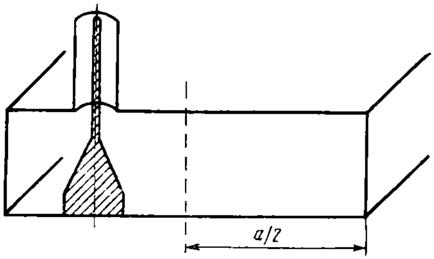


Рис. 17.4.5

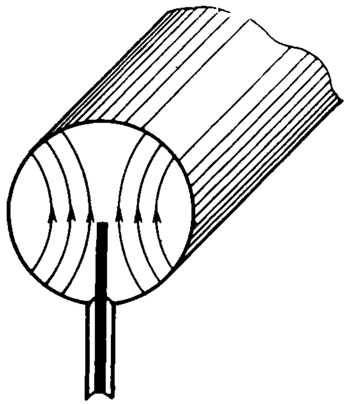


Рис. 17.4.6

сматривать как коаксиально-волноводные переходы, в которых с помощью штыря осуществляется трансформация волны TEM коаксиальной линии в один из волноводных типов волн. Штырь может

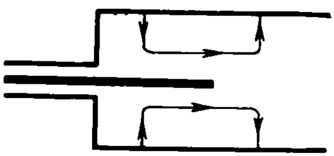


Рис. 17.4.7

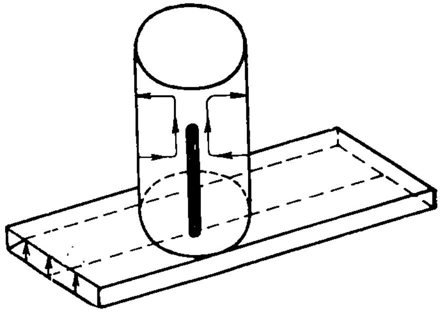


Рис. 17.4.8

быть также использован для преобразования одного типа волны в волноводе в другой. На рис. 17.4.8 представлена одна из возможных схем перехода от волны H_{10} в прямоугольном волноводе к волне E_{01} в круглом волноводе.

В представленных на рис. 17.4.1, 17.4.5 и 17.4.6 схемах возбуждаются две волны желаемого типа, из которых одна распространяется в сторону положительных значений z, а вторая, той же амплитуды, — в противоположном направлении. Чтобы направить возбуждаемого колебания располагается максимум напряженности магнитного поля. На рис. 17.4.2, 17.4.11, 17.4.12 приведены некоторые возможные схемы возбуждения волны H_{10} в прямоугольном волноводе с помощью рамки.

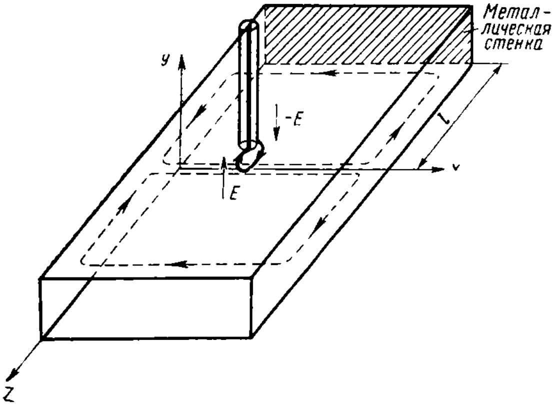


Рис. 17.4.11

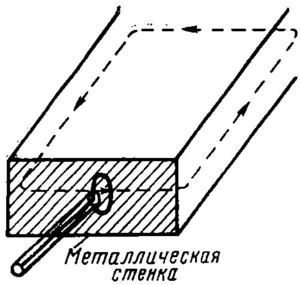


Рис. 17.4.12

Чтобы направить всю возбуждаемую рамкой электромагнитную энергию по волноводу в одну сторону, рамку так же, как и штырь, помещают на определенном расстоянии от короткозамкнутого конца волновода. Величина этого расстояния различна в зависимости от того, является ли рамка источником продольной или поперечной составляющей магнитного поля. Обратимся к рис. 17.4.11 и 17.4.12, где рамка возбуждает преимущественно поперечную составляющую H_x. Поскольку токи в диаметрально противоположных точках рамки антипараллельны (рис. 17.4.11), то векторы электрического поля у волн, бегущих по волноводу в противоположных направлениях, противофазны. Поэтому равенство (17.4.7) в случае рамки принимает вид

$$2\beta l + \pi + \pi = 2n\pi, \quad (17.4.8)$$

так как сдвиг по фазе, равный π, одна из волн получает дважды: первый раз при возбуждении, а второй раз при отражении от короткозамыкающей пластины. Решая ур-ние (17.4.8) относительно l, получаем

$$l = (n-1)\frac{\Lambda}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots), \quad (17.4.9)$$

т. е. расстояние до короткого замыкания равно нулю (рис. 17.4.12), либо целому числу полуволн колебания, возбуждаемого в волноводе.

При возбуждении продольной составляющей (рис. 17.4.2) волны, разбегающиеся от рамки, синфазны. Следовательно, расстоявсю энергию в одном направлении, на некотором расстоянии l от штыря волновод замыкает накоротко, как показано на рис. 17.4.9. Расстояние l подбирается так, чтобы вторая волна после отражения от короткозамыкающей металлической пластины приходила в сечение $z=0$ в фазе с первой волной. Так как в момент

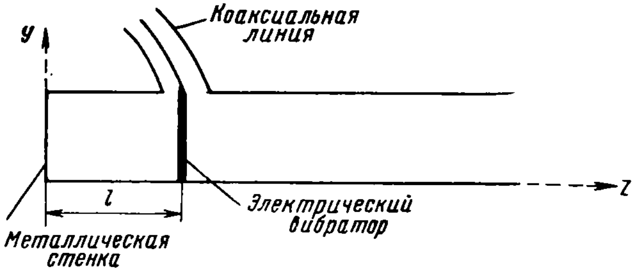


Рис. 17.4.9

возбуждения обе волны синфазны, а при отражении от короткозамыкающей пластины фаза второй волны меняется на π, то условие синфазности записывается в виде

$$2\beta l+\pi=2n\pi \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

откуда

$$l=(2n-1)\frac{\Lambda}{4}\,. \qquad (17.4.7)$$

РАМКА С ТОКОМ

Применяемые для возбуждения рамки обычно имеют периметр, много меньший длины волны возбуждаемых электромагнитных колебаний. При этом токи в диаметрально противоположных точках рамки пространственно ориентированы навстречу друг другу (рис. 17.4.10), и напряженность электрического поля, создаваемая ими вблизи рамки, весьма невелика. Магнитные поля относительно велики, так как поля, создаваемые отдельными элементами рамки, как видно на рис. 17.4.10, синфазны. Это позволяет рассматривать рамку с током как источник преимущественно магнитного поля, силовые линии которого перпендикулярны плоскости рамки. Следовательно, при возбуждении электромагнитных колебаний рамку с током необходимо помещать перпендикулярно силовым линиям магнитного поля волны желаемого типа. Чтобы эффективность рамки как возбуждающего устройства была максимальна, ее, очевидно, следует вводить в сечения, где у

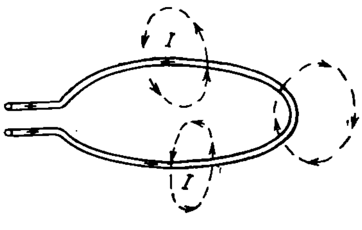


Рис. 17.4.10

ветвляются, главным образом, нормальная к плоскости отверстия составляющая электрического поля и касательная к плоскости отверстия составляющая магнитного поля.

Через отверстие, изображенное на рис. 17.4.13, ответвляется продольная составляющая вектора магнитного поля. Сопоставление рис. 17.4.13 и рис. 17.4.2 показывает весьма значительное сходство между структурами ответвляющего магнитного поля и магнитного поля, создаваемого рамкой, т. е. отверстие в узкой стенке прямоугольного волновода эквивалентно рамке с током. Аналогичными свойствами обладает узкая продольная или поперечная щель в широкой стенке волновода (рис. 17.4.14 и рис. 17.4.15). Щель на рис. 17.4.14 эквивалентна рамке на рис. 17.4.2, а щель на рис. 17.4.15 — рамке на рис. 17.4.11. Отверстия связи можно прорезать также в общей стенке волноводов с различной формой поперечного сечения (рис. 17.4.16).

17.5. Направленные ответвители

В схемах, изображенных на рис. 17.4.13—17.4.15, половина ответвившейся в связанный волновод энергии распространяется от отверстия вправо, а вторая половина — влево. Как уже отмечалось выше, весь ответвляющийся поток энергии желательно направить по волноводу в одно какое-либо плечо[1]). Для этого можно возбудить в связанном волноводе не одну, а две волны равной амплитуды так, чтобы в одном направлении они складывались в фазе, а в противоположном — в противофазе. Например, прорежем в общей стенке двух линий передачи два отверстия на расстоянии, равном четверти длины волны в линии (рис. 17.5.1). Энергия поступает в плечо *1*. Каждое из отверстий возбуждает в связанной линии по две волны, одна из которых поступает в плечо *3*, а вторая — в плечо *4*. В плече *4* волны от двух отверстий складываются в фазе, так как общая длина пути, проходимого этими волнами от плеча *1* до плеча *4*, одинакова. В плечо *3* волны приходят в противофазе, так как путь волны из плеча *1* в плечо *3* через отверстие *1* короче пути волны, приходящей из плеча *1* в плечо *3* через отверстие *2*, на $\Lambda/2$. Вся ответвившаяся энергия поступит в плечо *4*. В плече *3* амплитуда прошедшей волны равна нулю. Неответвившаяся часть энергии пройдет в плечо *2*.

Четырехплечное сочленение, т. е. восьмиполюсник, обладающее тем свойством, что при возбуждении любого из его плеч энергия в одно из выходных плеч не поступает и делится между двумя другими плечами, называется *направленным ответвителем*. Коэффициент деления мощности между плечами ответвителя зависит от его конструкции. Возможно равное деление, в одно из плеч может поступать либо вся, либо бо́льшая часть мощности и др. Каче-

---

[1]) Под плечом подразумевается отрезок линии передачи, через который вводится или выводится энергия.

ние до места короткого замыкания, как и в случае штыря, сл дует выбирать равным нечетному числу четвертей длин волн к лебания, возбуждаемого в волноводе.

ОТВЕРСТИЯ СВЯЗИ

Если прорезать отверстие в металлической оболочке регуляр ного волновода, то часть силовых линий электрического и маг нитного полей волны, распространяющейся по волноводу, проникает в отверстие и возбуждает электромагнитные колебания в пространстве, окружающем волновод, т. е. отверстие связи в общем случае является источником как магнитного, так и электрического полей, и возбуждение через отверстие эквивалентно одновременному возбуждению электрическим вибратором и рамкой. Геометрические размеры отверстий связи обычно значительно меньше длины волны, и отверстие незначительно нарушает структуру поля в волноводе. Поэтому в пер-

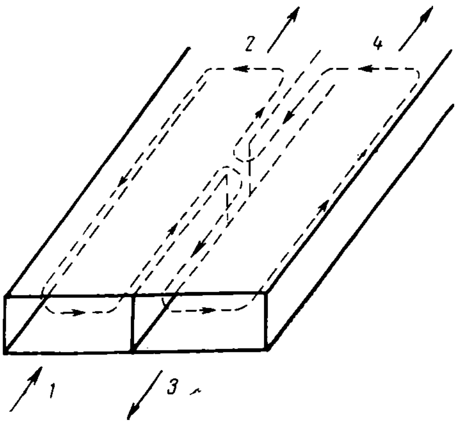


Рис. 17.4.13

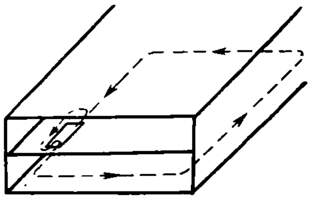


Рис. 17.4.14

вом приближении можно считать, что структура поля в волноводе с отверстием такая же, как и в регулярном волноводе. Так как отверстия прорезаются в металлической стенке, на поверхности которой касательная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля стремятся к нулю, то через отверстия от-

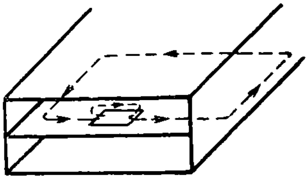


Рис. 17.4.15

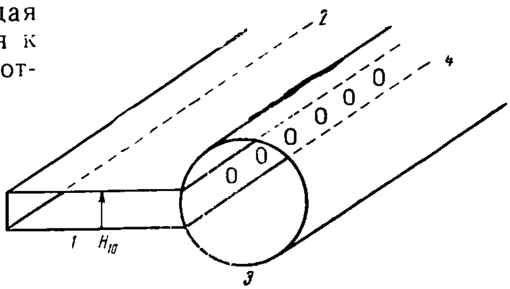


Рис. 17.4.16

ство направленного ответвителя характеризуется его направленностью и полосой частот, в пределах которой сохраняется заданный коэффициент деления и направленность. *Направленностью* называют выраженное в децибелах отношение мощностей на входе ответвителя и на выходе того плеча, куда энергия при идеальной работе ответвителя не должна поступать.

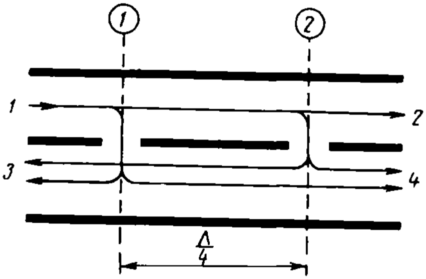


Рис. 17.5.1

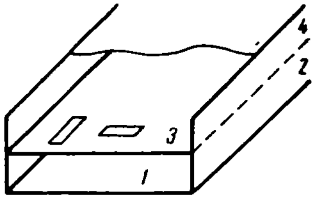


Рис. 17.5.2

Противофазные волны в одном из плеч направленного ответвителя можно также создать с помощью двух щелей, расположенных в одном поперечном сечении волновода (рис. 17.5.2), из которых одна — продольная, а вторая — поперечная. Так как продольная щель эквивалентна рамке, изображенной на рис. 17.4.2, то она возбуждает в верхнем волноводе синфазные волны, разбегающиеся от отверстия. Поперечная щель, эквивалентная рамке на рис. 17.4.11, возбуждает в верхнем волноводе противофазные волны, разбегающиеся от отверстия. В плече *3* эти волны складываются в фазе, а в плече *4* — в противофазе. В результате энергия из плеча *1* ответвляется в плечо *3*, где она распространяется в направлении, противоположном направлению движения входящей в плечо *1* энергии. Такой направленный ответвитель называют *противонаправленным*, в отличие от направленного ответвителя, показанного на рис. 17.5.1, который называют *сонаправленным*.

Широкое применение в технике свч получили *многодырочные* направленные ответвители, с помощью которых можно получить любой коэффициент деления и сохранить его почти неизменным в широкой полосе частот при высокой направленности. Многодырочный направленный ответвитель, принцип действия которого аналогичен принципу действия антенны бегущей волны, изображен на рис. 17.4.3. Как видно из этого рисунка, в общей узкой стенке двух прямоугольных волноводов прорезано несколько одинаковых отверстий на расстоянии l одно от другого. Пусть энергия поступает в плечо *1*. Каждое из отверстий возбуждает в соседнем волноводе две волны H_{10} равной амплитуды, одна из которых поступает в плечо *3*, а вторая — в плечо *4*. Оставшаяся часть энергии распространяется по основному волноводу и поступает в плечо *2*.

При анализе ответвителя будем предполагать, что ответвляющаяся через отверстие энергия настолько мала, что уменьшением амплитуды поля волны в основном волноводе можно пренебречь, т. е. рассматривается направленный ответвитель со слабой связью. В указанном приближении (рис. 17.5.3)

$$\left.\begin{aligned} |E_3^{(1)}| = |E_3^{(2)}| = \ldots = |E_3^{(N)}| = E_0 \\ |E_4^{(1)}| = |E_4^{(2)}| = \ldots = |E_4^{(N)}| = E_0 \end{aligned}\right\}, \quad (17.5.1)$$

где $E_3^{(1)}$ и $E_4^{(1)}$ — напряженности электрического поля волн, возбуждаемых в отверстии *1* и бегущих соответственно в плечо *3* и *4* и т. д.

Число отверстий в направленном ответвителе и расстояние между ними подбираются так, чтобы электромагнитные волны от отдельных отверстий сложились в фазе в плече *4* и скомпенсировали друг друга в плече *3*.

Обратимся к рис. 17.5.3, где изображено поперечное сечение рассматриваемого направленного ответвителя. Цифрами в круж-

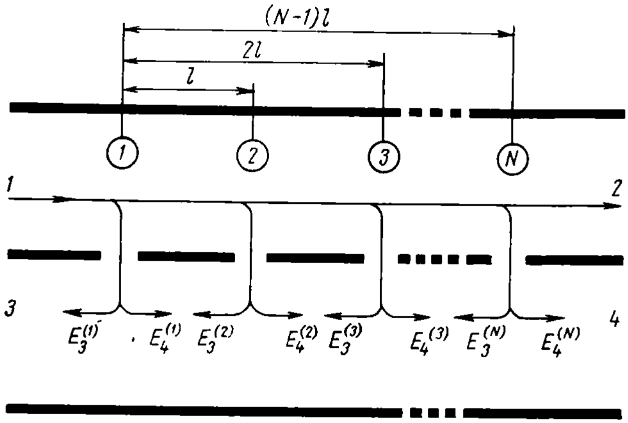


Рис. 17.5.3

ках обозначены порядковые номера отверстий. Волна, бегущая по основному волноводу из плеча *1* в плечо *2*, возбуждает отверстия последовательно: сначала отверстие *1*, затем *2* и т. д. Если начальную фазу волн $E_3^{(1)}$ и $E_4^{(1)}$ принять за нулевую, то начальная фаза волн $E_3^{(2)}$ и $E_4^{(2)}$, очевидно, равна βl, волн $E_3^{(3)}$ и $E_4^{(3)}$ равна $2\beta l$, волн $E_3^{(N)}$ и $E_4^{(N)}$ равна $(N-1)\beta l$. Амплитуда волны в плече *4* является геометрической суммой волн, бегущих в направлении этого плеча, т. е.

$$E_4 = E_4^{(1)} + E_4^{(2)} + \ldots + E_4^{(N)}. \quad (17.5.2)$$

Так как волна $E_4^{(1)}$, прежде чем поступить в плечо *4*, пройдет по нижнему волноводу путь, равный $(N-1)l$, волна $E_4^{(2)}$ — путь, равный $(N-2)l$, и т. д., то с учетом начального сдвига фаз эти волны поступят в сечение N-го отверстия с фазами:

$$E_4^{(1)} = E_0\, e^{-i\beta(N-1)l};$$
$$E_4^{(2)} = (E_0 e^{-i\beta l})\, e^{-i(N-2)\beta l} = E_0\, e^{-i\beta(N-1)l};$$
$$E_4^{(3)} = (E_0\, e^{-i\,2\beta l})\, e^{-i\,(N-3)\,\beta l} = E_0\, e^{-i\beta(N-1)\,l};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$E_4^{(N)} = (E_0\, e^{-i\beta(N-1)l}) = E_0\, e^{-i\beta(N-1)l}.$$

Как видно, на входе плеча *4* волны $E_4^{(1)}$, $E_4^{(2)}$, ..., $E_4^{(N)}$ синфазны и суммируются арифметически, что изображено на векторной диаграмме рис. 17.5.4*а*.

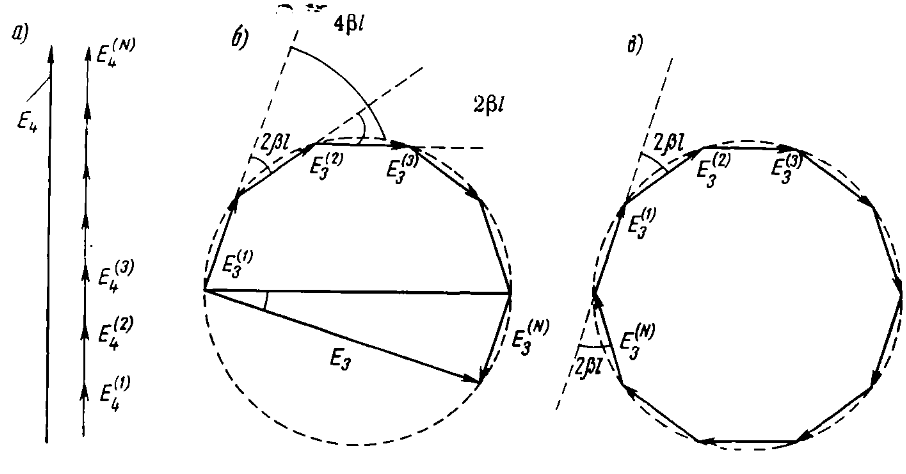


Рис. 17.5.4

Перейдем к определению напряженности поля в плече *3*, суммируя в сечении отверстия 1 все волны, поступающие в это плечо. Волна $E_3^{(1)}$ по определению имеет нулевую фазу в этом сечении; волна $E_3^{(2)}$, пройдя путь, равный l, до отверстия 2 получит фазовый сдвиг βl; волна $E_3^{(3)}$ — фазовый сдвиг $2\beta l$; волна $E_3^{(N)}$ — фазовый сдвиг $(N-1)\beta l$. Если учесть начальный сдвиг фаз между этими волнами, то в сечении отверстия 1:

$$E_3^{(1)} = E_0;$$
$$E_3^{(2)} = (E_0\, e^{-i\beta l})\, e^{-i\,\beta l} = E_0\, e^{-2i\,\beta l};$$
$$E_3^{(3)} = (E_0\, e^{-2i\,\beta l})\, e^{-2i\,\beta l} = E_0\, e^{-4i\beta l};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$^{-i\beta(N-1)l})\, e^{-i\,\beta(N-1)l} = E_0\, e^{-2i(N-1)\beta l}. \quad (17.5.3)$$

Векторная диаграмма полей, построенная в соответствии с (17.5.3), представлена на рис. 17.5.4*б*. Амплитуда суммарного поля в плече *3* равна длине вектора E_3, замыкающего многоугольник. Если так подобрать число отверстий либо расстояние между ними, чтобы векторная диаграмма полей имела вид замкнутого правильного многоугольника, изображенного на рис. 17.5.4*в*, то напряженность поля в плече *3* станет равной нулю, т. е. рассматриваемое устройство будет идеальным направленным ответвителем. Как видно из рис. 17.5.4*в*, $E_3=0$, когда сдвиг по фазе между полями от первого и последнего отверстий равен $2\pi-2\beta l$, т. е. $2(N-1)\beta l=2\pi-2\beta l$, или

$$lN=\frac{\Lambda}{2}\,. \qquad (17.5.4)$$

Например, в двухдырочном направленном ответвителе $l=\dfrac{\Lambda}{4}$ и т. д.

Если уменьшать расстояние l между отверстиями и одновременно увеличивать число N отверстий так, чтобы не нарушалось равенство (17.5.4), то в пределе наступит момент, когда все отверстия сольются друг с другом, и мы получим непрерывную узкую однородную щель, прорезанную в общей стенке волноводов. Длина отверстия согласно (17.5.4) должна составлять целое число полуволн того типа волны, который распространяется в рассматриваемых волноводах.

Интересными свойствами обладают направленные ответвители, в которых связанные через отверстия волноводы имеют различную форму поперечного сечения, например, один — прямоугольного сечения, а другой — круглого (17.4.16). Предположим, что размеры круглого волновода настолько велики, что в нем возможно распространение нескольких типов волн (например, H_{11}, H_{21}, H_{01} и т. д.), причем у одной из этих волн коэффициент распространения равен коэффициенту распространения волны H_{10} в волноводе прямоугольного сечения. Этого нетрудно добиться соответствующим выбором радиуса круглого волновода. В круглом волноводе каждое из отверстий связи будет возбуждать парциальные волны H всех типов. Однако в плече *4* синфазно сложатся лишь парциальные волны того колебания, у которого коэффициент распространения совпадает с коэффициентом распространения волны H_{10} в волноводе прямоугольного сечения. Следовательно, энергия волны H_{10} будет передаваться преимущественно одному типу колебаний в круглом волноводе. Это свойство направленных ответвителей широко используется при возбуждении какого-либо высшего типа волны в связанном волноводе, например, при возбуждении в круглом волноводе волны H_{01}.

Направленные ответвители широко применяются для контроля и измерения уровня проходящей и отраженной мощностей в линиях передачи, позволяют весьма просто осуществить измерение коэффициента отражения в линии. Направленные ответвители используются также в качестве элементов многих сложных устройств, например, фильтров, согласующих устройств и др.

Следует отметить, что прорезание отверстий в стенках волновода практически не сопровождается снижением электрической прочности волноводов.

17.6. Сочленение отрезков линий передачи

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Волноводные тракты состоят, как правило, из множества элементов, соединенных друг с другом. С целью упрощения ремонта и транспортировки волноводные тракты делаются разборными.

Любое нарушение целостности волновода в тракте эквивалентно введению неоднородности. Поэтому даже едва заметный зазор между сочленяемыми отрезками линий передачи, либо небольшое смещение их друг относительно друга вызывают ощутимые отражения в тракте. Излучение через зазор части энергии электромагнитной волны, распространяющейся по линии, приводит к увеличению потерь и паразитным связям между элементами. При передаче по линии большой мощности через сочленение проходят весьма значительные по величине токи. Например, амплитуда продольного тока в стандартном прямоугольном волноводе с воздушным заполнением при $P_{\text{ср}}=P_{\text{пред}}$, как показывает расчет, достигает $3000\lambda_0[a]$, т. е. при $\lambda=0,1$ *м* ток через сопротивление контакта равен 300 *а*. Сопротивление контакта является хотя и малой, но конечной величиной.

При таком токе в сочленении будет выделяться весьма значительная тепловая энергия, что может привести к ухудшению контактов, выходу из строя герметизирующих прокладок и др.

В настоящее время применяют два вида сочленений: контактные и, так называемые, дроссельные.

КОНТАКТНЫЕ СОЧЛЕНЕНИЯ

При контактном сочленении волноводов с прямоугольной или любой другой формой поперечного сечения к концам сочленяемых отрезков припаиваются плоские фланцы, как показано на рис. 17.6.1. Качество электрического контакта в месте сочленения зависит в основном от тщательности механической обработки, параллельности и чистоты контактирующих поверхностей. Чтобы уменьшить тепловые потери и потери на излучение, между фланцами вводят тонкую металлическую контактную прокладку с пружинящими лепестками. Герметизация контактного сочленения достигается введением в специально выполненную канавку резиновой прокладки. Герметизация предохраняет линию от попадания внутрь грязи, влаги, плесени, т. е. от всего того, что приводит к увеличению затухания и снижению допустимой мощности. Герметизация дает также возможность поддерживать повышенное давление газа в линии, что позволяет повысить допустимую мощность (см. гл. 15).

Коэффициент отражения от хорошо выполненного контактного сочленения обычно не превышает 0,001 при потерях менее 0,01 *дб* во всей рабочей полосе частот волновода. Поэтому контактные со-

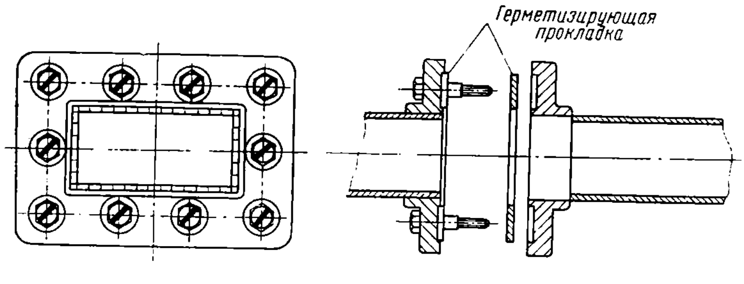


Рис. 17.6.1

членения применяют в особо точной измерительной аппаратуре, в широкополосных системах связи (радиорелейных, кабельных) и других устройствах. Недостатками контактного сочленения являются относительно высокая стоимость из-за жесткости требований, которые приходится предъявлять к точности изготовления, а также ухудшение качества контакта при многократных сборках и разборках вследствие окисления металла в месте контакта. В коаксиальных линиях конструкция контактного сочленения несколько усложняется тем, что одновременно требуется обеспечить хороший контакт как центрального, так и внешнего проводников коаксиальной линии.

Если требования к качеству согласования, уровню потерь и широкополосности не столь жестки, то целесообразно использовать дроссельные сочленения.

ДРОССЕЛЬНЫЕ СОЧЛЕНЕНИЯ

Дроссельные сочленения выполняются обычно таким образом, чтобы механический контакт между сочленяемыми отрезками имел место там, где продольный ток равен или близок к нулю. Это позволяет существенно снизить требования к точности изготовления фланцев и качеству контакта.

Принцип действия дроссельных сочленений основан на том, что входное сопротивление короткозамкнутого полуволнового отрезка линии равно нулю. Поэтому последовательное включение в разрыв между двумя регулярными линиями полуволнового короткозамкнутого отрезка (рис. 17.6.2) соответствует включению нулевого сопротивления между точками *а* и *б*, т. е. идеальному контакту между сочленяемыми отрезками линии передачи.

Чертеж дроссельного сочленения, предназначенного для волноводов прямоугольного сечения, изображен на рис. 17.6.3. Сочленение, как видно из рисунка, состоит из двух различных по конструкции фланцев: левого дроссельного с кольцевой канавкой и правого — обычного контактного. Между частью торцевой поверхности дроссельного и контактного фланцев оставлен зазор, через который в канавку проникает электромагнитная волна. Конфигурация силовых линий электрического поля в дроссельном сочленении изображена на рис. 17.6.3. Сравнивая рисунки 17.6.3 и 14.4.4, замечаем, что канавку можно рассматривать как короткозамкнутый отрезок коаксиальной линии, в которой возбуждается волна H_{11}. Если глубину канавки l_2 выбрать равной четверти длины волны распространяющегося в ней колебания H_{11}, то отрезок линии между сечениями *аб* и *вг* оказывается нагруженным на сопротивление, равное сумме двух последовательно включенных сопротивлений: входного сопротивления канавки и сопротивления контакта между точками *вг*. Входное сопротивление четвертьволновой канавки бесконечно велико, так как на ее входе ток равен нулю, а напряжение максимально (рис. 17.6.2). Поэтому независимо от сопротивления контакта отрезок линии между сечениями *аб* и *вг* нагружен на бесконечно большое сопротивление и работает в режиме холостого хода. Нулевое сопротивление между точками *аб* достигается выбором высоты зазора l_1, равной четверти длины волны колебания, распространяющегося в зазоре между фланцами. Как показало теоретическое и экспериментальное исследование, фазовая скорость волны в зазоре весьма близка к скорости света. Следовательно, глубина канавки l_2 и высота зазора l_1 должны равняться: $l_2 \approx \frac{\Lambda_{H_{11}}}{4}$; $l_1 \approx \frac{\lambda_0}{4}$, где λ_0 — длина волны, соответствующая средней частоте рабочего диапазона.

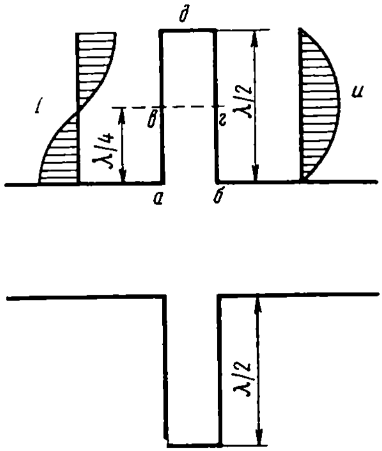


Рис. 17.6.2

У волны H_{10} продольная составляющая плотности тока проводимости достигает максимума в центре широкой стенки и убывает к ее краям (рис. 17.6.3). В узких стенках волновода ток проводимости вовсе не имеет продольной составляющей. Поэтому достаточно обеспечить хороший контакт между сочленяемыми волноводами в середине широкой стенки и в непосредственно прилегающих к середине точках. В связи с этим высота зазора точно равна четверти длины волны лишь в центре широкой стенки волновода (рис. 17.6.3.).

Очевидным недостатком дроссельного сочленения является зависимость его параметров от частоты, поскольку только на средней частоте рабочего диапазона глубина канавки и высота зазора в сумме составляют половину длины волны, а сопротивление меж-

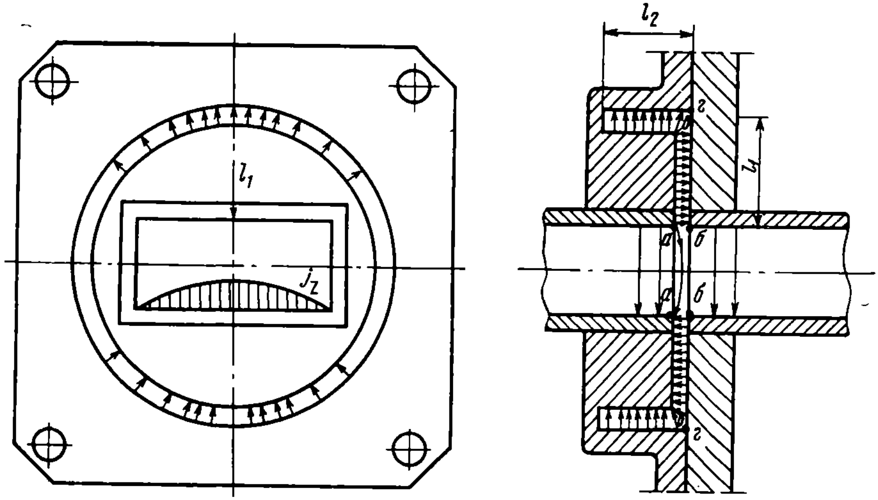


Рис. 17.6.3

ду точками *а* и *б* равно нулю. Практически дроссельное сочленение имеет удовлетворительные параметры в некоторой полосе частот: при тщательном изготовлении коэффициент отражения не превышает 0,025 ($K_{св} \leqslant 1{,}05$) в полосе частот $\pm 15\%$ от центральной частоты рабочего диапазона.

17.7. Аттенюаторы

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В процессе настройки и измерения параметров разнообразных устройств часто возникает необходимость в регулировке уровня мощности в тракте, либо в развязывающих устройствах, ослабляющих реакцию нагрузки на генератор. Приборы, выполняющие эти функции, получили название *аттенюаторов* (ослабителей).

Применяются два типа аттенюаторов: поглощающие и предельные. Поглощающие аттенюаторы основаны на преобразовании части энергии электромагнитной волны в тепловую энергию. В предельных аттенюаторах используется экспоненциальное уменьшение амплитуды полей вдоль оси предельного волновода.

ПОГЛОЩАЮЩИЕ АТТЕНЮАТОРЫ

Аттенюатор поглощающего типа обычно представляет собой отрезок регулярного волновода, в который вводятся одна или несколько диэлектрических пластин, покрытых слоем поглощающего материала (графита, нихрома, платины и др.). На рис. 17.7.1 изображен аттенюатор в прямоугольном волноводе. Как видно из рисунка, пластина с поглощающим слоем, концы которой с целью

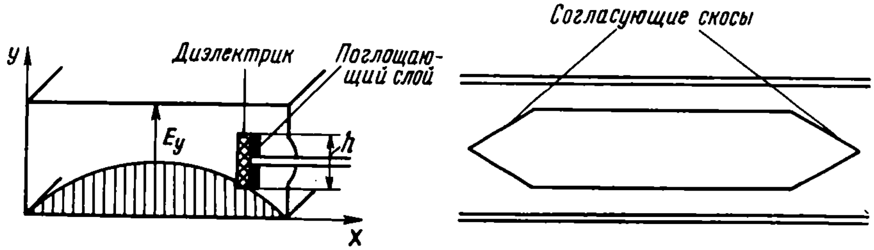


Рис. 17.7.1

уменьшения отражений плавно скошены, введена параллельно силовым линиям электрического поля. Под влиянием электрического поля в слое из поглощающего материала наводится ток проводимости, что вызывает увеличение затухания в волноводе. Так как напряженность электрического поля в поперечном сечении волновода меняется от точки к точке, то, перемещая пластину с поглощающим слоем в поперечной плоскости, можно в широких пределах регулировать величину затухания, вносимого аттенюатором. Максимальное затухание получается, когда пластина с поглощающим слоем расположена на расстоянии $a/2$ от узкой стенки.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ АТТЕНЮАТОРЫ

Основным элементом предельного аттенюатора является отрезок волновода, размеры которого выбраны таким образом, что он является предельным для всех типов волн. В предельный волновод на некотором расстоянии друг от друга вводятся два электрических или магнитных вибратора, один из которых подсоединяется к источнику электромагнитных колебаний, а другой является приемным (рис. 17.7.2). Расстояние между вибраторами регулируется. Так как волновод является предельным, то напряженность электрического поля в сечении, где расположен приемный вибратор, равна $E_{\text{вых}} = E_0\, e^{-\alpha l}$, и поэтому затухание, вносимое аттенюатором, равно

$$L = 10 \lg \frac{E_0^2}{E_{\text{вых}}^2} = \alpha l\, 20 \lg e \approx 8{,}68 \alpha l, \ \partial б,$$

где E_0 — напряженность электрического поля на входе аттенюатора; α — постоянная распространения в предельном волноводе:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1}.$$

Выбрав размеры поперечного сечения волновода таким образом, чтобы выполнялось неравенство $(\lambda/\lambda_{кр})^2 \gg 1$, получаем $\alpha \approx 2\pi/\lambda_{кр}$ и $L \approx 54{,}5\, l/\lambda_{кр}$, *дб*. Следовательно, на всех частотах, где выполняется неравенство $\lambda \gg \lambda_{кр}$, предельный аттенюатор обладает двумя важными достоинствами:

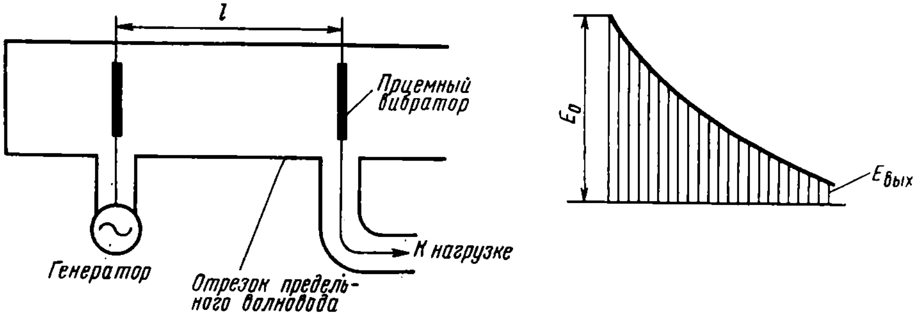


Рис. 17.7.2

— затухание, вносимое аттенюатором, практически полностью не зависит от частоты (величина $\lambda_{кр}$ определяется размерами поперечного сечения волновода и типа возбуждаемого в нем колебания);

— затухание, вносимое аттенюатором, прямо пропорционально расстоянию между возбуждающим и приемным элементами.

Предельные аттенюаторы применяют значительно реже, чем поглощающие. Это объясняется большим начальным затуханием и тем, что отрезок предельного волновода имеет почти чисто реактивное входное сопротивление, т. е. большая часть мощности, поступающей на его вход, отражается. Чтобы уменьшить амплитуду отраженной волны, на входе и выходе предельного аттенюатора включают фиксированные аттенюаторы поглощающего типа, что еще более увеличивает начальное затухание аттенюатора.

17.8. Вращающиеся сочленения

Вращающиеся сочленения необходимы в тех случаях, когда энергия электромагнитных волн передается от неподвижного передатчика к антенне, вращающейся в горизонтальной или вертикальной плоскости. Вращающиеся сочленения должны быть, очевидно, выполнены так, чтобы уровень мощности, поступающей в антенну, не зависел от ее углового положения. Для этого во вращающихся сочленениях применяют симметричные относительно оси вращения линии передачи со структурой поля, имеющей осевую симметрию.

Этому требованию удовлетворяют коаксиальные линии с волно TEM, круглые волноводы с волной E_{01} или H_{01}.

Применяют также круглые волноводы с волной H_{11}, причем для обеспечения круговой симметрии поля в волноводе возбуждают волну H_{11} с круговой поляризацией.

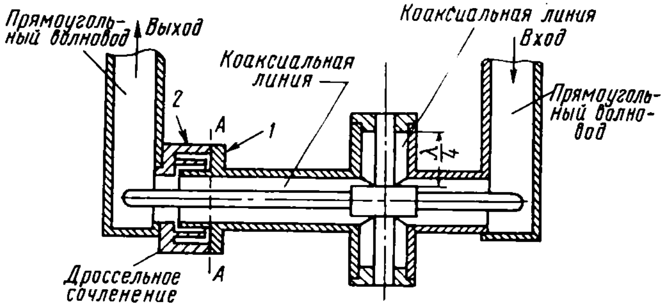


Рис. 17.8.1

На рис. 17.8.1 схематически изображена одна из возможных конструкций вращающегося сочленения. Как видно из рисунка, энергия через волноводно-коаксиальный переход поступает в коаксиальную линию. Центральный проводник коаксиальной линии поддерживается с помощью двух T-изоляторов, представляющих собой включенные параллельно основной линии четвертьволновые отрезки коаксиальной линии, замкнутые на конце. Входное сопротивление этих отрезков значительно выше волнового сопротивления коаксиальной линии, поэтому T-изоляторы слабо влияют на распространение энергии по линии (если вращающееся сочленение работает в узкой полосе частот). Через второй волноводно-коаксиальный переход энергия вводится в прямоугольный волновод на выходе сочленения. Между подвижной частью *1* (рис. 17.8.1) вращающегося сочленения и неподвижной *2* включено дроссельное сочленение, благодаря чему сохраняется хороший электрический контакт между вращающейся и неподвижной частями сочленения даже при наличии небольшого зазора в сечении *AA* (рис. 17.8.1).

Аналогично строятся вращающиеся сочленения с круглым волноводом.

17.9. Волноводные тройники

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Тройником называют шестиполюсник, образовавшийся при сочленении трех отрезков линий передачи. На рис. 17.9.1—17.9.4 изображены некоторые широко применяемые волноводные тройники.

Простейшая классификация волноводных тройников, представленных на рис. 17.9.1—17.9.4, осуществляется по следующему признаку. Если разветвление волноводов происходит в плоскости E, т. е. плоскости, параллельной вектору $\mathbf{E}$ и оси Z, то тройник называется волноводным E-плоскостным тройником, или просто волноводным E-тройником (рис. 17.9.1 и 17.9.4). На рис. 17.9.2 и 17.9.3 изображены волноводные H-тройники, так как волноводы разветвляются в плоскости, где расположен вектор магнитного поля.

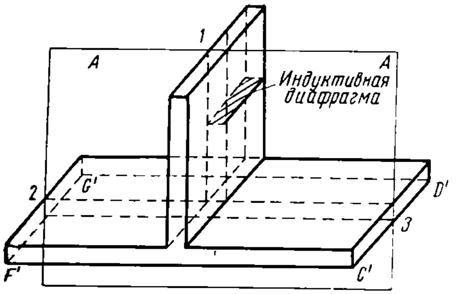


Рис. 17.9.1

Дальнейшая классификация обычно характеризует геометрическую структуру тройника, например, тройники на рис. 17.9.1,

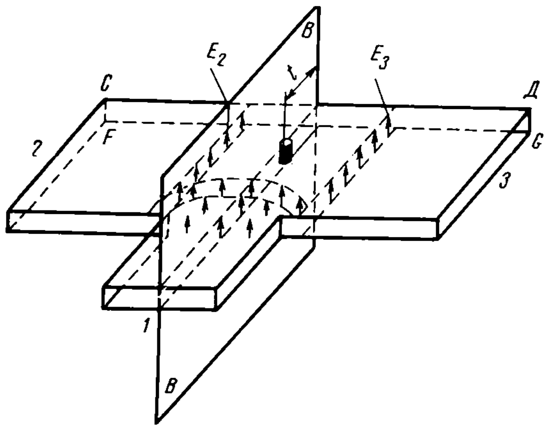


Рис. 17.9.2

17.9.2 получили название Т-образных тройников. Симметричные тройники на рис. 17.9.3, 17.9.4 именуют Y-сочленениями.

Аналогично могут быть выполнены тройники из отрезков коаксиальных линий, круглых волноводов и других линий передачи.

Предположим, что волна H_{10} возбуждена в плече *1* H-плоскостного T-тройника (рис. 17.9.2). Распространяясь вдоль прямоугольного волновода, образующего плечо *1*, волна поступает в область разветвления волноводов. Эту область можно рассматривать как прямоугольный волновод, у которого размер широкой стенки бесконечно велик. Поэтому электромагнитная волна, выходящая из плеча *1*, в области разветвления имеет структуру, близкую к структуре цилиндрической TEM-волны свободного пространства.

Распространяющаяся в разветвлении цилиндрическая волна встречает на своем пути металлическую стенку СДGF и отражается от нее. Отраженная волна вместе с падающей возбуждает

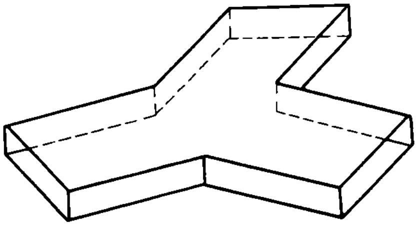


Рис. 17.9.3

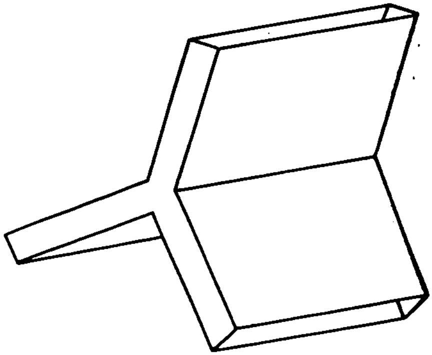


Рис. 17.9.4

проходящие в плечи *2* и *3* волны H_{10}. Кроме того, часть отраженной цилиндрической волны возбуждает отраженную волну H_{10} в плече *1*. Из рис. 17.9.2, где изображена приближенная структура электрических полей в разветвлении, видно, что плечи *2* и *3* возбуждаются синфазно, а так как они расположены симметрично относительно плеча *1*, то амплитуды синфазных волн H_{10} равны.

Чтобы устранить отраженную в плечо *1* волну, в H-тройник вводят индуктивный штырь, как показано на рис. 17.9.2. Цилиндрическая волна прежде, чем отразиться от стенки СДGF, частично отражается от штыря, и в плече *1* образуются две отраженные волны H_{10}: одна от штыря, а другая — от металлической стенки. Диаметр штыря подбирается так, чтобы амплитуды обеих отраженных волн были одинаковыми. Если расстояние t между центром штыря и стенкой СДGF близко к $\lambda/4$ [1]), то волна, отраженная от металлической стенки, запаздывает по отношению к волне, отраженной от штыря, на 180°, т. е. эти волны гасят друг друга.

[1]) Точные значения расстояния t и диаметра штыря подбираются экспериментально.

Так как амплитуда отраженной волны в плече 1 равна нулю, то в согласованном таким образом H-тройнике энергия, поступившая в плечо 1, делится точно поровну между плечами 2 и 3. При этом в соответствии с принципом взаимности должно иметь место и обратное явление: если в плечах 2 и 3 одновременно возбудить синфазные волны H_{10} равной амплитуды, то энергия этих волн сложится и поступит в плечо 1.

Аналогично можно рассмотреть случаи, когда возбуждается только плечо 2 или только плечо 3. Плечи 1 и 3 в H-тройнике расположены несимметрично относительно плеча 2, как и плечи 1 и 2 относительно плеча 3. Поэтому энергия, ответвляющаяся в плечо 1, при возбуждении плеча 2 не равна энергии, ответвляющейся в плечо 3.

Неравное деление мощности между плечами имеет место также при возбуждении плеча 3. Кроме того, H-тройник, согласованный со стороны плеча 1 (рис. 17.9.2), рассогласован со стороны плеч 2 и 3.

Очевидно, что из всех возможных конструкций H-тройников только Y-сочленение, изображенное на рис. 17.9.3, обеспечивает равное деление мощности между боковыми плечами при возбуждении любого из трех плеч.

ВОЛНОВОДНЫЕ E-ТРОЙНИКИ

Если обратиться к рис. 17.9.5, где изображена структура электрического поля в сечении AA E-плоскостного T-тройника (рис. 17.9.1), то нетрудно заметить, что в плечах 2 и 3 тройника возбуждаются противофазные волны H_{10}, когда энергия поступает в плечо 1. Так как плечи 2 и 3 расположены симметрично относительно плеча 1, то амплитуды противофазных волн равны. Часть входящей электромагнитной волны, отразившись от металлической плоскости $C'D'G'F$

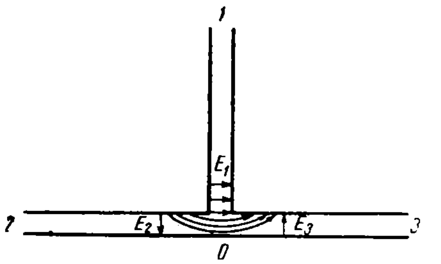


Рис. 17.9.5

(рис. 17.9.1), возбуждает в плече 1 отраженную волну. Чтобы скомпенсировать эту отраженную волну, в плече 1 создают еще одну отраженную волну, используя симметричную или несимметричную индуктивную диафрагму (рис. 17.9.1). При этом энергия, поступающая в плечо 1, поровну делится между плечами 2 и 3. В соответствии с принципом взаимности должно иметь место и обратное явление: если в плечах 2 и 3 рассматриваемого E-тройника одновременно возбудить противофазные волны H_{10} равной амплитуды, то их энергия суммируется и поступает в плечо 1.

ГЛАВА 18

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

18.1. Общие свойства объемных резонаторов

На низких частотах в качестве колебательного контура (резонатора) широко применяется параллельное соединение сосредоточенных индуктивности и емкости. Колебательный процесс в такой системе возникает, как известно, в результате непрерывного

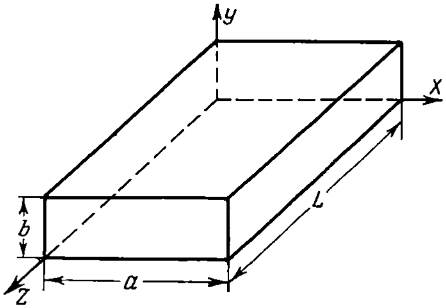


Рис. 18.1.1

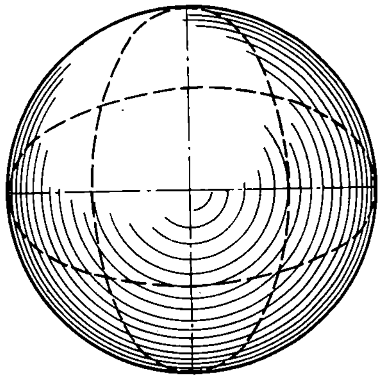


Рис. 18.1.2

обмена энергией между электрическим полем, сосредоточивающимся в конденсаторе, и магнитным полем, сосредоточивающимся в индуктивности. В диапазоне свч создание контуров из сосредоточенных элементов с малыми потерями и соответственно высокой добротностью практически невозможно. Поэтому в этом диапазоне применяют преимущественно колебательные системы из элементов с распределенными параметрами (отрезки двухпроводной, коаксиальной линий, волноводов и др.).

Возможность построения таких систем вытекает из уравнений Максвелла. Действительно, согласно этим уравнениям переменное электрическое поле является источником переменного магнитного поля, а переменное магнитное поле, в свою очередь, возбуждает переменное электрическое поле и т. д., т. е. обмен энергиями между электрическими и магнитными полями происходит непрерывно в любой области пространства. Если каким-либо образом устранить излучение электромагнитных волн из некоторой области пространства и добиться отсутствия тепловых потерь, то обмен энергиями должен протекать сколь угодно долго. Это значит, что в изолированном от внешнего пространства объеме, заполненном средой без потерь, может существовать, как и в обычном резонансном контуре без потерь, незатухающий колебательный процесс. Подобные резонансные системы получили название *объемных резонаторов*.

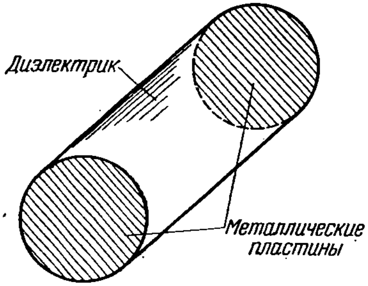


Рис. 18.1.3

Простейшие типы объемных резонаторов представляют собой часть пространства, ограниченного со всех сторон металлической оболочкой. Сюда, в частности, относятся резонаторы в виде короткозамкнутых отрезков металлических волноводов (рис. 18.1.1), сферический резонатор (рис. 18.1.2) и др. По аналогии с направляющими системами резонаторы этого типа называют *закрытыми*. Можно почти полностью устранить излучение в окружающее резонатор пространство, также используя явление полного внутреннего отражения (см. гл. 10) на границе раздела двух диэлектриков с различной диэлектрической проницаемостью. Объемный резонатор этого типа изображен на рис. 18.1.3 и представляет собой отрезок диэлектрического волновода, торцы которого металлизированы. По аналогии с направляющими системами резонаторы, в которых отсутствует замкнутая металлическая оболочка, называют *открытыми*.

18.2. Свободные гармонические колебания в объемных резонаторах

Предположим, что в объеме V_0 произвольного резонатора тепловые потери равны нулю. Кроме того, будем полагать, что обмен энергией между внешним пространством и внутренним объемом резонатора полностью отсутствует. Уравнение баланса (4.1.1) при этих условиях имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = P_{\text{ст}}. \qquad (18.2.1)$$

Под влиянием источника в объеме V_0 возникнут электромагнитные колебания. Пусть через некоторое время сторонний источник отключается. При этом за счет запасенной в резонаторе энергии колебательный процесс будет продолжаться сколь угодно долго и при отсутствии источников. В резонаторе возникнут *свободные* или, другими словами, не связанные со сторонним источником, электромагнитные колебания.

При $P_{ст}=0$ равенство (18.2.1) принимает вид

$$\frac{dW}{dt}=0, \tag{18.2.2}$$

т. е. в соответствии с законом сохранения энергии полная энергия, запасенная в изолированном от внешнего пространства объеме, при отсутствии потерь в любой момент времени остается постоянной. Однако соотношение величин электрической и магнитной энергий в общей неизменной сумме непрерывно меняется ввиду обмена энергией между переменными электрическим и магнитным полями. В общем случае изменение во времени напряженности электрических и магнитных полей в резонаторе носит негармонический характер. Особый интерес представляет случай, когда свободные колебания гармоничны. Пусть, например, зависимость вектора напряженности электрического поля от времени имеет вид

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_m\sin\omega_0 t, \tag{18.2.3}$$

где ω_0 — угловая частота свободных колебаний. В момент $t=0$ напряженность электрического поля равна нулю. Равна нулю в этот момент и энергия, запасенная в электрическом поле. Но полная энергия в объеме V_0 резонатора, как следует из (18.2.2), не зависит от времени. Следовательно, в момент $t=0$ у рассматриваемого свободного колебания вся энергия сосредоточена в магнитном поле, что при гармоничности колебаний означает, что между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеет место сдвиг по фазе на 90°, т. е.

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_m\cos\omega_0 t. \tag{18.2.4}$$

Подставляя (18.2.3), (18.2.4) и (4.2.1), (4.2.3) в (18.2.2), получаем

$$\frac{dW}{dt}=\omega_0\sin 2\omega_0 t\left[\frac{\varepsilon_a}{2}\int\limits_{V_0}|\mathbf{E}_m|^2\,dV-\frac{\mu_a}{2}\int\limits_{V_0}|\mathbf{H}_m|^2\,dV\right]=0. \tag{18.2.5}$$

Так как равенство (18.2.5) должно выполняться в любой момент времени, то

$$\frac{\varepsilon_a}{2}\int\limits_{V_0}|\mathbf{E}_m|^2\,dV=\frac{\mu_a}{2}\int\limits_{V_0}|\mathbf{H}_m|^2dV. \tag{18.2.6}$$

18.3. Резонансные частоты свободных колебаний

Подставив (18.2.3) и (18.2.4) в уравнения Максвелла (2.8.1), приходим при $\mathbf{j}=0$ к равенствам:

$$\omega_0\varepsilon_a\,\mathbf{E}_m=\operatorname{rot}\mathbf{H}_m; \tag{18.3.1}$$

$$\omega_0\mu_a\,\mathbf{H}_m=\operatorname{rot}\mathbf{E}_m. \tag{18.3.2}$$

Выражая в (18.2.6) либо вектор $\mathbf{E}_m$ через $\mathbf{H}_m$ по ф-ле (18.3.1), либо вектор $\mathbf{H}_m$ через $\mathbf{E}_m$ по ф-ле (18.3.2), получаем

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_a\mu_a} \frac{\int\limits_{V_0} |\operatorname{rot} \mathbf{E}_m|^2 dV}{\int\limits_{V_0} |\mathbf{E}_m|^2 dV} = \frac{1}{\varepsilon_a\mu_a} \frac{\int\limits_{V_0} |\operatorname{rot} \mathbf{H}_m|^2 dV}{\int\limits_{V_0} |\mathbf{H}_m|^2 dV}. \tag{18.3.3}$$

Слева в (18.3.3) стоит квадрат резонансной частоты объемного резонатора, а справа — всегда положительная величина, равная отношению двух объемных интегралов. Численное значение каждого из этих интегралов зависит от формы объема V_0 и его размеров, а также от характера подынтегральной функции. Поэтому резонансная частота резонатора зависит от *структуры полей в резонаторе, его формы и размеров.*

Структура полей в резонаторе, как и в направляющих системах, определяется путем решения уравнений Максвелла при определенных граничных условиях на поверхности, окружающей объем V_0. В случае закрытых резонаторов без потерь задача сводится к решению трехмерного векторного волнового уравнения:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_m + \omega_0^2\varepsilon_a\mu_a\mathbf{E}_m = 0 \tag{18.3.4}$$

при граничном условии

$$[\mathbf{n}_0\mathbf{E}_m]|_S = 0, \tag{18.3.5}$$

где S — внутренняя поверхность металлической оболочки резонатора, а $\mathbf{n}_0$ — нормаль к этой поверхности.

Можно доказать, что ур-ние (18.3.4) при граничном условии (18.3.5), как и идентичные уравнения теории направляющих систем, имеет бесконечное число различных решений, каждому из которых согласно (18.3.3) соответствует определенное значение резонансной частоты ω_0, т. е. объемные резонаторы, в отличие от обычных контуров из сосредоточенных элементов, резонируют не на одной частоте, а на бесконечном множестве дискретных частот $\omega_{01}, \omega_{02}, \ldots, \omega_{0p}, \ldots$. То колебание, которому при данных размерах резонатора соответствует минимальная резонансная частота ω_{01}, называют *низшим колебанием.* Отметим, что каждой резонансной частоте соответствует определенная структура электромагнитного поля в резонаторе.

Не исключено, что в объемном резонаторе резонансные частоты двух или большего числа колебаний с различной структурой полей совпадут. Обладающие этим свойством колебания принято называть *вырожденными.*

Наряду с резонансной угловой частотой ω_{0p} вводят понятия: резонансной или собственной длины волны $\lambda_{0p}\left(\lambda_{0p} = \frac{2\pi c}{\omega_{0p}}\right)$ и резонансной (собственной) частоты $f_{0p}\left(f_{0p} = \frac{\omega_{0p}}{2\pi}\right)$.

18.4. Добротность объемных резонаторов

Добротность резонаторов описывается равенствами (4.5.30) и (4.5.31). Сравнивая эти выражения с известными выражениями для добротности обычных колебательных контуров, можно убедиться в их полной тождественности.

Потери электромагнитной энергии в резонаторе складываются из потерь в среде, заполняющей резонатор, и потерь в металлической оболочке резонатора. Кроме того, часть энергии из резонатора передается через элементы связи в устройства, связанные с резонатором. Элементы связи объемных резонаторов с внешними устройствами, идентичные элементам связи в направляющих системах, во-первых, необходимы для возбуждения и поддержания незатухающих колебаний и, во-вторых, позволяют часть энергии из резонатора передать другим элементам аппаратуры (усилителю, линии передачи и др.). В открытых резонаторах дополнительно часть энергии теряется на излучение. Поэтому общие потери энергии в резонаторе равны

$$\Delta W = \Delta W_{\text{мет}} + \Delta W_{\text{д}} + \Delta W_{\Sigma} + \Delta W_{\text{изл}}, \tag{18.4.1}$$

где $\Delta W_{\text{мет}}$ — энергия потерь за период колебаний в оболочке резонатора; $\Delta W_{\text{д}}$ — энергия потерь в среде, заполняющей резонаторы; ΔW_{Σ} — энергия, отдаваемая резонатором во внешние устройства; $\Delta W_{\text{изл}}$ — энергия, теряемая на излучение.

С учетом (18.4.1) равенство (4.5.32) можно записать в виде

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{мет}}} + \frac{1}{Q_{\text{д}}} + \frac{1}{Q_{\Sigma}} + \frac{1}{Q_{\text{рад}}} \tag{18.4.2}$$

и рассматривать полную добротность как суперпозицию «частичных» добротностей:

$$Q_{\text{мет}} = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{\Delta W_{\text{мет}}}; \qquad Q_{\text{д}} = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{\Delta W_{\text{д}}};$$

$$Q_{\Sigma} = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{\Delta W_{\Sigma}}; \qquad Q_{\text{рад}} = 2\pi \frac{W_{\text{ср}}}{\Delta W_{\text{изл}}}. \tag{18.4.3}$$

Полную добротность резонатора Q обычно называют *нагруженной*, а величины $Q_{\text{рад}}$ и Q_{Σ} — соответственно *радиационной* ($Q_{\text{рад}}$) и *внешней* (Q_{Σ}) добротностью. Если связь резонатора с внешними устройствами полностью отсутствует, то $\Delta W_{\Sigma} = 0$ и добротность ненагруженного резонатора согласно (18.4.2) равна

$$Q_0 = \frac{Q_{\text{мет}} Q_{\text{д}} Q_{\text{рад}}}{Q_{\text{д}} Q_{\text{рад}} + Q_{\text{мет}} Q_{\text{рад}} + Q_{\text{мет}} Q_{\text{д}}}, \tag{18.4.4}$$

где Q_0 — *собственная или ненагруженная* добротность резонатора. Подставляя (18.4.3) в (18.4.2), получаем

$$Q = \frac{Q_0 Q_{\Sigma}}{Q_0 + Q_{\Sigma}}. \tag{18.4.5}$$

Строгий расчет величины каждого из видов потерь в объемном резонаторе встречает большие трудности, ибо, как правило, не удается найти решение ур-ния (18.3.4), если не пренебречь потерями в оболочке, через элементы связи и т. д. Поэтому при анализе резонаторов обычно исходят из предположения, что небольшие общие потери, которые имеют место в резонаторе, не сказываются существенно на структуре полей в нем, т. е. предполагают, что в первом приближении структура поля в резонаторе с потерями и без них одинакова. В указанном приближении энергия, запасенная в резонаторе с малыми потерями и без потерь, практически равна. При этом потери в металле, среде, на излучение и потери, вызываемые передачей части энергии через элементы связи, можно рассчитывать независимо друг от друга. Исключением является случай, когда в резонаторе возбуждаются вырожденные колебания. При вырождении в резонаторе без потерь могут одновременно существовать на одной частоте два или несколько колебаний с различной структурой электрических и магнитных полей и соответственно с различной структурой токов проводимости на оболочке резонатора. Естественно, что величина потерь энергии для каждого колебания будет различна. Различие в величине потерь может вызвать некоторое различие в резонансных частотах, т. е. вырождение может исчезнуть. Соответственно изменится структура поля в резонаторе.

18.5. Собственная добротность закрытых резонаторов

Собственная добротность произвольного резонатора, как следует из ф-лы (18.4.4), зависит от $Q_{\text{мет}}$, $Q_{\text{д}}$ и $Q_{\text{рад}}$. В закрытых резонаторах потери на излучение отсутствуют, поэтому

$$Q_0 = \frac{Q_{\text{д}} Q_{\text{мет}}}{Q_{\text{д}} + Q_{\text{мет}}}\,. \tag{18.5.1}$$

Энергия потерь в металлической оболочке согласно (11.2.4) равна

$$\Delta W_{\text{мет}} = \frac{R_S}{2\omega_0} \oint\limits_S |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 \, dS. \tag{18.5.2}$$

Подставляя (18.5.2) и (18.2.6) в (18.4.3), получаем

$$Q_{\text{мет}} = \frac{\omega_0 \mu_a}{R_S} \frac{\int\limits_{V_0} |\dot{\mathbf{H}}_m|^2 \, dV}{\oint\limits_S |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 \, dS}\,. \tag{18.5.3}$$

Если резонатор заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon''$, то при $\mu''=0$ мощность потерь может быть определена по ф-ле (4.5.32):

$$P_{\text{п ср}}=\frac{\varepsilon''\omega_0}{2}\int\limits_{V_0}|\dot{\mathbf{E}}_m|^2 dV. \qquad (18.5.4)$$

Так как

$$W_{\text{ср}}=\frac{\varepsilon'}{2}\int\limits_{V_0}|\dot{\mathbf{E}}_m|^2 dV, \qquad (18.5.5)$$

то из выражения (18.4.3) следует

$$Q_{\text{д}}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\ . \qquad (18.5.6)$$

Аналогично можно показать, что добротность $Q_{\text{д}}$ резонатора, заполненного веществом с параметрами $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon''$ и $\tilde{\mu}=\mu'-i\mu''$, равна

$$Q_{\text{д}}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}+\frac{\mu'}{\mu''}\ . \qquad (18.5.7)$$

18.6. Резонаторы в виде короткозамкнутых отрезков регулярных линий передачи

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Теоретическое исследование электромагнитных полей в резонаторах и свойств объемных резонаторов, ограниченных сложной по форме оболочкой, встречает весьма значительные математические трудности, связанные с необходимостью нахождения решений трехмерного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющих граничному условию (18.3.5). Задача существенно упрощается, если резонатор образован из отрезка линии передачи с известной структурой электромагнитного поля.

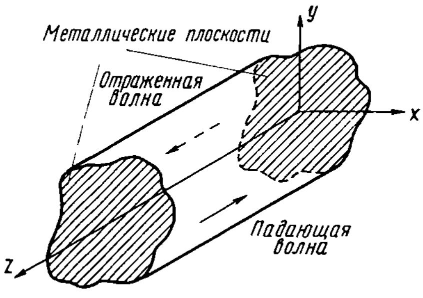


Рис. 18.6.1

Рассмотрим отрезок направляющей системы, в котором возбуждена волна одного типа, распространяющаяся в направлении, указанном на рис. 18.6.1 сплошной стрелкой. Конец линии, удаленный от точки питания, замкнем накоротко с помощью идеально проводящей металлической пластины, перпендикулярной продольной оси линии (рис. 18.6.1). Начало координат совместим с короткозамыкающей плоскостью, ориентировав ось Z параллельно продольной оси линии (рис. 18.6.1). Так как коэффициент отражения от металлической поверхности равен (—1), то поперечный вектор напряженности электрического поля в произвольном сечении согласно (16.2.2) равен

$$\dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{\perp\, s\, \text{пад}} \left(e^{i\beta z} - e^{-i\beta z} \right) = 2i\, \dot{E}_{\perp\, s\, \text{пад}} \sin \beta z. \tag{18.6.1}$$

Нулевые граничные условия на конце линии удовлетворяются одним типом волны. Следовательно, при отражении от металлической плоскости, строго перпендикулярной оси Z, возбуждения более высоких по порядку либо более низких типов волн не происходит.

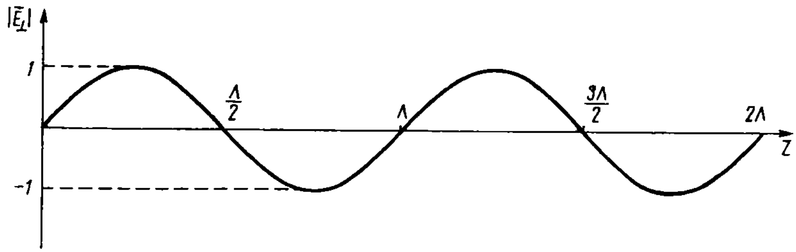


Рис. 18.6.2

На рис. 18.6.2 построена описываемая выражением (18.6.1) зависимость модуля вектора $\dot{E}_{\perp}$ от координаты z. На расстоянии $L = p\frac{\Lambda}{2}$ от точки $z=0$, где Λ — длина волны и p — произвольное целое число, модуль поперечного вектора электрического поля, как это следует из выражения (18.6.1) и видно из рис. 18.6.2, обращается в нуль. Поэтому, не нарушая структуры поля в направляющей системе, в любое из сечений с нулевой напряженностью электрического поля можно ввести еще одну короткозамыкающую металлическую плоскость, перпендикулярную оси Z. Но отрезок линии между двумя короткозамыкающими пластинами представляет собой объем V_0, окруженный со всех сторон металлической оболочкой, т. е. является объемным резонатором закрытого типа. Если направляющая система открытого типа, то короткозамкнутый с двух сторон отрезок линии является открытым резонатором.

Таким образом, длина объемного резонатора равна целому числу полуволн колебания, распространяющегося в линии:

$$L = p\frac{\Lambda}{2}. \tag{18.6.2}$$

После подстановки (13.4.8) в (18.6.2) и решения полученного уравнения относительно λ находим резонансную длину волны резонатора

$$\lambda_{0p} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2L}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_{кр}^2}}} . \qquad (18.6.3)$$

Классификация колебаний в объемных резонаторах, представляющих собой короткозамкнутый отрезок направляющей системы, осуществляется в соответствии с типом волны, стоячая волна которого образуется в резонаторе. Чтобы различать колебания с различным числом полуволн, укладывающихся вдоль оси Z резонатора, в показатель типа волны вводят дополнительный индекс p, равный числу полуволн в стоячей волне. Например, если в прямоугольном резонаторе образовалась стоячая волна колебаний H_{10}, причем вдоль оси Z уложилось четыре полуволны, то такая структура поля обозначается H_{104}. Аналогичный смысл имеют обозначения H_{mnp}, E_{mnp}, TEM_p, HE_{mnp}.

Вывод ф-л (18.6.1)—(18.6.3) основан на предположении, что у волны, распространяющейся в линии передачи, обязательно существуют поперечные составляющие электрического поля, обращающиеся в нуль на короткозамыкающих пластинках. Для волн H_{mn} и TEM это условие, очевидно, выполняется всегда, так как у этих волн вектор электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. У волн E, как следует из выражения (13.6.1), при $\lambda = \lambda_{кр}^{E_{mn}}$ поперечные составляющие вектора напряженности электрического поля равны нулю в любом сечения линии передачи. В то же время продольная составляющая напряженности электрического поля и поперечный вектор магнитного поля отличны от нуля. Поэтому при $\lambda_0 = \lambda_{кр}^{E_{mn}}$ короткозамыкающие пластины можно вводить в произвольные сечения линии с волной E_{mn}, т. е. резонансная частота такого резонатора не зависит от его длины. Можно заметить, что рассмотренный случай есть частный случай (18.6.3), так как $\lambda_0 = \lambda_{кр}^{E_{mn}}$ при $p=0$. Следовательно, у колебаний E_{mnp} $p \geqslant 0$, тогда как у волн H_{mnp}, TEM_p всегда $p \geqslant 1$.

КОАКСИАЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

Коаксиальный резонатор представляет собой отрезок коаксиальной линии, замкнутый с обеих концов проводящими пластинками (рис. 18.6.3). Поперечные размеры коаксиального резонатора, так же как и поперечные размеры коаксиальной линии, выбираются в соответствии с (15.7.1), что обеспечивает отсутствие резонансов высших типов волн.

Так как у волны TEM $\lambda_{кр} \to \infty$, то резонансная длина волны колебания TEM_p равна $\lambda_{0p} = \frac{2L}{p}$, откуда $L = p\,\frac{\lambda_{0p}}{2}$.

Структура электрических и магнитных полей, а также эпюра полей в полуволновом резонаторе изображена на рис. 18.6.4.

Определим собственную добротность коаксиального резонатора, предполагая, что резонатор заполнен диэлектриком без потерь. Магнитное по-

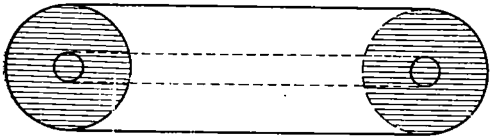


Рис. 18.6.3

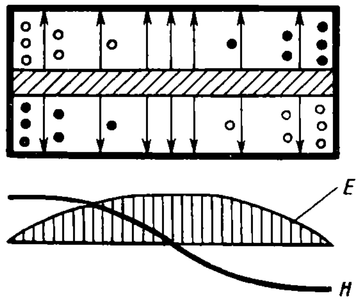


Рис. 18.6.4

ле в резонаторе, как и в коаксиальной линии, ориентировано по азимуту и в соответствии с равенствами (14.4.6) и (16.2.7) может быть записано

$$\dot{H}_\varphi = \frac{E_0 R_1}{Z_c}\,\frac{\cos\beta z}{r}. \qquad (18.6.4)$$

Подставляя (18.6.4) в (18.5.3), получаем:

$$\int\limits_{V_0} |\dot{\mathbf{H}}_m|^2\, dV = \int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L} H_\varphi^2\, r dr d\varphi\, dz = \frac{E_0^2 R_1^2}{(Z_c)^2}\,\pi L \ln\frac{R_2}{R_1};$$

$$\oint\limits_S |\dot{\mathbf{H}}_m^0|^2 dS = \frac{E_0^2 R_1^2}{(Z_c)^2}\left\{2\int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dr d\varphi}{r} + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{L}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cos^2\beta z d\varphi\, dz\right\} =$$

$$= \frac{E_0^2 R_1^2}{(Z_c)^2}\pi\left[4\ln\frac{R_2}{R_1} + L\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right];$$

$$Q_{мет} = Q_0 = \frac{\omega_0\mu_a}{R_S}\;\frac{LR_1R_2\ln R_2/R_1}{4R_1R_2\ln R_2/R_1 + L(R_1+R_2)}. \qquad (18.6.5)$$

Как показывает численный расчет по ф-ле (18.6.6), у коаксиальных резонаторов из меди собственная добротность на волнах до 10 *см* может достигать нескольких тысяч и быстро падает по мере уменьшения резонансной длины волны.

Коаксиальные резонаторы широко применяют в качестве волномеров, колебательных контуров в радиопередающих устройствах, в фильтрах и других приборах.

РЕЗОНАТОР, ВЫПОЛНЕННЫЙ ИЗ ОТРЕЗКА КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ, НАГРУЖЕННОЙ НА ЕМКОСТЬ

Для уменьшения геометрической длины коаксиального резонатора, что особенно важно на волнах длиной порядка 1 *м* и более, между центральным проводником коаксиальной линии резонатора и одной из короткозамыкающих пластин оставляют зазор

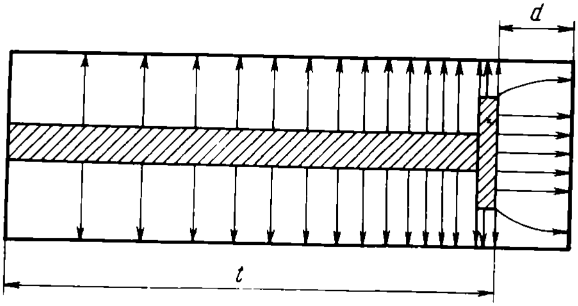


Рис. 18.6.5

(рис. 18.6.5). Ширина зазора выбирается значительно меньше длины волны, что обеспечивает повышенную концентрацию электрического поля в зазоре, т. е. зазор эквивалентен конденсатору, подключенному к линии. Эквивалентная схема такого резонатора (рис. 18.6.6) может быть представлена в виде короткозамкнутого

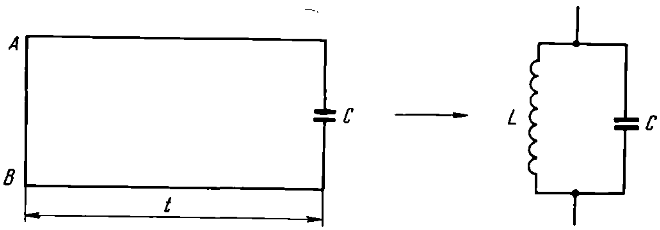


Рис. 18.6.6

с одной стороны отрезка (AB) длиной t коаксиальной линии, второй конец которой нагружен на сосредоточенную емкость. Резонанс в данной системе возможен, если только входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии длиной t имеет индуктивный характер в точках подсоединения к емкости C. Так как короткозамкнутый отрезок линии обладает индуктивным входным сопротивлением при $t<\frac{\lambda_0}{4}$ (см. ф-лу (16.3.8)), то общая длина такого резонатора не превышает четверти длины волны.

Резонансная частота резонатора в соответствии с эквивалентной схемой на рис. 18.6.6 равна частоте, на которой удовлетворяется равенство $X_c = X_L$. Определив величину X_L из равенства (16.3.8) при $Z'_н = 0$, получаем трансцендентное уравнение для определения ω_0:

$$\frac{1}{\omega_0 C} = Z_в \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} t\right) = Z_в \operatorname{tg}\left(\omega_0 \sqrt{\varepsilon_а \mu_а}\, t\right), \qquad (18.6.6)$$

где $Z_в$ — волновое сопротивление коаксиальной линии.
Как показывает расчет, добротность резонаторов с емкостной нагрузкой, несколько ниже, чем у полуволнового резонатора.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

Прямоугольный резонатор представляет собой отрезок прямоугольного волновода, замкнутый с обоих концов проводящими пластинами (рис. 18.1.1). Резонансная длина волны колебаний E_{mnp}

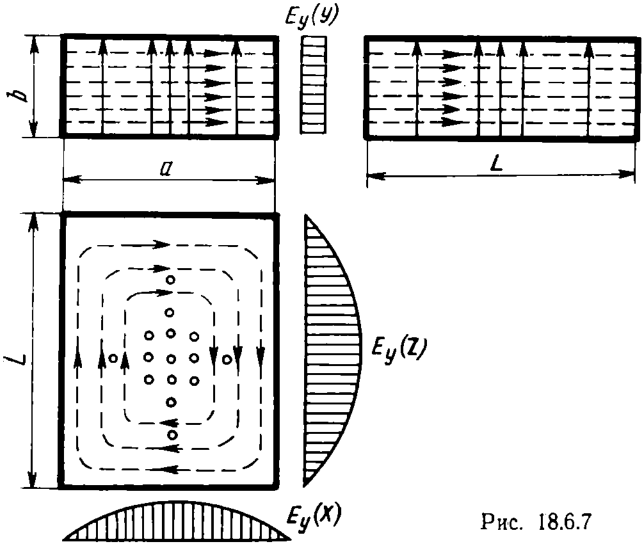


Рис. 18.6.7

и H_{mnp} в таком резонаторе определяется из ф-лы (18.6.3), которая после подстановки в нее выражения (14.1.16) принимает вид

$$\lambda_{0р} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}}. \qquad (18.6.7)$$

У волны E_{mnp} ни индекс m, ни индекс n не может быть равен нулю, поскольку существование волн E_{01} и E_{10} в прямоугольном волноводе невозможно. У волн H_{mnp} только один из индексов m или n может быть нулевым. Значения индекса p, равные нулю, допустимы для волн E_{mnp} и невозможны для волн H_{mnp} (см. выше). Следовательно, в ф-ле (18.6.7) независимо от типа волны только один из трех индексов m, n или p может обращаться в нуль.

Наиболее часто используемым типом колебания в прямоугольном резонаторе является колебание H_{101}, у которого вдоль оси Z укладывается одна полуволна колебания H_{10}. Структура полей волны H_{101} изображена на рис. 18.6.7.

Собственная добротность резонатора с колебанием H_{101} может быть определена из ф-лы (18.5.3). Выполнив необходимые преобразования, получаем

$$Q_{\text{мет}} = Q_0 = \frac{\omega_0 \mu_a}{2R_S} \frac{abL(L^2 + a^2)}{La(L^2 + a^2) + 2b(L^3 + a^3)}. \tag{18.6.8}$$

Как показывает расчет, собственная добротность прямоугольного резонатора достигает десятков тысяч в сантиметровом диапазоне волн.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Цилиндрический резонатор представляет собой отрезок круглого волновода, замкнутый с обоих концов проводящими пластинами (рис. 18.6.8). Резонансная длина волны колебаний в цилиндрическом резонаторе определяется из ф-лы (18.6.3) и равна для волн $E_{mnp} (p \geqslant 0)$

$$\lambda_{0p} = \frac{2}{\sqrt{(p/L)^2 + \left(\nu_{mn}^E / \pi R\right)^2}}; \tag{18.6.9}$$

для волн $H_{mnp} (p \geqslant 1)$

$$\lambda_{0p} = \frac{2}{\sqrt{(p/L)^2 + \left(\nu_{mn}^H / \pi R\right)^2}}, \tag{18.6.10}$$

где $\nu_{mn}^{E,H}$ — корни функций Бесселя и их производных.

На рис. 18.6.9—18.6.11 представлена структура трех наиболее часто применяемых на практике колебаний (E_{010}, H_{111} и H_{011}) в цилиндрическом резонаторе. На тех же рисунках приведены кривые, характеризующие распределение составляющих напряженности электрического поля.

Собственная добротность резонатора, заполненного диэлектриком без потерь, для каждого из этих колебаний находится по ф-ле (18.5.3) и равна:

$$Q_0^{E_{010}} = \frac{\omega_0 \mu_a}{2R_S} \frac{RL}{L + R}; \tag{18.6.11}$$

$$Q_0^{H_{111}} = \frac{\omega_0 \mu_a}{2R_S} \frac{RL}{(2R - L)\left(\frac{\lambda_0}{2L}\right)^2 + L \frac{(\nu_{11}^H)^2}{(\nu_{11}^H)^2 - 1}}; \tag{18.6.12}$$

$$Q_0^{H_{011}} = \frac{\omega_0 \mu_a}{2R_S} \frac{RL}{(2R - L)\left(\frac{\lambda_0}{2L}\right)^2 + L}. \tag{18.6.13}$$

Резонансная длина волны колебания E_{010} не зависит от длины резонатора, так как у этого колебания $p=0$. Поэтому резонатор, рассчитанный на это колебание, может иметь весьма небольшие габариты.

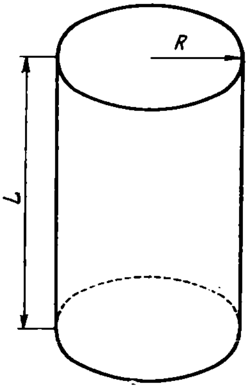


Рис. 18.6.8

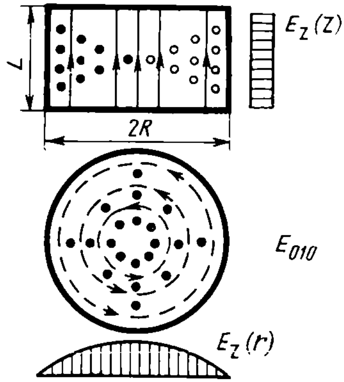


Рис. 18.6.9

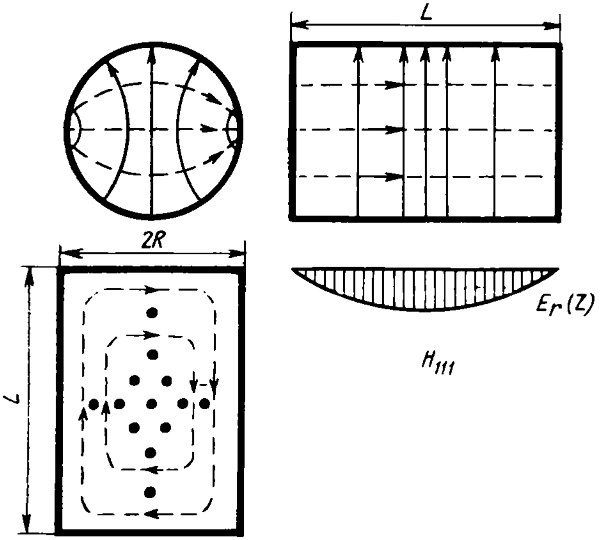


Рис. 18.6.10

При анализе распространения волны H_{01} в круглом волноводе было показано, что при достаточно большом диаметре волновода можно добиться весьма малых потерь. Поэтому резонатор, в котором укладывается одна или несколько полуволн колебания H_{01}, должен обладать чрезвычайно высокой добротностью. Действительно, как показывает расчет по ф-ле (18.6.13), собственная добротность резонатора с волной H_{011} достигает сотен тысяч. При столь высокой добротности полоса пропускания резонатора на частоте 10 000 *Мгц* не превышает 100 *кгц*. Это позволяет использовать резонатор с волной H_{011} в качестве высокоточного волномера.

Чтобы иметь возможность перестраивать резонатор с одной частоты на другую, одна из короткозамыкающих металлических пластин выполняется в виде подвижного поршня (рис. 18.6.12). По мере движения поршня меняется длина L резонатора, что влечет за собой согласно (18.6.10) изменение его резонансной длины волны. Как видно из рис. 18.6.12, поршень не касается стенок резонатора, т. е. электрический контакт между поршнем и стенками резонатора отсутствует. Объясняется это стремлением подавить колебание E_{111}, у которого та же резонансная длина волны, что и у H_{011}. Волна H_{01} в круглом волноводе и, следовательно, колебание H_{011} в резонаторе возбуждают на стенках только поперечные токи ($j_z=0$). Поэтому небольшой зазор между поршнем и стенками резонатора вполне допустим и практически не влияет на электрические характеристики резонатора. В то же время зазор является препятствием для продольных токов волны E_{111} и делает невозможным резонанс этого колебания.

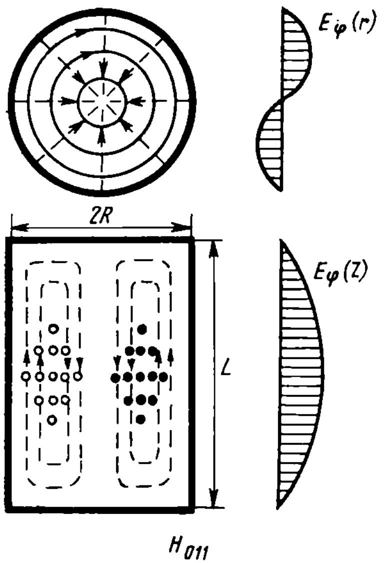


Рис. 18.6.11

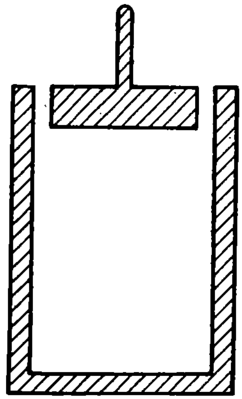


Рис. 18.6.12

Следует отметить, что реальные значения Q_0 несколько меньше расчетных. Объясняется это тем, что действительные значения R_S несколько выше расчетных (см. разд. 15.3).

18.7. Внешняя и нагруженная добротности проходного резонатора. Эквивалентная схема резонатора

Рассмотрим резонатор в виде короткозамкнутого отрезка линии передачи, включенного в линию, в торцевых металлических стенках которого прорезаны одинаковые отверстия (рис. 18.7.1). Отверстие на входе резонатора обеспечивает возбуждение колебаний в резонаторе, а отверстие на его выходе служит для передачи энергии в нагрузку. Резонатор рассматриваемого типа получил название *«проходной резонатор»* и широко применяется в технике свч.

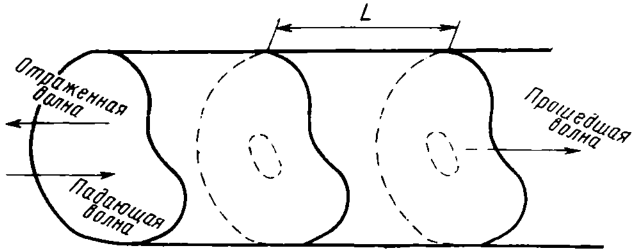


Рис. 18.7.1

Нагруженную добротность подобного резонатора проще определить не из общей ф-лы (18.5.3), а из адекватного ей при $Q \gg 1$ выражения:

$$Q = \frac{f_0}{2\Delta f_{0,5}}, \tag{18.7.1}$$

где $\Delta f_{0,5}$ — расстройка, при которой мощность на выходе разонатора уменьшается в два раза.

Перейдем к определению зависимости от частоты коэффициента передачи резонатора, что позволит рассчитать добротность по ф-ле (18.7.1). Торцевые металлические плоскости резонатора, в которых прорезаны отверстия, можно рассматривать как две диафрагмы, одна из которых находится на входе, а другая — на выходе резонатора. Энергия падающей электромагнитной волны частично отражается от первой диафрагмы, а оставшаяся часть проходит в резонатор. Дойдя до второй диафрагмы, энергия волны частично проходит через диафрагму и поглощается в нагрузке. Оставшаяся часть энергии отражается от второй диафрагмы и распространяется в направлении входной диафрагмы. Эта энергия

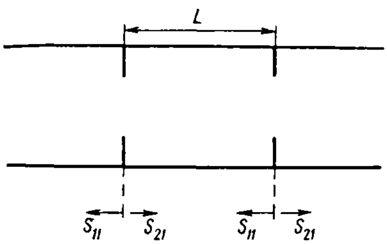


Рис. 18.7.2

также частично проходит через нее, а оставшаяся часть отражается обратно ко второй диафрагме и т. д. Полная амплитуда напряженности поля отраженной волны на входе резонатора и амплитуда напряженности поля прошедшей через резонатор волны являются бесконечной суммой амплитуд волн, возникающих при каждом взаимодействии волны с диафрагмами. Обозначим коэффициент отражения от каждой из диафрагм через s_{11} и коэффициент передачи через s_{21} (рис. 18.7.2). Если пренебречь потерями энергии в диафрагмах, то (см. 16.5.9)

$$|s_{21}|^2 = 1 - |s_{11}|^2. \tag{18.7.2}$$

После взаимодействия падающей волны с первой диафрагмой $E_{1\text{отр}} = s_{11}\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{E}_{1\text{пр}} = s_{21}\dot{E}_{\text{пад}}$. Прошедшая волна $\dot{E}_{1\text{пр}}$ на пути от первой до второй диафрагм получает фазовый сдвиг βL, отражается от второй диафрагмы, снова, распространяясь по резонатору, получает фазовый сдвиг βL и, частично пройдя через первую диафрагму, создает еще одну отраженную волну на входе резонатора. Комплексная амплитуда этой волны равна $\dot{E}_{2\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 s_{11} e^{-2i\beta\alpha}$. Комплексная амплитуда волны, повторно отразившейся от первой диафрагмы в резонатор, равна $\dot{E}_{1\text{пр}} e^{-i\beta L} s_{11} e^{-i\beta L} s_{11} = \dot{E}_{\text{пад}} s_{21} s_{11}^2 e^{-2i\beta L}$ Эта волна проходит путь L до второй диафрагмы, снова частично отражается и возвращается ко входу резонатора, создавая третью отраженную волну с амплитудой $\dot{E}_{3\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 s_{11}^3 e^{-4i\beta L}$ и т. д. Суммируя все отраженные волны, получаем

$$\dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{1\text{отр}} + \dot{E}_{2\text{отр}} + \dot{E}_{3\text{отр}} + \ldots + \dot{E}_{n\text{отр}} + \ldots = \dot{E}_{\text{пад}} s_{11} +$$
$$+ \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 s_{11} e^{-2i\beta L} + \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 s_{11}^3 e^{-4i\beta L} + \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 s_{11}^5 e^{-6i\beta L} + \ldots$$
$$\ldots + \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 s_{11}^{2n-3} e^{-i2(n-1)\beta L} + \ldots =$$
$$= \dot{E}_{\text{пад}} \left[s_{11} + s_{21}^2 s_{11} e^{-2i\beta L} \sum_{n=0}^{\infty} \left(s_{11}^2 e^{-2i\beta L} \right)^n \right]. \tag{18.7.3}$$

Аналогично суммируя все волны, прошедшие на выход резонатора, получаем

$$\dot{E}_{\text{пр}} = \dot{E}_{\text{пад}} s_{21}^2 e^{-i\beta L} \sum_{n=0}^{\infty} \left(s_{11}^2 e^{-2i\beta L} \right)^n. \tag{18.7.4}$$

Так как $|s_{11}| < 1$, то ряды в (18.7.3) и (18.7.4) — сходящиеся геометрические прогрессии. Суммируя их, приходим к выражениям:

$$p = \frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} = s_{11} + \frac{s_{11} s_{21}^2 e^{-2i\beta L}}{1 - s_{11}^2 e^{-2i\beta L}}; \tag{18.7.5}$$

$$t = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}} = \frac{s_{21}^2 e^{-i\beta L}}{1 - s_{11}^2 e^{-2i\beta L}}. \tag{18.7.6}$$

Подставляя в (18.7.6) вместо s_{21} его значение из (18.7.2), находим квадрат модуля амплитуды прошедшей волны:

$$|t|^2 = \frac{(1-|s_{11}|^2)^2}{|1-|s_{11}|^2 e^{-i2(\beta L-\varphi_0)}|^2}, \qquad (18.7.7)$$

где через φ_0 обозначена фаза коэффициента отражения s_{11}.

Из (18.7.7) следует, что вся энергия поступает на выход резонатора, т. е. $|t|^2=1$, когда

$$2(\beta L-\varphi_0) = 2p\pi, \qquad (18.7.8)$$

где $p=0, 1, 2, \ldots$

Подставляя в (18.7.8) $\beta=\frac{2\pi}{\Lambda}$, находим резонансную длину резонатора, т. е. длину, при которой коэффициент передачи равен единице:

$$L = p\frac{\Lambda}{2} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\Lambda, \qquad (18.7.9)$$

где Λ — длина волны в линии передачи.

Зависимость между Λ и длиной волны λ в свободном пространстве для каждого типа волны определяется из соотношения (13.4.8). Длина волны λ_{0p} и соответствующая ей частота f_{0p}, на которой выполняется равенство (18.7.9), называется *резонансной.*

Как следует из (18.7.9), только при $\varphi_0=0$ длина резонатора точно кратна целому числу полуволн. При $\varphi_0<0$ (диафрагма индуктивная) длина резонатора меньше $p\frac{\Lambda}{2}$. При емкостной диафрагме ($\varphi_0>0$) длина резонатора больше $p\frac{\Lambda}{2}$.

На частотах, отличных от резонансной, равенство (18.7.8) не удовлетворяется, и поэтому амплитуда прошедшей волны уменьшается.

Изменение величины $|t|$ от частоты определяется зависимостью β и φ_0 от частоты. При малых изменениях частоты величину φ_0 обычно можно считать постоянной. Зависимость величины β от частоты согласно (13.4.6) имеет вид

$$\beta(f) = \frac{2\pi}{c} f \sqrt{1-\left(\frac{c}{\lambda_{\text{кр}} f}\right)^2}. \qquad (18.7.10)$$

Если $f=f_0\pm\Delta f$, где Δf — малая по сравнению с f_0 величина, то функцию $\beta(f_0\pm\Delta f)$ можно разложить в степенной ряд Тейлора и сохранить в нем лишь два первых члена:

$$\beta(f_0\pm\Delta f) \approx \beta(f_0) \pm \left.\frac{\partial\beta}{\partial f}\right|_{f=f_0} \Delta f. \qquad (18.7.11)$$

Дифференцируя выражение (18.7.10) по f и полагая $f=f_0$, после подстановки в (18.7.11) получаем

$$\beta \approx \beta_0 \left[1 \pm \frac{1}{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2} \frac{\Delta f}{f_0} \right], \tag{18.7.12}$$

где $\beta_0=\beta(f_0)$.

В том же приближении, сохраняя три первых члена в разложении экспоненциальной функции в степенной ряд, приходим к выражению

$$e^{-i2(\beta L-\varphi_0)} \approx 1 \mp i \frac{\beta_0 L}{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2} \frac{2\Delta f}{f_0} - \frac{(\beta_0 L)^2}{\left[1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2\right]^2} 2\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2. \tag{18.7.13}$$

Подставляя (18.7.8) и (18.7.13) в (18.7.7), получаем при небольших расстройках

$$|t|^2 \approx \frac{1}{1+\left[\frac{|s_{11}|}{1-|s_{11}|^2} \frac{\beta_0 L}{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}\right]^2 \left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2}. \tag{18.7.14}$$

На границе полосы пропускания согласно (18.7.1) $\frac{2\,\Delta f_{0,5}}{f_0} = \frac{1}{Q}$ и $|t|^2=0{,}5$. Подставляя эти значения в (18.7.14), находим

$$Q=\frac{|s_{11}|}{1-|s_{11}|^2} \frac{\beta_0 L}{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}, \tag{18.7.15}$$

т. е. квадрат коэффициента передачи равен

$$|t|^2=\frac{1}{1+Q^2\left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2}. \tag{18.7.16}$$

Аналогичная зависимость коэффициента передачи от частоты имеет место у параллельного контура, включенного параллельно в ли-

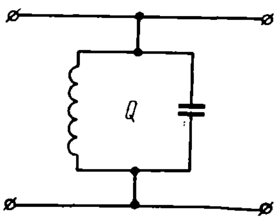


Рис. 18.7.3

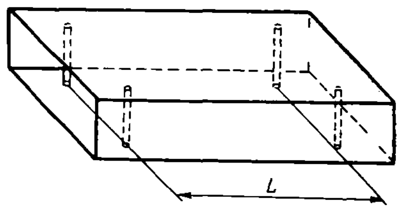


Рис. 18.7.4

нию. Таким образом, эквивалентная схема линии передачи с включенным в нее проходным резонатором имеет вид, показанный на рис. 18.7.3.

При выводе ф-лы (18.7.7) мы пренебрегли тепловыми потерями в диафрагмах и линии передачи. Поэтому найденная величина фактически является внешней добротностью резонатора. Если тепловыми потерями в резонаторе пренебречь нельзя, то нагруженную добротность можно рассчитывать по ф-ле (18.4.5), предварительно определив собственную добротность из (18.5.1), а внешнюю — из (18.7.15).

Отметим, что вывод ф-лы (18.7.15) и получаемый результат не изменяются, если вместо диафрагм на вход и выход резонатора включить любые другие одинаковые неоднородности без потерь. Например, в прямоугольных резонаторах широко применяются неоднородности, состоящие из нескольких индуктивных штырей (рис. 18.7.4). Подбором количества стержней, их диаметра и расстояний между ними можно получить значения коэффициента отражения, соответствующие заданным значениям нагруженной добротности резонатора [22]. В полосковых и коаксиальных линиях роль неоднородности может выполнять зазор (щель) в центральном проводнике (рис. 18.7.5).

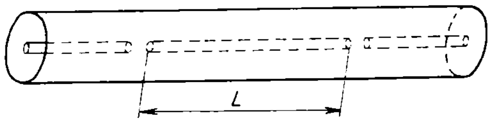


Рис. 18.7.5

Для расчета по полученным формулам необходимо знать модуль $|s_{11}|$ и фазу φ_0 коэффициента отражения от неоднородности. Величина $s_{11}=|s_{11}|e^{i\varphi_0}$ находится путем решения соответствующей электродинамической задачи либо экспериментально. Для индуктивного штыря и индуктивной диафрагмы значения s_{11} приведены выше в разд. 17.2 и 17.3. Отметим, что в этих разделах коэффициент отражения обозначен буквой p. Эквивалентные схемы для большого числа неоднородностей приведены в [26].

18.8. Квазистационарные резонаторы

Характерным признаком квазистационарных резонаторов является весьма четко выраженное пространственное разделение электрических и магнитных полей у колебания с наименьшей резонансной частотой, т. е. энергия электрического и магнитного полей концентрируется преимущественно в различных частях объема резонатора. Это позволяет рассматривать квазистационарные резонаторы, в которых возбуждается колебание с низшей резонансной частотой, как обычные колебательные контуры с сосредоточенными постоянными, причем те части объема, где концентрируется энергия электрического и магнитного полей, эквивалентны соответственно емкостному и индуктивному элементам контура. Если величина индуктивного и емкостного сопротивлений элементов известна, то резонансная частота квизистационарного резонатора может быть рассчитана по обычной формуле $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

На рис. 18.8.1 изображен тороидальный резонатор, применяемый в клистронах. На рис. 18.8.2 изображен резонатор магнетрона.

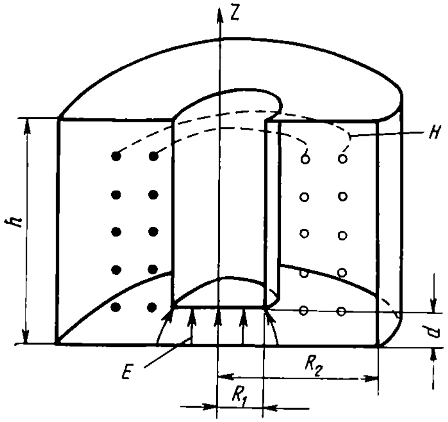


Рис. 18.8.1

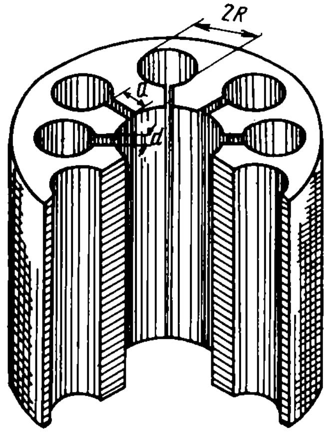


Рис. 18.8.2

В случае тороидального резонатора электрическое поле сосредоточено почти полностью в зазоре шириной d (рис. 18.8.1). Емкость C_0 контура равна емкости зазора между параллельными пластинами резонатора, которая рассчитывается по формуле

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{\varepsilon_0 \pi R_1^2}{d}. \qquad (18.8.1)$$

Эта ф-ла является приближенной, так как не учитывает искажения поля на краях конденсатора. Магнитное поле концентрируется преимущественно в боковых полостях резонатора. Индуктивность L_0 контура находят из соотношения

$$L_0=\Phi/I, \qquad (18.8.2)$$

где Φ — магнитный поток, проходящий через боковые полости резонатора; I — ток в стенках этих полостей.

Так как магнитные силовые линии имеют вид концентрических окружностей, то напряженность магнитного поля на расстоянии r от оси Z резонатора равна

$$H_\varphi=\frac{I}{2\pi r}, \qquad 18.8.3)$$

если предположить, что распределение магнитного поля однородно вдоль оси резонатора. Подставляя (18.8.3) в выражение, связывающее магнитный поток с напряженностью магнитного поля, получаем

$$\Phi = \int\limits_{S_\perp} \mathbf{B}d\mathbf{S} = \mu_0 \int\limits_{S_\perp} H_\varphi\, dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int\limits_{S_\perp} \frac{dS}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1}, \qquad (18.8.4)$$

где $S_\perp$ — площадь половины поперечного сечения резонатора, пронизываемая магнитными силовыми линиями. Таким образом, $L_0 = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ и

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2d}{\varepsilon_0\mu_0 h R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}. \qquad (18.8.5)$$

Аналогично для ячейки магнетронного резонатора (рис. 18.8.2) находим

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{d}{\varepsilon_0\mu_0\pi a}}. \qquad (18.8.6)$$

18.9. Резонаторы бегущей волны

Все рассмотренные выше объемные резонаторы (кроме квазистационарных) представляют собой отрезки линии передачи того или иного вида, в которых устанавливается стоячая волна электромагнитного поля. Существуют также резонаторы, в которых явление резонанса имеет место в режиме бегущей волны.

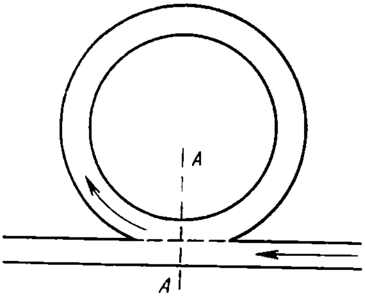


Рис. 18.9.1

Свернем отрезок линии передачи в кольцо, как показано на рис. 18.9.1. Предположим, что в сечении AA кольца находится источник электромагнитных колебаний, возбуждающий волну, распространяющуюся по кольцу только в одном направлении. Такое возбуждение резонатора может быть осуществлено с помощью направленного ответвителя (рис. 18.9.1). Если длину кольца выбрать равной целому числу волн в применяемой линии, то фаза волны, прошедшей по кольцу в сечение AA, совпадает с фазой волны, возбуждаемой источником. Поэтому в сечении AA обе волны складываются, и по кольцу уже распространяется волна большей амплитуды. Таким образом, после каждого оборота амплитуда волны возрастает. Однако одновременно с ростом амплитуды полей неизбежно возрастают потери энергии в кольце, во-первых, из-за наличия тепловых потерь в стенках кольца и, во-вторых, из-за того, что часть энергии из резонатора через отверстия связи направленного ответвителя передается обратно в питающую линию. В результате наступает момент, когда энергия, вновь поступающая в кольцо, равна энергии, теряемой в кольце, и дальнейший рост амплитуды прекращается.

Рассмотренное устройство получило название *резонатора бегущей волны.*

Следует отметить, что аналогичный процесс постепенного нарастания амплитуды полей имеет место в любом объемном резонаторе и, в частности, в объемных резонаторах, в которых устанавливается стоячая волна. В резонаторах последнего типа постепенное нарастание амплитуд полей происходит вследствие того, что поля волн, отраженных от неоднородностей (короткозамыкающих плоскостей, диафрагм, штырей и др.), в месте введения источника складываются в фазе с полями волн, возбуждаемых источником.

18.10. Связь между добротностью объемного резонатора и длительностью процесса свободных колебаний в нем

При наличии потерь свободные электромагнитные колебания в резонаторах должны быть затухающими. Чем выше собственная добротность резонатора, тем меньше потери в нем и тем дольше свободные колебания сохраняют заметную амплитуду. В соответствии с равенством (4.1.1) при наличии потерь

$$\frac{dW}{dt} = -P_{\text{п}}. \qquad (18.10.1)$$

Очевидно, что мгновенные значения $P_{\text{п}}$ и W связаны, как и средние значения этих величин, равенством (4.5.30), т. е.

$$P_{\text{п}} = \frac{\omega_0}{Q} W. \qquad (18.10.2)$$

Подставляя (18.10.2) в (18.10.1) и интегрируя, получаем

$$W = W_{\text{нач}}\, e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}, \qquad (18.10.3)$$

где $W_{\text{нач}}$ — начальный запас энергии в резонаторе при $t=0$.

Как видно из (18.10.3), запас энергии в резонаторе с потерями экспоненциально убывает. За время, равное $t \approx 0{,}75\frac{Q}{f_0}$, энергия, запасенная в резонаторе, уменьшится в 100 раз. Если $Q=10^4$ и $f_0=1000$ *Мгц*, то $t=7{,}5$ *мксек*, что свидетельствует о весьма быстром затухании свободных колебаний даже в высокодобротных резонаторах. Поэтому для поддержания незатухающих колебаний в резонаторы вводят постоянно восполняющие потери сторонние источники. При этом резонатор уже работает в режиме *вынужденных,* а не свободных колебаний.

В момент подключения стороннего источника резонатору сообщается некоторый начальный запас энергии, что влечет за собой возникновение свободных колебаний, рассмотренных в разд. 18.2. Свободные колебания, как было показано выше, при наличии потерь в резонаторе весьма быстро затухают, а электромагнитные колебания с частотой источника, т. е. вынужденные колебания, поддерживаются за счет энергии последнего. Поэтому уже через небольшой интервал времени после включения стороннего источника частота электромагнитных колебаний в резонаторе практически не отличается от частоты электромагнитных колебаний стороннего источника. Согласно (18.10.3) длительность периода установления стационарного режима тем больше, чем выше добротность объемного резонатора и ниже частота электромагнитных колебаний.

Возбуждение электромагнитных колебаний в объемных резонаторах и вывод энергии из них основаны на тех же принципах, что и в линиях передачи (см. разд. 17.4).

ГЛАВА 19

СОГЛАСОВАНИЕ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ. СТУПЕНЧАТЫЕ И ПЛАВНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

19.1. Согласование линий передачи

Линия передачи считается идеально согласованной с нагрузкой, подключенной к ее концу, если амплитуда отраженной волны в линии равна нулю. Как следует из ф-лы (16.3.7), согласование имеет место, когда $Z'_H = 1$, т. е. линия нагружена на сопротивление, равное ее волновому сопротивлению.

При отсутствии согласования по линии распространяется не только падающая, но и отраженная волна. В результате возрастают тепловые потери в линии, снижается ее коэффициент полезного действия.

Предположим, что потери в линии пренебрежимо малы и в нагрузку поступает заданная мощность. Тогда при наличии отраженной волны напряженность электрического поля в пучности напряженности электрического поля превышает напряженность электрического поля в линии, работающей в режиме бегущей волны, в $\frac{1}{\sqrt{K_{бв}}}$ раз. Действительно, в этом случае мощность, поступающая в нагрузку ($P_н$), равна мощности, отдаваемой передатчиком ($P_{ген}$), и равна разности между мощностями, переносимыми падающей ($P_{пад}$) и отраженной ($P_{отр}$) волнами:

$$P_{ген} = P_н = P_{пад} - P_{отр} = P_{пад}(1 - |\rho|^2). \qquad (19.1.1)$$

При $|\rho| = 0$ $P_{ген} = P_н = P_{пад}$. Таким образом, в общем случае мощность падающей волны равна

$$P_{пад} = \frac{P_н}{1 - |\rho|^2}. \qquad (19.1.2)$$

Максимальная напряженность электрического поля имеет место в пучности напряженности, где

$$E_{макс} = E_{пад} + E_{отр}. \qquad (19.1.3)$$

Напряженность электрического поля падающей и отраженной волн пропорциональна корню квадратному из соответствующих мощностей. Поэтому

$$E_{макс} \sim \sqrt{P_{пад}} + \sqrt{P_{отр}} = \sqrt{P_{пад}}(1 + |\rho|). \qquad (19.1.4)$$

Подставляя в (19.1.4) вместо $P_{пад}$ его значение из (19.1.2), получаем

$$E_{макс} \sim \sqrt{P_н} \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}} = \frac{\sqrt{P_н}}{\sqrt{K_{бв}}}. \qquad (19.1.5)$$

Соответственно допустимая мощность (см. гл. 15), которую можно передать по линии, уменьшается в $\frac{1}{K_{бв}}$ раз.

В линиях передачи свч на выходе передатчика часто включают специальные элементы (вентили, см. гл. 22), поглощающие отраженную волну. При этом

$$P_{ген} = P_{пад} = P_н + P_{отр}. \qquad (19.1.6)$$

Как следует из (19.1.6), при заданном уровне мощности, передаваемой в нагрузку, мощность генератора должна быть увеличена в $(1+|p|^2)$ раз по сравнению со случаем, когда отраженная волна не поглощается. Соответственно напряженность электрического поля в линии возрастает в $\frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}\sqrt{K_{бв}}}$ раз, т. е.

$$E_{макс} \sim \frac{\sqrt{P_н}}{\sqrt{1+|p|^2}\sqrt{K_{бв}}}, \qquad (19.1.7)$$

а допустимая мощность уменьшается в $\frac{1}{(1+|p|^2) K_{бв}}$ раз по сравнению с режимом бегущей волны. Следует отметить, что выражение (19.1.7) верно, если пренебречь всеми потерями в линии, кроме потерь, связанных с поглощением отраженной волны.

В широкополосных системах связи рассогласование линии с нагрузкой может вызвать искажения передаваемой информации, значительное увеличение уровня шумов в тракте. Поэтому в радиорелейных и других аналогичных широкополосных системах связи, предназначенных для передачи большего объема информации в единицу времени, предъявляются весьма жесткие требования к согласованию. Коэффициент отражения в таких системах обычно не превышает 0,02÷0,05 ($K_{св}$=1,04÷1,1) во всей рабочей полосе частот системы. Во многих случаях нарушается нормальная работа генераторов и усилителей, если коэффициент стоячей волны в линии превышает 1,1÷1,5.

Из приведенных данных следует, что требования к согласованию зависят от назначения и условий работы линии передачи.

19.2. Общие принципы согласования нагрузки с линией передачи

Независимо от характера и типа согласующего устройства, а также полосы частот, в пределах которой сохраняется согласование, схема согласования имеет вид, показанный на рис. 19.2.1. На-значение согласующего устройства — устранить отраженную от нагрузки волну. Эту задачу решают двумя различными методами:

— путем поглощения отраженной волны в согласующем устройстве. При этом падающая волна проходит через согласующее устройство без потерь либо с очень малыми потерями;

— путем создания в линии передачи с помощью согласующего устройства еще одной отраженной волны, амплитуда которой равна амплитуде волны, отраженной от нагрузки. Фазы обеих отраженных волн отличаются на 180°. В результате отраженные волны компенсируют друг друга.

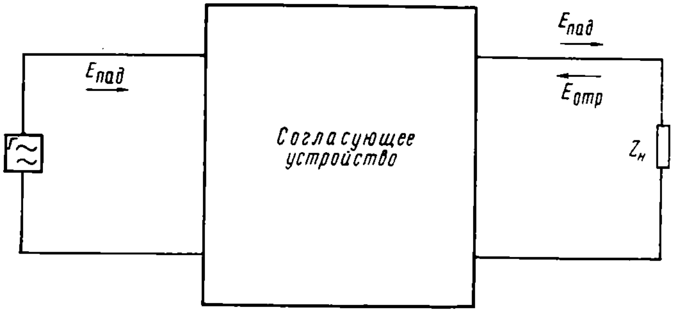


Рис. 19.2.1

Первый метод согласования основан на применении либо мостовых схем, либо невзаимных устройств: вентилей или циркуляторов. Подробно эти устройства рассмотрены в гл. 21 и 22. Отметим только, что способность вентиля поглощать отраженную волну не зависит от характера нагрузки. Поэтому создание широкополосных вентилей практически полностью решило задачу широкополосного согласования произвольных нагрузок. Недостатком вентилей являются относительно бо́льшие потери падающей волны, чем в согласующих устройствах второго типа, а также то, что энергия отраженной волны полностью теряется в вентиле. Это приводит к снижению коэффициента полезного действия линии передачи.

Согласующее устройство второго типа обычно состоит из реактивных элементов и, при надлежащем выполнении, практически не вносит потерь. Отраженная от нагрузки волна не поглощается, как в случае вентилей, а отражается согласующими элементами обратно к нагрузке и снова частично в ней поглощается. В результате многократного отражения от нагрузки и согласующих элементов практически вся мощность из линии передачи поступает в нагрузку. Следовательно, согласующее устройство необходимо включать ближе к нагрузке, чтобы отрезок линии, в котором сохраняется отраженная волна, был как можно короче. При этом обычно достигается также наибольшая полоса частот, в пределах которой удерживается заданное согласование.

Согласующее устройство из реактивных элементов можно рассматривать как трансформатор без потерь, который должен трансформировать во всей заданной полосе согласования сопротивление нагрузки в сопротивление, с требуемой степенью точности близкое к волновому сопротивлению линии, подключенной ко входу согласующего устройства. Однако, как показывает анализ, возможности подобного преобразования ограничены. Если заданы сопротивление нагрузки и максимально допустимый уровень отражений, то существует зависящая от этих требований максимально достижимая полоса согласования. Причем, чем слабее требования к качеству согласования, тем шире полоса частот, в пределах которой удерживается заданный уровень отражений. При разработке согласующих устройств следует иметь в виду, что ширина полосы частот, в пределах которой не превышается допустимый уровень отражений, сужается, если на отдельных частотах полосы коэффициент отражения значительно меньше допустимого или равен нулю. Строгое доказательство этих положений приведено в [30].

Указанные выше ограничения можно несколько ослабить, если ввести в согласующее устройство элементы с потерями. Однако при этом возникает весьма сложная задача построения согласующего устройства с минимальными потерями в полосе согласования.

Когда сопротивление нагрузки чисто активное и не зависит от частоты, принципиальные ограничения на достижимую полосу согласования отсутствуют.

19.3. Узкополосное согласование

Методика узкополосного согласования заключается в следующем. Проводимость нагрузки

$$Y_{н} = G_{н} + \mathrm{i}\, B_{н}, \tag{19.3.1}$$

где $G_{н} \neq 0$, с помощью отрезка линии длиной l (рис. 19.3.1) трансформируется в проводимость Y_1, активная часть которой равна волновой проводимости линии, т. е.

$$Y_1 = G_{л1} + \mathrm{i}\, B_1. \tag{19.3.2}$$

Реактивную часть проводимости Y_1 компенсируют путем параллельного включения в линию (рис. 19.3.2) равной по величине и противоположной по знаку реактивной проводимости $(-\mathrm{i}B_1)$. В результате входная проводимость нагрузки на зажимах *11* (рис. 19.3.2) становится чисто активной и равной волновой проводимости линии, т. е. линия нагружается на сопротивление, равное ее волновому сопротивлению, что соответствует идеальному согласованию.

Заменив везде термины «проводимость» на «сопротивление», можно придти к схеме согласования, изображенной на рис. 19.3.3, где компенсирующее реактивное сопротивление ($—iX_2$) включено в линию *последовательно*.

Для расчета согласующего элемента и трансформирующего отрезка линии можно применить круговую диаграмму полных сопротивлений, рассмотренную в гл. 16. Полагая, что нормированная проводимость нагрузки $Y'_н$ известна, наносят ее на круговую диаграмму (точка *2* на рис. 19.3.4). Поскольку в линии без потерь

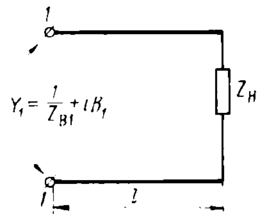


Рис. 19.3.1

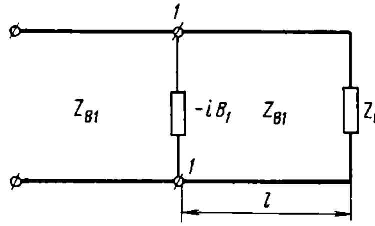


Рис. 19.3.2

амплитуда отраженной волны одинакова в любом ее сечении, то все сопротивления, которые может иметь линия при заданном сопротивлении нагрузки, должны лежать на круге, проведенном из центра диаграммы (пунктирная линия на рис. 19.3.4) и проходящем через точки $Y'_н$ и $Z'_н$. Как видно из рисунка, этот круг в точках *3* и *4* пересекает окружность, где $G'=1$. Каждой из этих точек соответствует определенное расстояние от нагрузки. Обозначим первое расстояние через $\frac{l_3}{\Lambda}$, а второе — через $\frac{l_4}{\Lambda}$ (рис. 19.3.4). В точках *3* и *4* активная часть входной проводимости линии равна ее волновой проводимости. Остается на расстоянии l_3/Λ либо на расстоянии l_4/Λ от нагрузки включить компенсирующую чисто реактивную проводимость, противоположную по знаку входной проводимости линии в данном сечении.

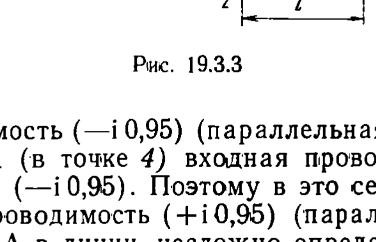


Рис. 19.3.3

На расстоянии l_3/Λ (в точке *3*) входная проводимость линии (см. рис. 19.3.4) положительна и равна ($+i\,0{,}95$). Поэтому в это сечение вводится отрицательная проводимость ($—i\,0{,}95$) (параллельная индуктивность), а на расстоянии l_4/Λ (в точке *4*) входная проводимость линии отрицательна и равна ($—i\,0{,}95$). Поэтому в это сечение вводится уже положительная проводимость ($+i\,0{,}95$) (параллельная емкость). Зная длину волны Λ в линии, несложно определить величины l_3 и l_4, т. е. расстояние от нагрузки до сечения, куда необходимо включить соответствующее компенсирующее реактивное сопротивление. В качестве компенсирующих сопротивлений широко применяются реактивные штыри и диафрагмы, рассмотренные в гл. 17, а также короткозамкнутые отрезки линий.

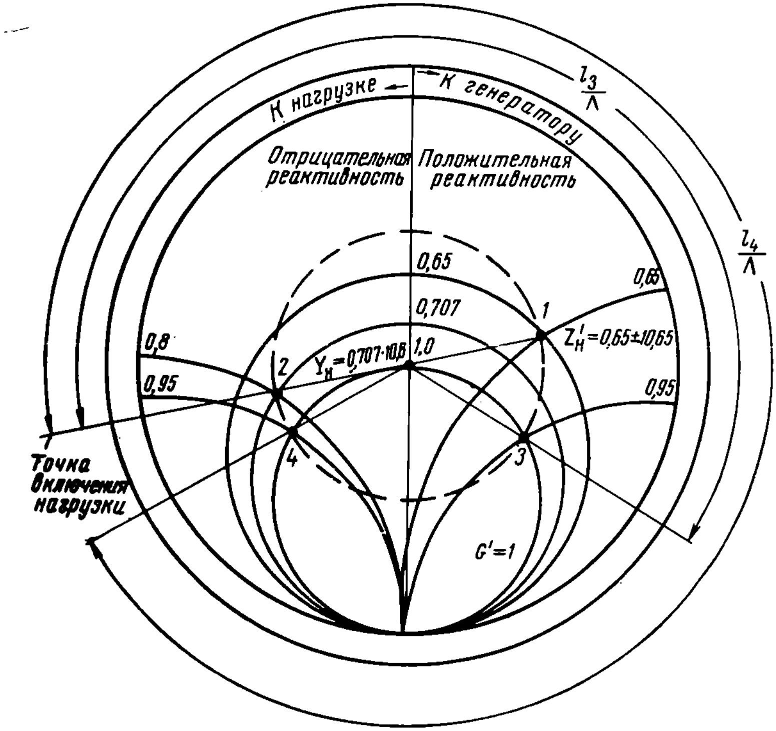


Рис. 19.3.4

Если применение компенсирующего реактивного сопротивления по какой-либо причине нежелательно, то можно использовать для трансформации так называемый четвертьволновый трансформатор, являющийся отрезком линии длиной $\frac{\Lambda}{4}$, волновое сопротивление $Z_{в2}$ которого отличается от волнового сопротивления $Z_{в1}$ основной линии. Как следует из ф-лы (16.3.8), при $z = \frac{\Lambda}{4}$, что соответствует $\beta z = \frac{\pi}{2}$, входное сопротивление четвертьволнового трансформатора равно

$$Z'_{вх} = \frac{1}{Z'_н}, \qquad (19.3.3)$$

где сопротивления $Z'_{вх}$ и $Z'_{н}$ нормированы относительно $Z_{в2}$. Переходя от нормированных величин к обычным, получаем

$$Z_{вх}=\frac{Z_{в2}^2}{Z_н} \tag{19.3.4}$$

или

$$Z_{в2}=\sqrt{Z_{вх}Z_н}. \tag{19.3.5}$$

Схема согласования линии с помощью четвертьволнового трансформатора изображена на рис. 19.3.5. Как видно из рисунка, между сопротивлением нагрузки и четвертьволновым трансформатором включен отрезок линии с волновым сопротивлением $Z_{в3}$. Длина l этого отрезка подбирается так, чтобы его входное сопротивление было чисто активным, т. е. на входе отрезка должен иметь место либо узел электрического поля, либо пучность. Только в этих сечениях (см. гл. 16) входное сопротивление линии чисто активное и согласно (16.3.4) и (16.3.5) равно:

$$R_{мин}=Z_{в3}K_{бв}; \tag{19.3.6}$$

$$R_{макс}=Z_{в3}K_{св}, \tag{19.3.7}$$

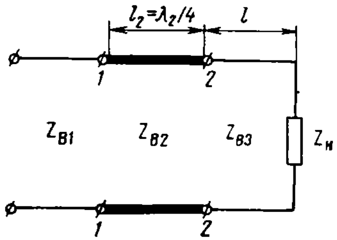


Рис. 19.3.5

где $K_{бв}$ (или $K_{св}$) измеряется в линии с волновым сопротивлением $Z_{в3}$. При этом сопротивление на входе четвертьволнового трансформатора также чисто активное и согласно (19.3.4) равно

$$R_{11}=\frac{Z_{в2}^2}{Z_{в3}K_{бв}} \tag{19.3.8}$$

или

$$R_{11}=\frac{Z_{в2}^2}{Z_{в3}K_{св}}. \tag{19.3.9}$$

Чтобы согласование было идеальным, величина R_{11} должна совпасть с $Z_{в1}$, т. е. согласно (19.3.5)

$$Z_{в2}=\sqrt{K_{бв}}\sqrt{Z_{в1}Z_{в3}}, \tag{19.3.10}$$

если на выходе четвертьволнового трансформатора имеет место узел электрического поля, и

$$Z_{в2}=\sqrt{K_{св}}\sqrt{Z_{в1}Z_{в3}}, \tag{19.3.11}$$

если на входе расположена пучность. Обычно $Z_{в1}=Z_{в3}$. Длина отрезка l находится по круговой диаграмме полных сопротивлений, как показано на рис. 19.3.6. Согласование возможно либо в точке *1*, расположенной на расстоянии l'/Λ_2 от нагрузки, либо в точке *2*, расположенной на расстоянии l''/Λ_2 от нагрузки.

Под Λ_2 подразумевается длина волны в линии, образующей четвертьволновый трансформатор.

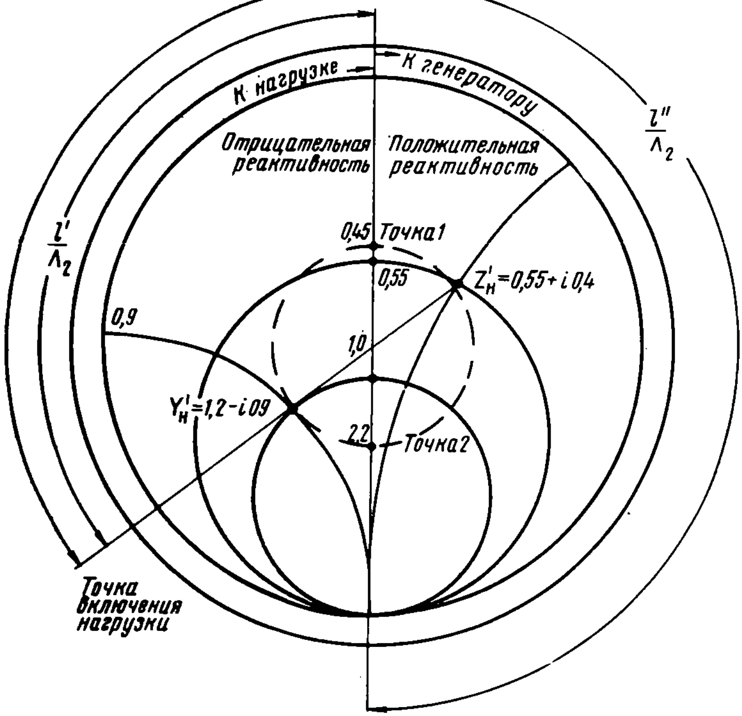


Рис. 19.3.6

Отметим, что в случае, когда сопротивление нагрузки чисто активное, т. е. при $Z_н=R_н$, сопротивление нагрузки можно подключить непосредственно к выходу четвертьволнового трансформатора ($l=0$).

Волновое сопротивление линии передачи, как было показано в разд. 16.3, зависит от ее поперечных размеров. Поэтому трансформирующий отрезок линии обычно имеет ту же форму поперечного сечения, что и основная линия, но размеры этого сечения изменены так, чтобы получить требуемую величину $Z_{в2}$.

19.4. Широкополосное согласование активных сопротивлений. Ступенчатые переходы

Прежде чем перейти к анализу многоступенчатых переходов, рассмотрим более подробно принцип действия четвертьволнового трансформатора (рис. 19.3.5), полагая, что $Z_{н}=Z_{в3}$, т. е. трансформатор согласует линии с волновыми сопротивлениями $Z_{в1}$ и $Z_{в3}$. Так как волновое сопротивление в схеме меняется дважды: сначала в сечении *1*, а затем в сечении *2*, то полная отраженная волна является суперпозицией волн, отраженных в сечениях *1* и *2*. Коэффициент отражения падающей волны в сечении *1* согласно (16.3.7) равен $p_1=\dfrac{Z_{в2}-Z_{в1}}{Z_{в2}+Z_{в1}}$. Пройдя путь l_2 до сечения *2*, волна получает сдвиг по фазе, равный $\beta_2 l_2$. В сечении *2* коэффициент отражения равен $p_2=\dfrac{Z_{в3}-Z_{в2}}{Z_{в3}+Z_{в2}}$. Пройдя после отражения еще раз путь l_2 и снова получив сдвиг по фазе $\beta_2 l_2$, вторая отраженная волна возвращается обратно ко входу трансформатора. Если пренебречь повторным отражением части энергии этой волны при переходе из линии с волновым сопротивлением $Z_{в2}$ в линию с волновым сопротивлением $Z_{в1}$, то суммарный коэффициент отражения (p_{Σ}) от входа трансформатора равен

$$p_{\Sigma}=p_1+p_2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\beta_2 l_2}=\frac{Z_{в2}-Z_{в1}}{Z_{в2}+Z_{в1}}+\frac{Z_{в3}-Z_{в2}}{Z_{в3}+Z_{в2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\beta_2 l_2}.$$

Полное согласование достигается, когда $p_{\Sigma}=0$, т. е. когда волны, отраженные в сечениях *1* и *2*, противофазны и равны по величине. Выбирая длину l_2 трансформатора равной $\Lambda_2/4$, тем самым добиваются противофазности отраженных волн, поскольку при этом $2\beta_2 l_2=\pi$. Волновое сопротивление $Z_{в2}$ линии находится из условия, что амплитуды отраженных волн равны, т. е. $p_2=p_1$ или $\dfrac{Z_{в2}-Z_{в1}}{Z_{в2}+Z_{в1}}=\dfrac{Z_{в3}-Z_{в2}}{Z_{в3}+Z_{в2}}$, откуда $Z_{в2}=\sqrt{Z_{в1}Z_{в3}}$, что совпадает с (19.3.5) при $Z_{н}=Z_{в3}$. Точная компенсация отраженных волн имеет место лишь на одной частоте, так как от частоты зависит набег по фазе $2\beta_2 l_2$, получаемый отраженной волной с амплитудой p_2. При этом, чем ближе к единице отношение $Z_{в3}/Z_{в1}$, тем меньше по абсолютной величине p_1 и p_2 и тем медленнее возрастает суммарный коэффициент отражения при отклонении длины волны от Λ_2. Если перепад волновых сопротивлений велик и с помощью одного четвертьволнового трансформатора невозможно получить необходимое согласование в заданной полосе частот, то применяют несколько последовательно включенных четвертьволновых трансформаторов (рис. 19.4.1). Чем большее число трансформаторов включено, тем шире полоса согласования при фиксированном значении перепада волновых сопротивлений. Чем больше перепад волновых сопротивлений, тем большее число трансформаторов необходимо включить, чтобы не превышался заданный уровень отражений в полосе согласования.

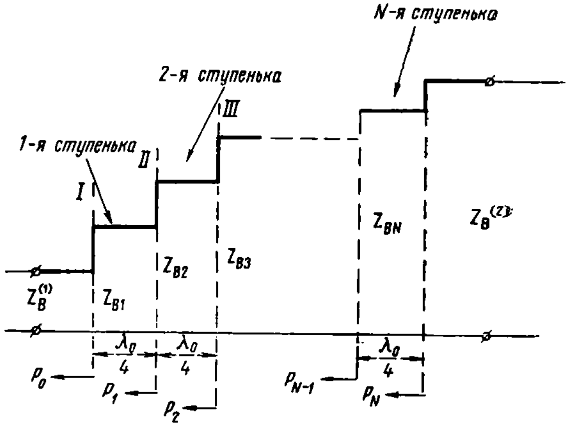


Рис. 19.4.1

Цепочку четвертьволновых трансформаторов, включенных друг за другом, как показано на рис. 19.4.1, называют ***ступенчатым переходом***. Число ступенек в переходе на единицу меньше числа скачков волнового сопротивления.

Ступенчатые переходы применяют при широкополосном согласовании активных сопротивлений, величина которых в необходимой полосе частот практически не зависит от частоты, например, для согласования линии с волновым сопротивлением $Z_{\text{в}}^{(2)}$, нагруженной на неотражающую нагрузку, с линией, имеющей другое волновое сопротивление $Z_{\text{в}}^{(1)}$.

На рис. 19.4.2 изображен двухступенчатый переход, включенный между двумя прямоугольными волноводами.

Строгая теория ступенчатых переходов весьма громоздка и при числе ступенек, большем четырех, практически применима, если только расчет ведется на электронной вычислительной машине [32]. Поэтому ограничимся рассмотрением приближенной теории, полагая, что перепад волновых сопротивлений, равный

$$Z_{\text{в}}^{(12)} = \frac{Z_{\text{в}}^{(2)}}{Z_{\text{в}}^{(1)}}, \tag{19.4.1}$$

не слишком велик (не превышает 10). При этом, как показывает строгий анализ, изменение волнового сопротивления от ступеньки к ступеньке оказывается относительно небольшим, что позволяет пренебречь повторными отражениями электромагнитных волн от ступенек ввиду их малости. В этом случае при определении коэффициента отражения от входа перехода можно не учитывать, что часть энергии волны, отраженной, например, от входа второй ступеньки, отражается в сечении I, затем снова в сечении II и т. д.

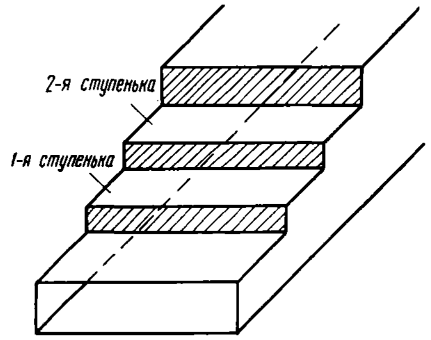


Рис. 19.4.2

Отраженная волна на входе N-ступенчатого перехода (рис. 19.4.1), если пренебречь повторными отражениями, является суммой волн, отраженных от каждой из ступенек:

$$p_\Sigma = p_0 + p_1 e^{-2i\beta l} + \ldots + p_N e^{-2iN\beta l}, \tag{19.4.2}$$

где

$$p_0 = \frac{Z_{в1} - Z_в^{(1)}}{Z_{в1} + Z_в^{(1)}}; \quad p_1 = \frac{Z_{в2} - Z_{в1}}{Z_{в2} + Z_{в1}};$$

$$p_N = \frac{Z_в^{(2)} - Z_{вN}}{Z_в^{(2)} + Z_{вN}} \tag{19.4.3}$$

и $Z_{в1}, Z_{в2}, \ldots, Z_{вN}$ — волновые сопротивления линий соответственно первой, второй, ..., N-й ступенек.

Коэффициенты p_0, p_1, ..., p_N и число ступенек следует подобрать так, чтобы модуль суммарного коэффициента отражения не превышал заданной величины $p_{макс}$:

$$|p_\Sigma| = \left| \sum_{n=0}^{N} p_n e^{-2in\beta l} \right| \leqslant p_{макс}. \tag{19.4.4}$$

Отметим, что так как $e^{-2i\beta l} = e^{-i(2\beta l \pm 2m\pi)}$, то на всех частотах, где длины волн в линии связаны равенством

$$\frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_2} = \pm \frac{m}{2l}, \tag{19.4.5}$$

ступенчатый переход обладает тождественными параметрами, т. е. зависимость $|p_\Sigma|$ от частоты носит периодический характер.

Предположим, что удалось так подобрать коэффициенты p_n, чтобы удовлетворялось неравенство (19.4.4). Зная эти коэффициенты, из ф-л (19.4.3) можно определить волновое сопротивление каждой из ступенек в переходе. В свою очередь, величина волнового сопротивления линии однозначно связана с размерами ее поперечного сечения, т. е. по известным значениям волнового сопротивления можно определить размеры поперечного сечения линии передачи каждой из ступенек. В результате полностью определяется конструкция ступенчатого перехода. Следовательно, нахождение коэффициентов ρ_n в (19.4.4) эквивалентно решению задачи синтеза для ступенчатого перехода.

Для решения задачи синтеза необходимо так задать функцию, описывающую зависимость $|\rho_\Sigma|$ от частоты, чтобы в пределах полосы согласования выполнялось неравенство (19.4.4). Кроме того, естественно потребовать, чтобы одновременно ступенчатый переход обладал минимальной длиной, чтобы на параметрах перехода существенно не сказывались неизбежные при изготовлении небольшие отклонения размеров ступенек и их волновых сопротивлений от требуемых и др. Иногда требуется, чтобы зависимость $|\rho_\Sigma|$ от частоты была строго монотонной. Можно показать, что в этом случае ступенчатый переход в пределах полосы согласования имеет фазовую характеристику, близкую к линейной. Одновременно удовлетворить всем этим требованиям невозможно. Наибольшее распространение в технике свч получили два типа ступенчатых переходов: переход с максимально плоской частотной характеристикой и чебышевский переход.

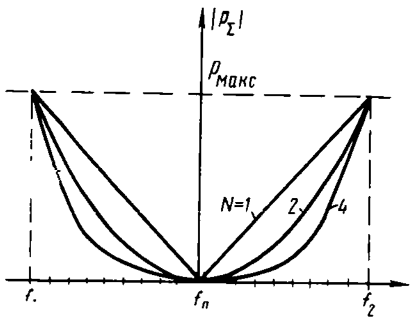


Рис. 19.4.3

Перейдем к решению задачи синтеза N-ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой, включенного между линиями с волновыми сопротивлениями $Z_в^{(1)}$ и $Z_в^{(2)}$. В полосе частот от f_1 до f_2 коэффициент отражения от входа перехода не должен превышать $\rho_{макс}$.

Коэффициент отражения от входа ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой в пределах полосы согласования задается в виде

$$|\rho_\Sigma| = A\,|\cos\beta l\,|^N, \tag{19.4.6}$$

где параметр A находится из условия, что на граничной частоте f_1 (см. рис. 19.4.3) полосы согласования $|\rho_\Sigma| = \rho_{макс}$, т. е.

$$A\,|\cos\beta_1 l\,|^N = \rho_{макс} \tag{19.4.7}$$

или

$$A = \frac{\rho_{макс}}{|\cos\beta_1 l\,|^N}. \tag{19.4.8}$$

Зависимость $|p_\Sigma|$ от частоты при различных значениях N представлена на рис. 19.4.3. Условие (19.4.7) должно выполняться также и на частоте f_2 (см. рис. 19.4.3). Поэтому

$$|\cos\beta_1 l| = |\cos\beta_2 l|, \tag{19.4.9}$$

что эквивалентно равенству

$$\beta_1 l + \beta_2 l = \pi. \tag{19.4.10}$$

Подставляя в (19.4.10) вместо β_1 и β_2 их значения $\beta_1 = \frac{2\pi}{\Lambda_1}$ и $\beta_2 = \frac{2\pi}{\Lambda_2}$, находим длину ступеньки

$$l = \frac{\Lambda_1\Lambda_2}{2(\Lambda_1 + \Lambda_2)} = \frac{\Lambda_0}{4}, \tag{19.4.11}$$

где

$$\Lambda_0 = \frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \tag{19.4.12}$$

длина волны в линии на некоторой частоте f_0, называемой центральной.

В линиях передачи, где энергия переносится волной TEM, $f_{\text{кр}} = 0$ и $\Lambda_1 = \lambda_1 = \frac{c}{f_1}$, $\Lambda_2 = \lambda_2 = \frac{c}{f_2}$. Соответственно длина волны $\Lambda_0 = \lambda_0$ равна

$$\lambda_0 = 2\,\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 2\,\frac{\frac{c}{f_1}\,\frac{c}{f_2}}{\frac{c}{f_1} + \frac{c}{f_2}} = \frac{c}{\frac{f_1 + f_2}{2}} = \frac{c}{f_0}, \tag{19.4.13}$$

т. е. частота f_0 совпадает в данном случае со средней частотой полосы согласования. В общем случае центральная частота f_0, на которой согласно (19.4.11) длина ступеньки равна четверти длины волны в линии, определяется из равенства (19.4.12).

Правая часть выражения (19.4.6) может быть преобразована к виду

$$|p_\Sigma| = A|\cos\beta l|^N = A\left|\left(\frac{e^{i\beta l} + e^{-i\beta l}}{2}\right)^N\right| = A\left|\frac{(1 + e^{-2i\beta l})^N}{2^N}\right| =$$

$$= \left|\frac{A}{2^N} + A\frac{N}{2^N}e^{-2i\beta l} + A\frac{N(N-1)}{2^N\,2!}e^{-4i\beta l} + \ldots + \frac{A}{2^N}e^{-2iN\beta l}\right|. \tag{19.4.14}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых экспоненциальных множителях в правых частях (19.4.2) и (19.4.6), находим коэффициенты отражения от ступенек:

. . .
(19.4.15)

Волновое сопротивление каждой из ступенек определяется из равенств (19.4.3).

Число ступенек в переходе можно определить следующим образом. Повысим частоту электромагнитных колебаний так, чтобы длина ступеньки стала равной $\frac{\Lambda}{2}$, т. е. $\beta l = \pi$. Как было показано в гл. 16, в произвольной линии передачи все сопротивления повторяются через $\Lambda/2$. Поэтому на этой частоте входное сопротивление N-й ступеньки (рис. 19.4.1) равно волновому сопротивлению линии, которая нагружает N-ю ступеньку, т. е. $Z_{в}^{(2)}$; входное сопротивление $(N-1)$-й ступеньки также равно $Z_{в}^{(2)}$, так как $(N-1)$-я ступенька нагружена на входное сопротивление N-й ступеньки и т. д. Следовательно, на рассматриваемой частоте ступенчатый переход эквивалентен непосредственному сочленению линий с волновым сопротивлением $Z_{в}^{(1)}$ и $Z_{в}^{(2)}$, т. е.

$$|p_{\Sigma}| = \left| \frac{Z_{в}^{(2)} - Z_{в}^{(1)}}{Z_{в}^{(2)} + Z_{в}^{(1)}} \right| = \left| \frac{Z_{в}^{(12)} - 1}{Z_{в}^{(12)} + 1} \right|. \tag{19.4.16}$$

Подставляя (19.4.16) в (19.4.6) и учитывая, что $\beta l = \pi$, получаем

$$\left| \frac{Z_{в}^{(12)} - 1}{Z_{в}^{(12)} + 1} \right| = \frac{p_{макс}}{|\cos \beta_1 l|^N}, \tag{19.4.17}$$

откуда находим число ступенек в переходе:

$$N = \frac{\lg \left[p_{макс} \left| \frac{Z_{в}^{(12)} + 1}{Z_{в}^{(12)} - 1} \right| \right]}{\lg |\cos \beta_1 l|}. \tag{19.4.18}$$

Из рис. 19.4.3 видно, что коэффициент отражения от входа ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой возрастает монотонно по мере приближения к граничным частотам полосы согласования. Поэтому фазовая характеристика этого перехода близка к линейной. Важным достоинством данного ступенчатого перехода является слабая зависимость его параметров от погрешностей, неизбежных при изготовлении. Это объясняется тем, что почти во всей полосе согласования коэффициент отражения от входа перехода существенно меньше заданной величины. Обычно рассчитывают ступенчатый переход на несколько бо́льшую полосу согласования, чем необходимо. Тогда небольшое увеличение отражений из-за погрешностей в изготовлении вызовет отражения, выше допустимых, лишь на частотах вне требуемой полосы согласования.

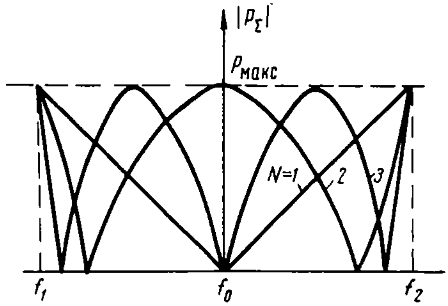


Рис. 19.4.4

Ступенчатый переход с максимально плоской характеристикой не является оптимальным по длине. Действительно, этот переход, по существу, в большей части полосы согласования имеет существенно лучшие параметры, чем это необходимо. Чем шире полоса частот, в пределах которой сохраняется малый уровень отражений, тем более плавным должен быть переход. Но более плавный переход неизбежно состоит из большего числа ступенек, чем менее плавный. Поэтому, чтобы получить ступенчатый переход меньшей длины, необходимо отказаться от монотонного характера изменения функции $|\rho_\Sigma|$ и перейти к колебательному, как показано на рис. 19.4.4.

Подобную характеристику имеет чебышевский ступенчатый переход, у которого

$$|\rho_\Sigma| = \rho_{макс}\left|T_N\left(\frac{\cos\beta l}{\cos\beta_1 l}\right)\right|, \qquad (19.4.19)$$

где

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \arccos x) & \text{при } |x| \leqslant 1 \\ \operatorname{ch}(N \operatorname{ar ch} x) & \text{при } |x| \geqslant 1 \end{cases} \qquad (19.4.20)$$

— полином Чебышева 1-го рода N-го порядка[1]). Зависимость $|\rho_\Sigma|$ от частоты при различных значениях N представлена на рис. 19.4.4.

Методика синтеза чебышевского перехода мало отличается от изложенной выше методики синтеза перехода с максимально плоской характеристикой. Поэтому не будем на ней останавливаться.

Можно доказать, используя свойства полиномов Чебышева, что при заданном перепаде волнового сопротивления, величине $\rho_{макс}$ и полосе согласования $(f_2 \div f_1)$ чебышевский ступенчатый переход обладает наименьшей по сравнению с любым другим переходом длиной. Недостатками чебышевского перехода являются нелинейность фазовой характеристики и существенная зависимость параметров от точности изготовления перехода. Последнее объясняет-

[1]) Со свойствами полиномов Чебышева можно подробно ознакомиться в [2].

ся тем, что у чебышевского перехода $|\rho_\Sigma| \approx \rho_{\text{макс}}$ не только на краях полосы согласования, но и на многих частотах в полосе согласования.

Изложенная здесь методика расчета переходов не учитывает влияния реактивных полей, образующихся в месте скачкообразного изменения поперечных размеров линии. На рис. 19.4.5 изображена эквивалентная схема ступеньки, образующейся при сочленении двух прямоугольных волноводов одинаковой ширины и разной высоты. Как видно, в данном случае влияние реактивных полей эквивалентно параллельному включению емкостного сопротивления в месте стыка волноводов.

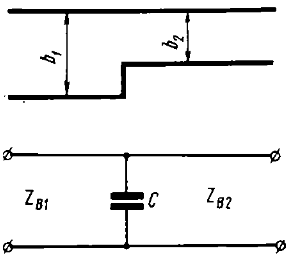


Рис. 19.4.5

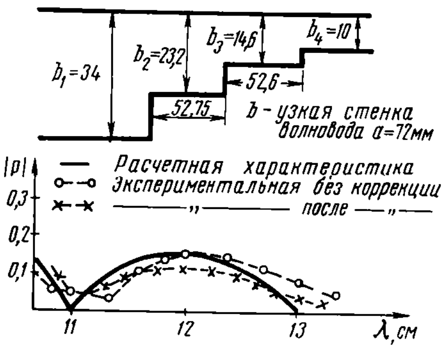


Рис. 19.4.6

Если реактивная проводимость ступенек $\mathrm{i}\,B_{\text{ст}}$ невелика, то, слегка изменив длину всех ступенек, можно добиться того, чтобы N-я ступенька трансформировала проводимость $\frac{1}{Z_{\text{в}}^{(2)}} + \mathrm{i}\,B_{\text{ст}}$ в чисто активную входную проводимость; $(N-1)$-я ступенька трансформировала входную проводимость N-й ступеньки плюс реактивную проводимость $\mathrm{i}\,B_{\text{ст}}$ также в чисто активную входную проводимость и т. д.

На рис. 19.4.6 сплошной линией показана расчетная характеристика волноводного двухступенчатого чебышевского перехода. Пунктиром нанесена экспериментальная характеристика перехода без коррекции длины ступенек, штрих-пунктирная — экспериментальная характеристика перехода после коррекции длины ступенек. Эскиз перехода с указанием размеров представлен на рис. 19.4.6. Расчетная длина обеих ступенек до коррекции равнялась 54,3 *мм*.

19.5. Плавные переходы

В плавном переходе, в отличие от ступенчатого, волновое сопротивление линии меняется не скачками, а непрерывно вдоль всей длины перехода, т. е. плавный переход, по существу, является неоднородной линией передачи, в которой волновое сопротивление $Z_в(z)$ является функцией продольной координаты.

Рассматривая плавный переход как предельный случай ступенчатого перехода со ступеньками бесконечно малой длины и высоты (рис. 19.5.1), определим коэффициент отражения от входа плав-

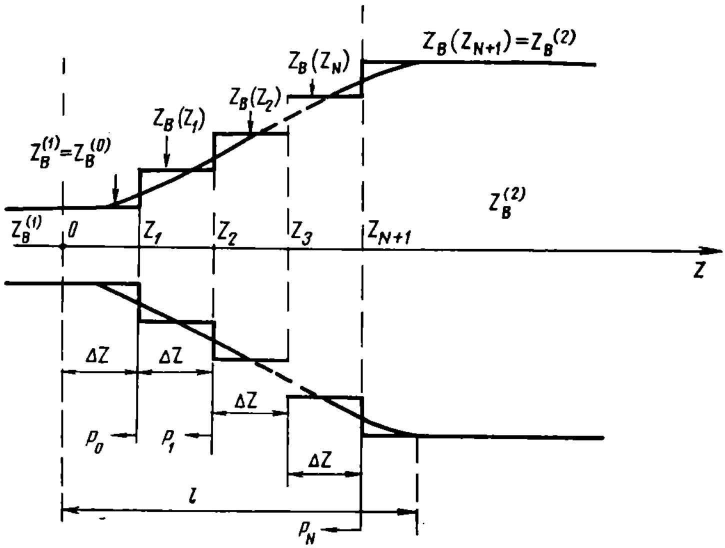


Рис. 19.5.1

ного перехода, включенного между линиями с волновыми сопротивлениями $Z_в^{(1)}$ и $Z_в^{(2)}$. По аналогии с (19.4.2), пренебрегая повторными отражениями от ступенек, получаем

$$\rho_\Sigma = \sum_{n=0}^{N} \rho_n \, e^{-2i\varphi_n}, \tag{19.5.1}$$

где

$$\rho_0 = \frac{Z_в(0+\Delta z) - Z_в(0)}{Z_в(0+\Delta z) + Z_в(0)}; \tag{19.5.2}$$

$$\rho_1 = \frac{Z_в(z_1+\Delta z) - Z_в(z_1)}{Z_в(z_1+\Delta z) + Z_в(z_1)}; \tag{19.5.3}$$

. . . .

$$\rho_N = \frac{Z_в(z_N+\Delta z) - Z_в(z_N)}{Z_в(z_N+\Delta z) + Z_в(z_N)}. \tag{19.5.4}$$

При записи (19.5.2)—(19.5.4) приняты следующие обозначения (см. рис. 19.5.1):

$$Z_в(0)=Z_в^{(1)};\quad Z_в(0+\Delta z)=Z_в(z_1);$$

$$Z_в(z_1+\Delta z)=Z_в(z_2);\quad \ldots;\ Z_в(z_N+\Delta z)=Z_в^{(2)},$$

а $Z_в(z_1)$, $Z_в(z_2)$, ..., $Z_в(z_N)$ — волновые сопротивления соответственно первой, второй, ..., N-й ступенек.

Чтобы не усложнять изложения, ограничимся рассмотрением частного случая плавного перехода, в котором коэффициент распространения β не зависит от координаты z. Это условие выполняется в плавных переходах, изготовленных из линий с волной *TEM* (двухпроводная, коаксиальная, полосковая и др.), в переходах из прямоугольных волноводов, если меняется только размер узкой стенки и т. д. Плавный переход из прямоугольных волноводов, в котором меняется размер широкой стенки, этому условию не удовлетворяет.

С учетом принятого ограничения набег по фазе, получаемый волной при прохождении каждой из ступенек длиной Δz, равен:

$$\varphi_0=\beta\Delta z=\beta z_1; \tag{19.5.5}$$

$$\varphi_1=2\beta\Delta z=\beta z_2; \tag{19.5.6}$$

$$\cdots$$

$$\varphi_N=(N+1)\beta\Delta z=\beta z_N. \tag{19.5.7}$$

Изменение волнового сопротивления от ступеньки к ступеньке можно приближенно определить, если учесть, что при $\Delta z\to 0$ в плавном переходе

$$Z_в(z+\Delta z)\approx Z_в(z)+Z'_в(z)\,\Delta z. \tag{19.5.8}$$

Выражение (19.5.8) получено путем разложения функции $Z_в(z+\Delta z)$ в степенной ряд, причем все члены этого ряда $\frac{Z''_в(z)}{2!}(\Delta z)^2$, $\frac{Z'''_в(z)}{3!}(\Delta z)^3$ и т. д. опущены, ввиду их малости при $\Delta z\to 0$. В достаточно плавных переходах

$$Z'_в(z)\,\Delta z\ll Z_в(z), \tag{19.5.9}$$

что позволяет равенства (19.5.2)—(19.5.4) записать в виде:

$$p_0\approx\frac{Z'_в(0)}{2Z_в(0)}\,\Delta z; \tag{19.5.10}$$

$$p_1\approx\frac{Z'_в(z_1)}{2Z_в(z_1)}\,\Delta z; \tag{19.5.11}$$

$$\cdots$$

$$p_N\approx\frac{Z'_в(z_N)}{2Z_в(z_N)}\,\Delta z. \tag{19.5.12}$$

Подставляя (19.5.5)—(19.5.7) и (19.5.10)—(19.5.12) в (19.5.1), получаем

$$\rho_{\Sigma}=\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{Z'_{\text{в}}(z_n)}{2Z_{\text{в}}(z_n)}\,e^{-2i\beta z_n}\right]\Delta z. \qquad (19.5.13)$$

В пределе при $\Delta z \to 0$ и $N \to \infty$ сумма в правой части (19.5.13) переходит в интеграл и выражение (19.5.13) принимает вид

$$\rho_{\Sigma}=\int_0^l \frac{Z'_{\text{в}}(z)}{2Z_{\text{в}}(z)}\,e^{-2i\beta z}\,dz, \qquad (19.5.14)$$

где l — длина плавного перехода.

Функцию $Z_{\text{в}}(z)$, т. е. фактически форму плавного перехода, необходимо подобрать так, чтобы в заданной полосе частот модуль коэффициента отражения ρ_{Σ} не превышал допустимой величины $\rho_{\text{макс}}$:

$$|\rho_{\Sigma}| \leqslant \rho_{\text{макс}}. \qquad (19.5.15)$$

Интеграл в правой части равенства (19.5.14) легко вычисляется, если функция $Z_{\text{в}}(z)$ имеет вид

$$Z_{\text{в}}(z)=Z_{\text{в}}^{(1)}\,e^{\nu\left[z+l\sum\limits_{m=1}^{M}a_m\sin\frac{2m\pi z}{l}\right]}. \qquad (19.5.16)$$

В этом случае

$$\frac{Z'_{\text{в}}(z)}{2Z_{\text{в}}(z)}=\frac{\nu}{2}\left[1+\sum_{m=1}^{M}2m\pi a_m\cos\frac{2m\pi z}{l}\right]. \qquad (19.5.17)$$

В сечении $z=l$ плавный переход нагружен на сопротивление $Z_{\text{в}}^{(2)}$. Очевидно, что волновое сопротивление плавного перехода в этом сечении должно быть равно $Z_{\text{в}}^{(2)}$, т. е. $Z_{\text{в}}(l)=Z_{\text{в}}^{(2)}$. Подставляя в (19.5.16) это значение $Z_{\text{в}}(l)$ при $z=l$ и логарифмируя, определяем величину ν:

$$\nu=\frac{1}{l}\ln\frac{Z_{\text{в}}^{(2)}}{Z_{\text{в}}^{(1)}}=\frac{1}{l}\ln Z_{\text{в}}^{(12)}. \qquad (19.5.18)$$

Если подставить (19.5.17) в (19.5.14) и выполнить операцию интегрирования, то после несложных преобразований получаем

$$\rho_{\Sigma}=e^{-i\beta l}\ln Z_{\text{в}}^{(12)}\,\frac{\sin\beta l}{2\beta l}\left\{1+\sum_{m=1}^{M}2m\pi a_m\frac{(\beta l)^2}{(\beta l)^2-(m\pi)^2}\right\}. \qquad (19.5.19)$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_M$, входящие в (19.5.19), необходимо подобрать так, чтобы в требуемой полосе частот выполнялось неравенство (19.5.15). Если эти коэффициенты известны, то зависимость волнового сопротивления $Z_в(z)$ плавного перехода от координаты z описывается равенством (19.5.16). Рассмотрим два частных случая.

Экспоненциальный плавный переход. Такое название получил переход, в котором

$$Z_в(z)=Z_в^{(1)}\,e^{\nu z}\,. \tag{19.5.20}$$

Формула (19.5.20) следует из (19.5.16), если положить в (19.5.16) все коэффициенты a_m равными нулю. Полагая $a_m=0$ в

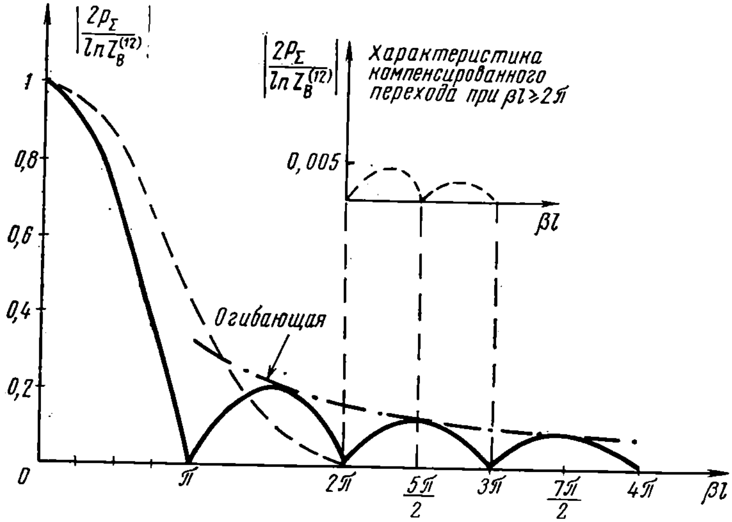


Рис. 19.5.2

выражении (19.5.19), находим модуль коэффициента отражения от входа экспоненциального перехода:

$$|p_\Sigma|=\frac{|\ln Z_в^{(12)}|}{2}\left|\frac{\sin\beta l}{\beta l}\right|. \tag{19.5.21}$$

Зависимость величины $\left|\dfrac{2p_\Sigma}{\ln Z_в^{(12)}}\right|$ от βl изображена на рис. 19.5.2 сплошной линией. На этом же рисунке штрих-пунктирной линией нанесена огибающая зависимости $\left|\dfrac{2p_\Sigma}{\ln Z_в^{(12)}}\right|$ от βl, которая получается, если в (19.5.21) положить $|\sin\beta l|=1$. Как видно из рисунка, по мере укорочения рабочей длины волны отражения от входа экспоненциального перехода уменьшаются в первом приближении обратно пропорционально $1/\beta l=\dfrac{\Lambda}{2\pi l}$. Поэтому неравенство (19.5.19) заведомо выполняется, если на некоторой частоте

$$\frac{\left|\ln Z_в^{(12)}\right|}{2}\frac{1}{\beta_0 l} \leqslant \rho_{макс}. \qquad (19.5.22)$$

или

$$l \geqslant \Lambda_0 \frac{\left|\ln Z_в^{(12)}\right|}{4\pi \rho_{макс}}. \qquad (19.5.23)$$

Так как по мере увеличения величины βl коэффициент отражения от входа перехода уменьшается (см. рис. 19.5.2), то неравенство (19.5.15) удовлетворяется на всех частотах $f \geqslant f_0 (\Lambda < \Lambda_0)$, если длина перехода выбрана в соответствии с (19.5.23).

Экспоненциальный плавный переход при значительных перепадах волнового сопротивления имеет весьма большую длину. Например, при $Z_в^{(12)} = e^2 \approx 7{,}4$ и $\rho_{макс} = 0{,}05$ согласно неравенству (19.5.23)

$$l \geqslant 3\Lambda_0. \qquad (19.5.24)$$

Достоинством экспоненциального перехода является простота его конфигурации.

Компенсированный экспоненциальный переход. Такое название получил переход, в котором

$$Z_в(z) = Z_в^{(1)} e^{\nu\left(z + a_1 l \sin\frac{2\pi z}{l}\right)} \qquad (19.5.25)$$

Формула (19.5.25) следует из (19.5.16), если положить в (19.5.16) все коэффициенты, кроме a_1, равными нулю. Модуль коэффициента отражения от входа компенсированного перехода согласно (19.5.19) равен

$$|\rho_\Sigma| = \left|\ln Z_в^{(12)}\right| \left|\frac{\sin\beta l}{2\beta l}\right| \left|1 + 2\pi a_1 \frac{(\beta l)^2}{(\beta l)^2 - \pi^2}\right|. \qquad (19.5.26)$$

Хорошие результаты получаются в том случае, когда коэффициент a_1 выбран таким образом, чтобы в какой-либо из точек кривой на рис. 19.5.2, где у обычного экспоненциального перехода имеет место всплеск коэффициента отражения $\left(\beta l = \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \text{ и т. д.}\right)$, у компенсированного экспоненциального перехода имело место полное отсутствие отражений. На рис. 19.5.2 пунктиром показана зависимость величины $\left|\frac{2\rho_\Sigma}{\ln Z_в^{(12)}}\right|$ от βl, когда коэффициент a_1 определен из условия, что $|\rho_\Sigma| = 0$ при $\beta l = \frac{5\pi}{2}$, т. е. когда выполняется равенство

$$1 + 2\pi a_1 \frac{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - \pi^2} = 0. \qquad (19.5.27)$$

Отсюда находим $a_1 = -0{,}134$. Участок пунктирной кривой на отрезке $2\pi \leqslant \beta l \leqslant 3\pi$ показан на рис. 19.5.2 отдельно в увеличенном масштабе. При $Z_{\text{в}}^{(12)} = e^2$ и $\rho_{\text{макс}} \leqslant 0{,}005$, как показывает расчет, длина компенсированного экспоненциального перехода приблизительно равна Λ_0, тогда как обычный экспоненциальный переход при тех же значениях $Z_{\text{в}}^{(12)}$ и $\rho_{\text{макс}}$ согласно (19.5.23) имеет длину 30 Λ_0.

Процесс улучшения формы частотной характеристики можно продолжить, подбирая в (19.5.19) коэффициенты $a_2, a_3, \ldots, a_M$. Однако, как показывает расчет, при этом выигрыш в длине перехода оказывается небольшим по сравнению с рассмотренным случаем $a_1 \neq 0$, $a_2 = a_3 = \ldots a_M = 0$. В то же время конфигурация перехода существенно усложняется.

Кроме рассмотренных выше переходов, на практике применяют плавные переходы с вероятностной, чебышевской и некоторыми другими частотными характеристиками [33]. Чебышевский плавный переход получается как предельный случай чебышевского ступенчатого перехода, в котором неограниченно увеличивается число ступенек и одновременно стремится к нулю длина ступеньки. Аналогичным образом от ступенчатого перехода с максимально плоской характеристикой можно перейти к плавному переходу, у которого характеристика коэффициента передачи близка к кривой Гаусса, известной из теории вероятности. Как и в случае ступенчатых переходов, чебышевский плавный переход является самым коротким из всех плавных переходов при заданном значении $\rho_{\text{макс}}$ и перепаде волновых сопротивлений. Сравнение чебышевского и компенсированного экспоненциального переходов показывает, что последний лишь незначительно длиннее чебышевского. Например, при $Z_{\text{в}}^{(12)} = e^2$ и $\rho_{\text{макс}} \leqslant 0{,}03$ у чебышевского перехода $\dfrac{l}{\Lambda_0} = 0{,}7$, а у компенсированного $\dfrac{l}{\Lambda_0} = 0{,}75$.

Представляет интерес сравнить плавные и ступенчатые переходы с точки зрения их длины. Если сопоставить частотные характеристики переходов (например, рис. 19.5.2 и 19.4.3, 19.4.4), то легко заметить, что в плавных переходах по мере укорочения рабочей длины волны коэффициент отражения непрерывно уменьшается. Следовательно, плавный переход обеспечивает хорошее согласование в значительно более широкой полосе частот, чем это требуется. Поэтому в соответствии с общими идеями, изложенными в разд. 19.4, плавный переход всегда длиннее, чем ступенчатый, при заданном значении $\rho_{\text{макс}}$ и $Z_{\text{в}}^{(12)}$.

Проблема широкополосного согласования комплексных нагрузок рассмотрена в следующей главе.

ГЛАВА 20

ФИЛЬТРЫ

20.1. Классификация фильтров

Идеальным фильтром называется четырехполюсник, модуль **коэффициента** затухания которого $|t_{11}|$ равен единице в заданной **полосе частот** (полоса пропускания) и бесконечно велик на всех **частотах вне** этой полосы (полоса заграждения). Напомним, что **коэффициент** затухания — величина, обратная коэффициенту передачи s_{21} четырехполюсника, и поэтому $|t_{11}| \geqslant 1$.

По **взаимному** расположению полос пропускания и заграждения **фильтры** делятся на *фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры* ***верхних частот*** *(ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ)* и *режекторные* ***фильтры (РФ)***. Характеристики идеальных фильтров каждого типа **приведены** на рис. 20.1.1. Полосы пропускания на этих рисунках **заштрихованы**.

В полосе заграждения энергия электромагнитной волны либо **отражается от** входа фильтра (фильтр отражающего типа), либо

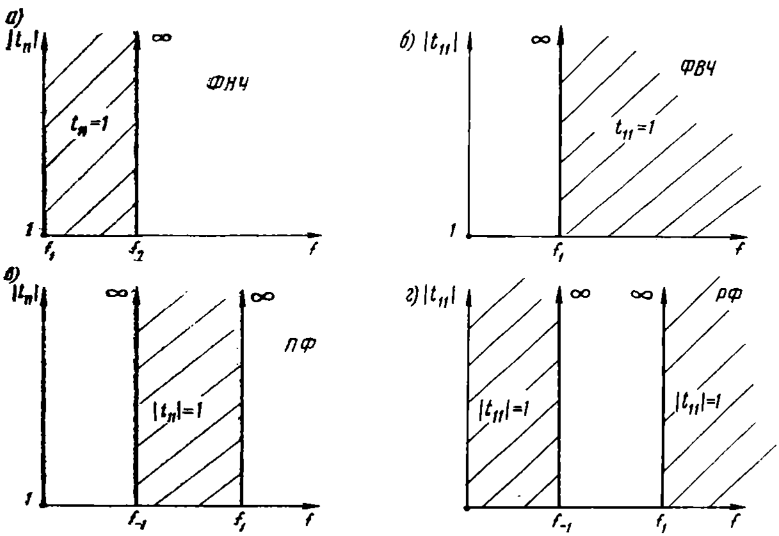


Рис. 20.1.1

поглощается в элементах фильтра (фильтр поглощающего типа).

Реализация фильтров с идеально прямоугольными частотными характеристиками, изображенными на рис. 20.1.1, невозможна, поэтому частотные характеристики фильтров всегда имеют вид плавных кривых. В зависимости от выполнения фильтров форма этих кривых в бо́льшей или ме́ньшей степени приближается к прямоугольной. Затухание фильтров обычно выражают в децибелах:

$$B_{\Phi}=10\lg|t_{11}|^2. \tag{20.1.1}$$

Полная величина потерь, вносимых фильтром, складывается из тепловых потерь и потерь, вызванных отражением от входа фильтра.

20.2. Эквивалентная схема фильтра отражающего типа

Фильтры отражающего типа состоят из реактивных элементов, сопротивление которых подбирается таким образом, чтобы на частотах полосы пропускания волны, отраженные от этих элементов, компенсировали друг друга на входе фильтра. Входное сопротивление фильтра в полосе пропускания близко к волновому сопротивлению линии. В пределах полосы заграждения компенсация отсутствует. Ослабление сигнала на выходе фильтра определяется почти полным отражением энергии от входа фильтра. Входное сопротивление фильтра в полосе заграждения близко к чисто реактивному.

Широкое применение в технике сверхвысоких частот получили так называемые лестничные отражающие фильтры. Эквивалентная схема таких фильтров совпадает со схемой лестничных фильтров, выполненных из реактивных элементов с сосредоточенными постоянными (рис. 20.2.1). Для реализации лестничных фильтров необходимы элементы линий передачи, эквивалентные по своим

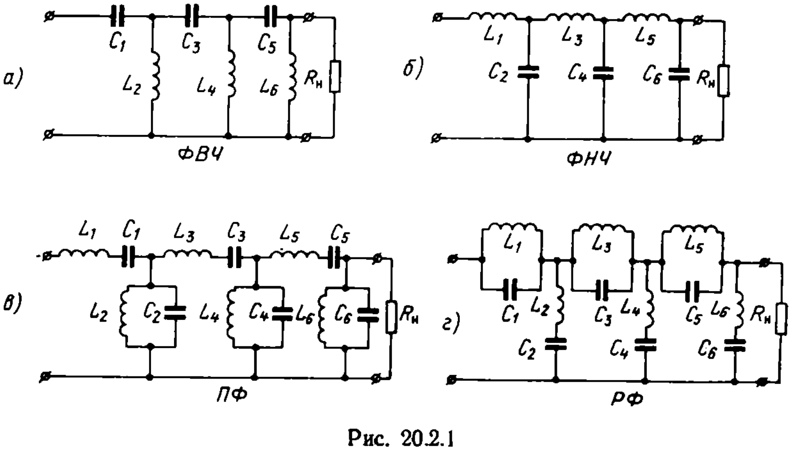


Рис. 20.2.1

параметрам сосредоточенным индуктивностям, емкостям, последовательным и параллельным контурам. В разд. 18.7 было показано, что элементом, соответствующим параллельному контуру, может служить проходной резонатор. Элементами, соответствующими сосредоточенным индуктивностям и емкостям, являются диафрагмы, штыри (см. разд. 17.2 и 17.3) и др. В связи с этим синтез лестничного фильтра сводится к решению двух задач:

— синтезу низкочастотной эквивалентной схемы фильтра, обладающей требуемыми характеристиками;

— реализации полученной эквивалентной схемы, т. е. замене сосредоточенных индуктивностей и емкостей эквивалентной схемы отрезками линий передачи, резонаторами, штырями, диафрагмами и другими неоднородностями.

Синтез фильтров по низкочастотной эквивалентной схеме дает хорошие результаты только для сравнительно узкополосных систем, так как близкая аналогия между неоднородностями и эквивалентными схемами из сосредоточенных постоянных сохраняется в относительно узкой полосе частот.

Методы синтеза низкочастотной эквивалентной схемы по заданным характеристикам фильтра подробно рассматриваются в курсе теории цепей [32, 37]. Поэтому ниже основное внимание обращено на реализацию эквивалентной схемы.

20.3. Реализация лестничного фильтра

Методы реализации низкочастотной эквивалентной схемы из элементов и неоднородностей линий передачи могут быть самыми разнообразными. Например, в качестве индуктивного элемента можно использовать индуктивную диафрагму, а можно и индуктивный штырь. Индуктивное входное сопротивление имеет также короткозамкнутый отрезок линии короче четверти длины волны. Емкостные элементы в фильтре реализуются в виде емкостных диафрагм, емкостных штырей, короткозамкнутых отрезков линий короче полуволны, но длиннее четверти длины волны, и др.

Выбор той или иной конструкции элемента в фильтре зависит от множества разнообразных факторов, основными из которых являются: простота конструкции фильтра, малые потери в его элементах, простота настройки фильтра и др.

Подробному анализу различных способов реализации фильтров посвящена весьма обширная специальная литература [19, 32]. Поэтому ограничимся рассмотрением одного достаточно широко применяемого на практике варианта фильтра: полосового фильтра, выполненного из отрезков прямоугольного волновода. Эквивалентная схема такого фильтра изображена на рис. 20.2.1*в*.

Основным элементом полосового фильтра, выполненного из отрезков прямоугольных волноводов, является рассмотренный в разд. 18.7 проходной резонатор, эквивалентный параллельному контуру, включенному в линию параллельно (см. рис. 18.7.4).

В качестве последовательного контура, включенного в линию последовательно, также используется проходной резонатор, ко входу и выходу которого подключены отрезки линии, имеющие длину в четверть волны на центральной частоте полосы пропускания фильтра (рис. 20.3.1). Действительно, как было показано

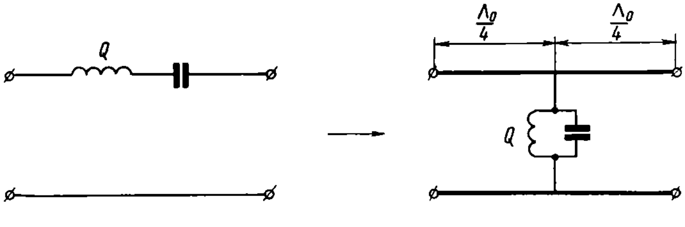


Рис. 20.3.1

в гл. 19 (см. ф-лу (19.3.3)), нормированное входное сопротивление четвертьволнового отрезка, нагруженного на сопротивление $Z'_н$, равно

$$Z'_{вх} = \frac{1}{Z'_н} = Y'_н. \tag{20.3.1}$$

Нагрузкой четвертьволнового отрезка в данном случае является параллельный контур, нормированная входная проводимость которого, как известно, равна

$$Y'_н = \mathrm{i}\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right), \tag{20.3.2}$$

где Q — нагруженная добротность контура.

Нормированное входное сопротивление последовательного контура описывается выражением

$$Z'_{вх} = \mathrm{i}\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \tag{20.3.3}$$

Сравнивая равенства (20.3.2) и (20.3.3), убеждаемся в их полной тождественности. Следовательно, проходной резонатор, ко входу и выходу которого подключены четвертьволновые отрезки линии, эквивалентен последовательному контуру, включенному в линию последовательно. Отметим, что равенство (20.3.1) выполняется только при длине трансформирующего отрезка линии, равной четверти волны, т. е. на одной определенной частоте. Однако, как уже отмечалось в разд. 20.2, синтез фильтра по низкочастотной эквивалентной схеме вообще применим лишь для относительно узкополосных фильтров. Поэтому в первом приближении изменением электрической длины четвертьволнового отрезка можно пренебречь.

Коэффициент передачи и соответственно величина вносимого фильтром затухания зависят от числа резонаторов и их нагруженной добротности. При расчете полосового фильтра число резонаторов и их нагруженные добротности определяются из условия, чтобы затухание в полосе пропускания фильтра ($f_{-1}<f<f_1$) не превышало заданной величины $B_{\text{ф макс}}$, а в полосе заграждения ($f>f_2$ и $f<f_{-2}$) было не меньше заданной величины $B_{\text{ф мин}}$ (рис. 20.3.2). Иногда предъявляются требования к линейности фазовой характеристики фильтра в полосе пропускания. Удовлетворить указанным требованиям можно различными способами.

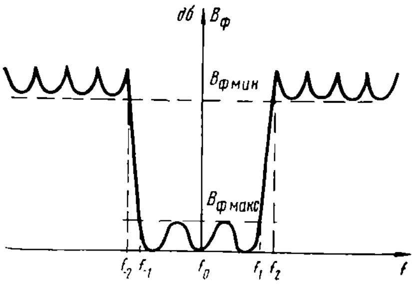


Рис. 20.3.2

В технике сверхвысоких частот наибольшее распространение получили два вида полосовых фильтров: фильтры с максимально плоской характе-

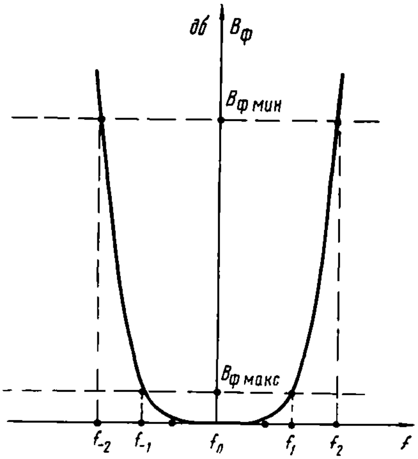


Рис. 20.3.3

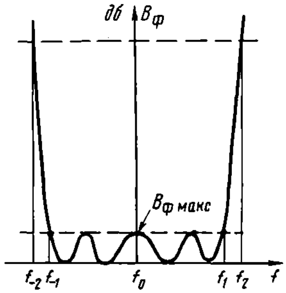


Рис. 20.3.4

ристикой, у которых потери возрастают монотонно по мере отклонения частоты от средней частоты f_0 полосы пропускания (рис. 20.3.3), и фильтры с чебышевской характеристикой, у которых зависимость величины потерь от частоты в полосе пропускания носит осциллирующий характер (рис. 20.3.4). Аналогичные характеристики уже рассматривались в предыдущей главе. Так же, как и в случае ступенчатого перехода, фильтр с чебышевской характеристикой содержит меньшее число элементов, чем фильтр с максимально плоской характеристикой при тех же электрических параметрах.

Уменьшение числа элементов в фильтре с чебышевской характеристикой, по существу, является следствием отказа от монотонного изменения функции $|t_{11}|^2$ и перехода к колебательному характеру изменения $|t_{11}|^2$ в полосе пропускания фильтра. Дальнейшее уменьшение числа элементов может быть достигнуто путем отказа от монотонного увеличения затухания в полосе заграждения и перехода к колебательному как в полосе пропускания, так и в полосе заграждения (рис. 20.3.2). Однако, как показывает анализ, уменьшение числа элементов в фильтре с такой характеристикой по сравнению с чебышевским фильтром получается весьма небольшим, в то время как синтез и практическая реализация фильтра с подобной характеристикой существенно усложняются.

Величина затухания, вносимого фильтром с максимально плоской характеристикой, описывается выражением [32]:

$$B_ф = 10\lg\left[1 + h^2\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)^{2n}\right], \tag{20.3.4}$$

где

$$\eta = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}; \quad \eta_1 = \frac{f_1}{f_0} - \frac{f_0}{f_1}; \quad h^2 = 10^{\frac{B_{фмакс}}{10}} - 1.$$

Число резонаторов определяется из равенства

$$n = \frac{\lg\sqrt{\dfrac{10^{\frac{B_{ф\,мин}}{10}} - 1}{10^{\frac{B_{фмакс}}{10}} - 1}}}{\lg\dfrac{\eta_2}{\eta_1}}, \tag{20.3.5}$$

где $\eta_2 = \frac{f_2}{f_0} - \frac{f_0}{f_2}$.

В случае фильтра с чебышевской характеристикой:

$$B_ф = 10\lg\left[1 + h^2 T_n^2\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)\right]; \tag{20.3.6}$$

$$n = \frac{\operatorname{ar\,ch}\sqrt{\dfrac{10^{\frac{B_{фмин}}{10}} - 1}{10^{\frac{B_{ф\,макс}}{10}} - 1}}}{\operatorname{ar\,ch}\dfrac{\eta_2}{\eta_1}}, \tag{20.3.7}$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева первого рода n-го порядка (см. ф-лу (19.4.20)).

Отметим, что в ф-лах (20.3.5) и (20.3.7) $B_{ф\,макс}$ и $B_{ф\,мин}$ — величины затухания в децибелах.

Необходимые нагруженные добротности резонаторов в фильтре с максимально плоской характеристикой определяются из равенства

$$Q_m = \frac{\sqrt[n]{h}}{\eta_1} \sin \frac{2m-1}{2n} \pi, \qquad (20.3.8)$$

где m — порядковый номер резонатора ($m=1, 2, 3, ..., n$). Формулы для расчета нагруженной добротности фильтра с чебышевской характеристикой существенно сложнее. В настоящее время опубликованы обширные таблицы [33], из которых можно определить величины Q_m при различных значениях n и h.

Как следует из выражения (18.7.15), нагруженные добротности Q_m проходных резонаторов в фильтре определяются величиной модуля коэффициента отражения $|s_{11}|$ от неоднородностей, включенных на входе и выходе резонатора.

Находим величину $|s_{11}|_m$

$$|s_{11}|_m = -A_m + \sqrt{1 + A_m^2}, \qquad (20.3.9)$$

где

$$A_m = \frac{1}{2Q_m} \frac{\beta_0 L}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} . \qquad (20.3.10)$$

Чем выше необходимая нагруженная добротность Q_m резонатора, тем ближе согласно (20.3.9) величина $|s_{11}|_m$ к единице.

При расчете модуля коэффициента отражения обычно пренебрегают тем, что длина резонатора L на резонансной частоте несколько отличается от полуволновой (см. ф-лу (18.7.9). Поэтому в (20.3.10) можно положить $\beta_0 L = \pi$.

Требуемые значения коэффициента отражения могут быть реализованы с помощью различных неоднородностей: диафрагм, штырей и др. В волноводных фильтрах чаще всего применяют резонаторы, на входе и выходе которых включены решетки из индуктивных штырей (см. рис. 18.7.4). Диаметр штырей в решетке можно определить либо по экспериментально снятым зависимостям величины $|s_{11}|$ от числа штырей и их диаметра [33], либо используя результаты теоретического анализа [22]. При величине нагруженной добротности резонатора до 25—35 решетку целесообразно выполнить из двух штырей. В резонаторах с нагруженной добротностью от 40 до 80 решетка обычно выполняется из трех стержней. При более высоких добротностях число стержней в решетках соответственно увеличивается.

Общий вид трехзвенного волноводного полосового фильтра с четвертьволновыми отрезками и его эквивалентная схема показаны на рис. 20.3.5. Фильтр выполняется в виде отрезка волновода, в котором на определенных расстояниях друг от друга впаиваются решетки из индуктивных штырей. Внутренняя поверхность волновода часто покрывается тонким слоем серебра. Из-за неизбежных при изготовлении погрешностей резонансные частоты резонаторов в фильтре могут отличаться от требуемой. Поэтому для настройки в каждый резонатор вводится настроечный емкостный штырь, ввинчиваемый через широкую стенку волновода (рис. 20.3.5). Особое внимание при изготовлении резонаторов следует обращать на идентичность решеток из штырей на входе и выходе резонатора. Даже небольшое различие в коэффициентах отражения от каждой из решеток приводит к тому, что коэффициент передачи проходного резонатора на резонансной частоте становится меньше единицы. Это может привести к существенному увеличению потерь в фильтре. Радиусы штырей в обеих решетках должны отличаться не более чем на 2÷3%, а расстояния между штырями в решетках должны выдерживаться с точностью до 0,4%. При тщательном изготовлении фильтра расхождение между экспериментальными и расчетными данными оказывается весьма незначительным.

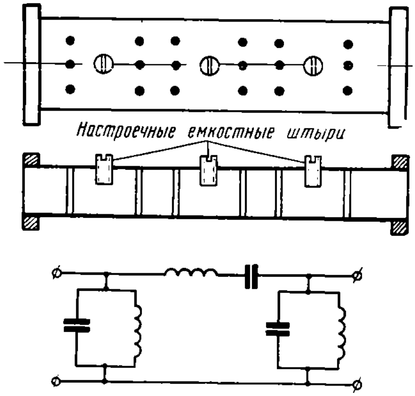


Рис. 20.3.5

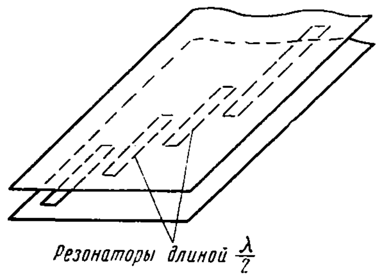


Рис. 20.3.6

В коаксиальных и полосковых линиях в качестве проходного резонатора используется резонатор, изображенный на рис. 18.7.5. Нагруженная добротность подобного резонатора зависит от величины зазора между отрезками внутренних проводников линий. Чем меньше этот зазор, тем больше торцевая емкость между проводниками и тем сильнее связь линии с резонатором, т. е. с уменьшением зазора нагруженная добротность падает. Так как площадь торцевой поверхности мала, то часто для получения необходимой емкости требуются весьма малые зазоры. Но при этом существенно усложняется процесс производства и настройки фильтра, поскольку при малом зазоре даже небольшие погрешности в его величине сильно влияют на торцевую емкость, а следовательно, и на нагруженную добротность резонатора. Поэтому чаще применяют полосковые фильтры, в которых проходные резонаторы расположены параллельно друг другу и основной линии (рис. 20.3.6).

На рис. 20.3.6 не показаны диэлектрические пластины, поддерживающие внутренние полоски. Область связи в таких конструкциях существенно длиннее, что позволяет оставлять достаточно большой зазор между проводниками.

В фильтре, изображенном на рис. 20.3.6, резонаторами являются разомкнутые на обоих концах полуволновые отрезки линии. В фильтре на встречных штырях, изображенном на рис. 20.3.7, применены резонаторы, нагруженные на одном конце на емкость и замкнутые накоротко на другом конце. Как было показано в гл. 18, длина таких резонаторов зависит от величины торцевой емкости (см. ф-лу (18.6.6)) и не превышает четверти длины волны.

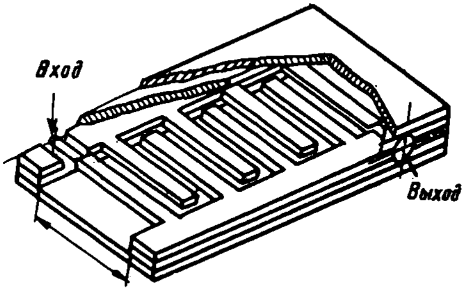


Рис. 20.3.7

В качестве основного элемента волноводных режекторных фильтров широко применяют объемный резонатор, подключенный к основному волноводу, как показано на рис. 20.3.8*а*. Из рисунка видно, что в резонаторе параллельно индуктивной стержневой диафрагме включен короткозамкнутый отрезок линии длиной l.

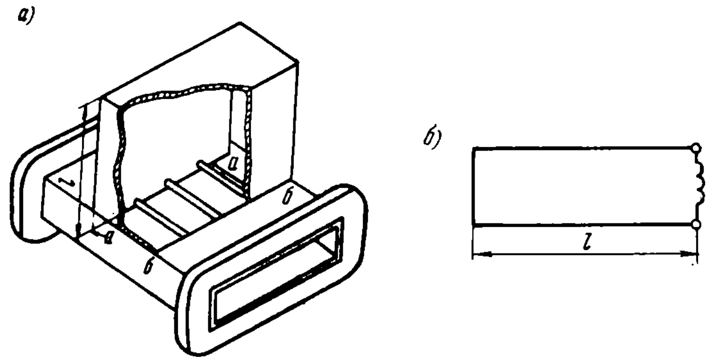


Рис. 20.3.8

Эквивалентная схема резонатора имеет вид, изображенный на рис. 20.3.8*б*. Резонанс имеет место, когда входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии противоположно по знаку и равно по величине реактивному сопротивлению индуктивной диафрагмы. Поэтому короткозамкнутый отрезок должен обладать емкостным входным сопротивлением и соответственно его длина больше четверти, но меньше полуволны в волноводе. Если на входе резонатора включено емкостное реактивное сопротивление (например, емкостная диафрагма), длина короткозамкнутого отрезка не превышает четверти волны в волноводе.

На резонансной частоте, если пренебречь потерями в резонаторе, входное сопротивление резонатора как параллельного контура равно бесконечности, что соответствует разрыву цепи между сечениями *аа* и *бб* основного волновода (рис. 20.3.8*а*).

В результате происходит практически полное отражение энергии. Путем включения подобных резонаторов на расстоянии, равном $\frac{\Lambda}{4}+n\frac{\Lambda}{2}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, можно получить многозвенный режекторный фильтр, эквивалентная схема которого изображена на рис. 20.2.1*г*.

20.4. Применение фильтров для широкополосного согласования комплексных сопротивлений

Для согласования комплексных нагрузок применяют фильтры отражающего типа, в которых последним элементом является реактивная часть сопротивления нагрузки. Полоса пропускания полученного таким образом фильтра является полосой согласования.

Предположим, что эквивалентная схема нагрузки, подлежащей согласованию, имеет вид, изображенный на рис. 20.4.1. Если па-

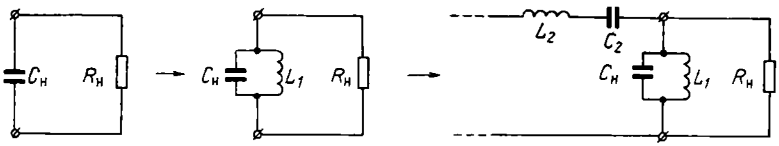


Рис. 20.4.1

раллельно емкости $C_н$ включить индуктивность L_1 так, чтобы на центральной частоте ω_0 полосы согласования выполнялось равенство

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{C_н L_1}}, \qquad (20.4.1)$$

то емкость $C_н$ вместе с индуктивностью L_1 образует последний параллельный контур полосового фильтра (рис. 20.2.1*в*). Этот контур имеет вполне определенную нагруженную добротность, так как величины $C_н$ и $R_н$ заданы, а величина L_1 находится из (20.4.1). Поэтому добротности всех остальных контуров в схеме на рис. 20.2.1*в* должны определяться из условия получения полосового фильтра, в котором последний контур имеет требуемую добротность. Но добротности всех контуров фильтра, как следует из приведенных в разд. 20.2 данных, однозначно связаны с полосой пропускания фильтра и максимальным значением коэффициента отражения от входа фильтра в этой полосе. Поэтому если добротность хотя бы одного из контуров фильтра задана, то между полосой пропускания фильтра и максимальным значением коэффициента отражения существует вполне определенное соотношение, естественно различное для фильтров с чебышевской и максимально плоской характеристикой.

Однако в любом случае, чем шире заданная полоса частот согласования, тем больше максимальные значения коэффициента отражения в этой полосе и, наоборот, чем выше требования к согласованию, тем у́же полоса частот согласования. Например, если нагруженная добротность последнего контура Q_n и согласование осуществляются фильтром с максимально плоской характеристикой, то согласно (20.3.8) относительная полоса согласования равна

$$\eta_1 = \frac{\sqrt[n]{h}}{Q_n} \sin\frac{\pi}{2n} \, . \qquad (20.4.2)$$

Как следует из ф-лы (20.4.2), чем выше нагруженная добротность контура, в который входит реактивная составляющая сопротивления нагрузки, тем уже достижимая полоса согласования.

ГЛАВА 21

МОСТОВЫЕ СХЕМЫ

21.1. Общие сведения

Мостом в технике свч принято называть четырехплечное устройство (восьмиполюсник), обладающее следующими свойствами:

— при возбуждении любого из четырех плеч моста энергия в одно из выходных плеч не поступает;

— энергия, поступившая в каждое из оставшихся двух выходных плеч, равна половине энергии, поданной на вход моста.

В технике свч мосты применяют в качестве элементов фильтров, балансных детекторов и модуляторов, антенных переключателей, измерительных схем и ферритовых устройств, в качестве делителей мощности и устройств, позволяющих сложить мощности нескольких передатчиков в общей нагрузке и др.

Имеется большое число различных схем и конструкций мостов. Ниже рассмотрен ряд часто применяемых на практике мостов.

21.2. Двойной волноводный тройник («магическое Т»)

Двойной волноводный тройник изображен на рис. 21.2.1. Как видно из рисунка, он представляет собой совмещение в одной конструкции согласованных H-плоскостного и E-плоскостного T-тройников (см. разд. 17.9), чем и объясняется его название *«двойной волноводный тройник»*. Покажем, что в идеально симметричном двойном тройнике переход энергии из плеча *1* в плечо *4,* а также из плеча *4* в *1* при возбуждении волной H_{10} невозможен. Предположим, что энергия от генератора поступает на вход плеча *1,* а плечи *2, 3* и *4* нагружены на неотражающие нагрузки. Так как вектор электрического поля волны H_{10} в плече *1* параллелен продольной оси волновода в плече *4,* то в плече *4* могут возбудиться лишь волны E и волны H высшего типа, распространение которых невозможно, ибо волновод в плече *4* рассчитан на прохождение только волны H_{10}. Следовательно, энергия, поступающая в нагрузку плеча *4,* равна нулю, и двойной волноводный тройник при возбуждении со стороны плеча *1* эквивалентен H-плоскостному T-тройнику.

Перенесем генератор в плечо *4*, а в плечо *1* введем неотражающую нагрузку. Вектор электрического поля волны H_{10} в плече *4* перпендикулярен узким стенкам волновода в плече *1*, что делает невозможным возбуждение в нем волны типа H_{10}. Следовательно, при возбуждении плеча *4* энергия в плечо *1* не ответвляется, и двойной волноводный тройник оказывается эквивалентен *E*-плоскостному *T*-тройнику. Так как в согласованном *H*-плоскостном *T*-тройнике плечи *2* и *3* возбуждаются с равной амплитудой в фазе, а в согласованном *E*-плоскостном *T*-тройнике те же плечи возбуждаются с равной амплитудой в противофазе, то в двойном тройнике:

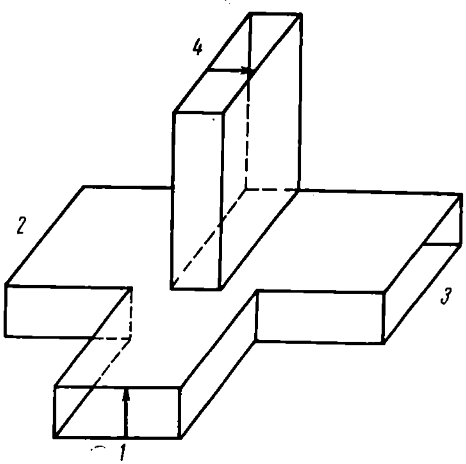


Рис. 21.2.1

— при возбуждении плеча *1* мощности, поступающие в плечи *2* и *3*, равны половине входящей в плечо *1* мощности, а поля *синфазны*. В плечо *4* энергия не ответвляется;

— при возбуждении плеча *4* мощности, поступающие в плечи *2* и *3*, равны половине входящей в плечо *4* мощности, а поля *противофазны*. В плечо *1* энергия не ответвляется.

Очевидно, что верны и обратные утверждения:

— при синфазном возбуждении плеч *2* и *3* двойного тройника волнами равной амплитуды энергия поступит только в плечо *1*;

— при противофазном возбуждении плеч *2* и *3* двойного тройника волнами равной амплитуды энергия поступит только в плечо *4*.

При возбуждении плеча *2* энергия не поступает в плечо *3*. Отсутствие возбуждения в плече *3* можно рассматривать как результат одновременного воздействия на плечо *3* двух противофазных волн H_{10} равной амплитуды (рис. 21.2.2). Волну в плече *2* можно

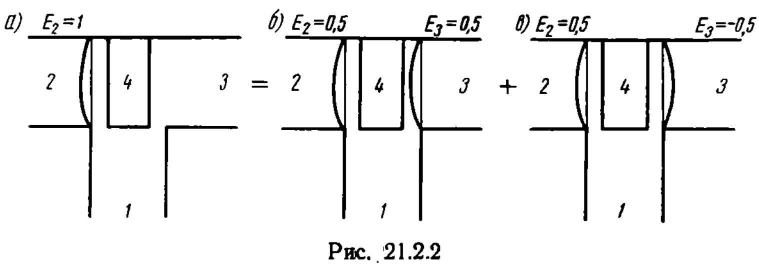


Рис. 21.2.2

рассматривать как сумму двух синфазных волн H_{10} равной амплитуды. Поэтому возбуждение плеча *2* волной единичной амплитуды (рис. 21.2.2*а*) эквивалентно одновременно двум случаям возбуждения:

— плечи *2* и *3* возбуждены синфазно волнами половинной амплитуды (рис. 21.2.2*б*);

— плечи *2* и *3* возбуждены в противофазе волнами половинной амплитуды (рис. 21.2.2*в*).

При противофазном возбуждении плеч *2* и *3*, как было выяснено выше, возбуждается только плечо *4*. Синфазное возбуждение плеч *2* и *3* приводит к возбуждению только плеча *1*. Следовательно, энергия, поступившая в плечо *2*, поровну разделится между плечами *1* и *4*. В плече *3* энергия равна нулю. Аналогично можно показать, что при возбуждении плеча *3* энергия не поступает в плечо *2*.

При нарушении согласования *H*- и *E*-тройников моста параметры моста существенно ухудшаются. В частности, энергия из плеча *2* начинает поступать в плечо *3*, а при возбуждении плеча *3* часть энергии проходит в *2*, т. е. идеальным мостом является только полностью согласованный двойной волноводный тройник, называемый иногда в литературе «магическим Т».

Рабочий диапазон «магического Т» ограничен полосой частот, в пределах которой сохраняется согласование *H*- и *E*-тройников.

21.3. Кольцевой мост

Наиболее распространенная схема волноводного кольцевого моста представлена на рис. 21.3.1. В соответствии с классификацией волноводных разветвлений кольцевой мост, изображенный

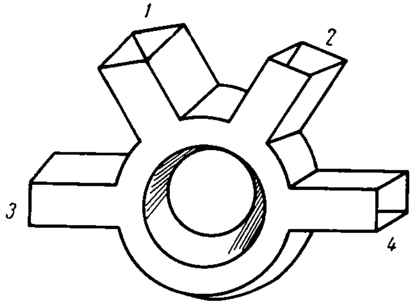


Рис. 21.3.1

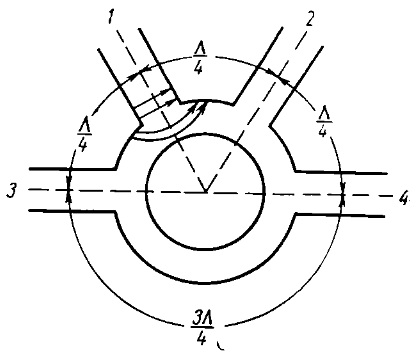


Рис. 21.3.2

на этом рисунке, образован четырьмя волноводными *E*-плоскостными *T*-тройниками, соединенными друг с другом свернутыми по дуге окружности отрезками прямоугольного волновода. Длина каждого из отрезков между плечами *1* и *2*, *1* и *3*, *2* и *3* равна $\Lambda/4$. Пусть плечи *2*, *3* и *4* кольцевого моста нагружены на согласованные нагрузки, а к плечу *1* подведена энергия от генератора. Чтобы не усложнять изложения, предположим, что кольцевой мост согласован, т. е. переход энергии из E-тройников в кольцо и обратно не сопровождается отражениями энергии.

Так как E-тройник в боковых плечах возбуждает противофазные волны равной амплитуды (рис. 21.3.2), то по кольцу навстречу друг другу будут распространяться две волны: одна обегает кольцо по часовой стрелке, а вторая — против часовой стрелки. Чтобы различать эти волны, припишем всем величинам, характеризующим бегущую по часовой стрелке (правую) волну, верхний индекс «+», а левой волне, бегущей навстречу — верхний индекс «—». Например, набег фаз для правой волны обозначается φ^+, а для левой φ^-. Определим фазу каждой из волн на входе плеч *2*, *3* и *4*. Расстояние по кольцу от плеча *1* до плеча *2* для правой волны равно $\frac{\Lambda}{4}$. Поэтому

$$\varphi_{12}^+ = 90^\circ. \tag{21.3.1}$$

Расстояние до того же плеча для левой волны равно $\frac{\Lambda}{4} + \frac{3\Lambda}{4} + \frac{\Lambda}{4} = \frac{5\Lambda}{4}$, поэтому

$$\varphi_{12}^- = 450^\circ + 180^\circ. \tag{21.3.2}$$

Дополнительный фазовый сдвиг в 180° возникает из-за противофазного возбуждения боковых плеч E-тройника (рис. 21.3.2). Аналогично получаем:

$$\begin{cases} \varphi_{13}^+ = 450^\circ, \\ \varphi_{13}^- = 90^\circ + 180^\circ; \end{cases} \tag{21.3.3}$$

$$\begin{cases} \varphi_{14}^+ = 180^\circ, \\ \varphi_{14}^- = 360^\circ + 180^\circ. \end{cases} \tag{21.3.4}$$

Если отбросить не влияющую на результат разность фаз 360°, то сдвиг фаз между правой и левой волнами на входе каждого из плеч равен

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_{12}^+ - \varphi_{12}^- = -180^\circ \\ \varphi_3 &= \varphi_{13}^+ - \varphi_{13}^- = +180^\circ \\ \varphi_4 &= \varphi_{14}^+ - \varphi_{14}^- = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{21.3.5}$$

Таким образом, на входе плеч *2* и *3* правая и левая волны противофазны, а на вход плеча *4* те же волны приходят в фазе. Энергия в E-тройник поступает только при противофазном возбуждении. Поэтому из плеча *1* кольцевого моста энергия поступает в плечи *2* и *3* и не проходит в плечо *4*.

Определив аналогично фазы волн на входе соответствующих плеч при возбуждении плеч *2, 3* и *4,* приходим к следующему правилу; *в кольцевом мосте энергия делится поровну между двумя рядом расположенными плечами,* т. е. из *1* переходит в *2* и *3,* из *2* — в *1* и *4,* из *3* — в *1* и *4,* из *4* — в *2* и *3.*

Расстояния по кольцу от входа плеча *1* до входа плеч *2* и *3* равны. Поэтому волны в плечах *2* и *3* синфазны при возбуждении плеча *1,* тогда как при возбуждении плеча *4* поля в тех же плечах оказываются противофазными, ибо расстояния по кольцу от выхода плеча *4* до входа плеч *2* и *3* отличаются на полволны (см. рис. 21.3.2).

В длинноволновой части свч диапазона, где использование волноводов нецелесообразно, применяют кольцевые мосты на коаксиальных (рис. 21.3.3) или полосковых линиях. Мосты на рис. 21.3.3

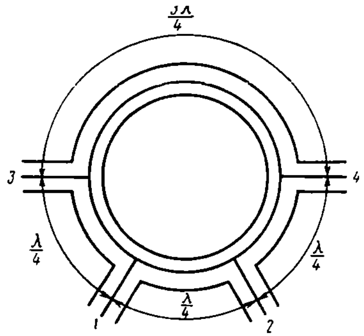


Рис. 21.3.3

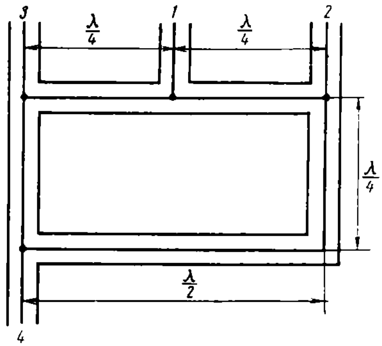


Рис. 21.3.4

и 21.3.4 отличаются только конструкцией, длина отрезков между плечами в обоих случаях одинакова. Однако мост на рис. 21.3.4 применяют чаще, так как компоновка устройств с прямоугольным мостом оказывается несколько проще.

Основными недостатками кольцевых мостов являются:

— узость рабочей полосы частот, так как выбор длины всех отрезков линий в кольце жестко связан с центральной частотой рабочего диапазона;

— весьма значительные габариты.

21.4. Волноводный щелевой мост

Наиболее распространенная конструкция *H*-плоскостного щелевого моста представлена на рис. 21.4.1 (переходы для подключения волноводов к плечам моста на рисунке не показаны). Чтобы не усложнять изложения, будем полагать бесконечно тонкой толщину металлической боковой стенки, общей для волноводов в плечах *1* и *4*, а также в плечах *2* и *3*. Практически толщина этой стенки редко превышает 1,5—3 *мм*.

Пусть плечи *2*, *3* и *4* щелевого моста нагружены на согласованные нагрузки, а в плече *1* возбуждена волна H_{10}, амплитуду которой положим равной единице. Отсутствие возбуждения в плече *4* можно рассматривать как результат одновременного воздействия на плечо *4* двух *противофазных* волн H_{10} с амплитудой, равной 0,5. Волну H_{10} единичной амплитуды в плече *1* можно рассматривать как сумму двух синфазных волн H_{10} с половинной амплитудой. Поэтому возбуждение плеча *1* волной единичной амплитуды (рис. 21.4.2*а*) и отсутствие поля в плече *4* эквивалентно одновременному возбуждению плеч *2* и *4* по следующим двум схемам:

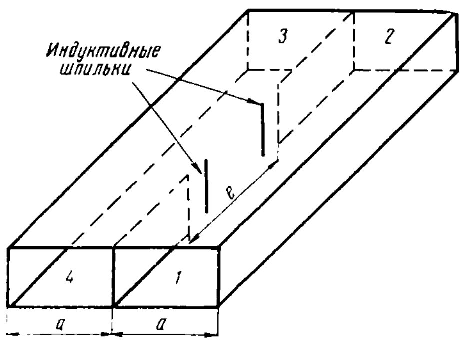


Рис. 21.4.1

— плечи *1* и *4* возбуждены в противофазе волнами половинной амплитуды (рис. 21.4.2*б*);

— плечи *1* и *4* возбуждены синфазно волнами половинной амплитуды (рис. 21.4.2*в*).

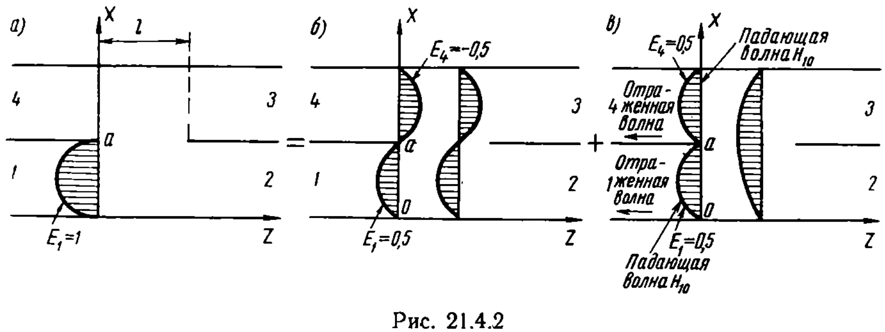


Рис. 21.4.2

Две противофазные волны H_{10} в плечах *1* и *4* — составляют одну волну H_{20}, распространяющуюся в волноводе удвоенной ширины. Эта волна, распространяясь в области щели ($0 \leqslant z \leqslant l$ на рис. 21.4.2*б*), получает фазовый сдвиг, равный

$$\varphi_2 = \beta_2 l = \frac{2\pi}{\Lambda_2} l, \qquad (21.4.1)$$

где l — длина щели, и

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{2\lambda}{4a}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} . \qquad (21.4.2)$$

В плечах 2 и 3 волна H_{20} снова распадается на две противофазные волны H_{10}. Временная векторная диаграмма полей в плечах моста при противофазном возбуждении имеет вид, изображенный на рис. 21.4.3*а*. При синфазном возбуждении (рис. 21.4.2*в*) плечи 2 и 4 возбуждены в фазе. Во всех точках, расположенных вдоль средней линии щели, поля, возникающие за счет излучения энер-

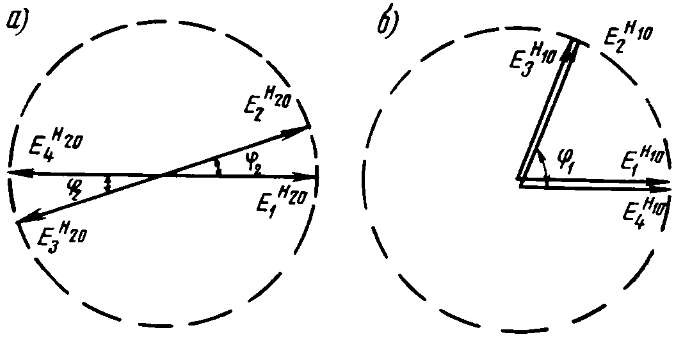


Рис. 21.4.3

гии из волноводов 1 и 4 в область щели, складываются в фазе. Благодаря этому в волноводе шириной $2a$ возбуждаются только те колебания, которые имеют пучность электрического поля в точке $x=a$, т. е. энергия двух волн H_{10}, распространяющихся в плечах 1 и 4, трансформируется в энергию волн H_{10}, H_{30}, H_{50}, ... и т. д.

Выберем размеры волноводов, образующих щелевой мост так, чтобы во всем рабочем диапазоне моста из всего бесконечного спектра волн в волноводе удвоенной ширины распространялась волна H_{10} и не распространялись волны H_{30}, H_{50}, ... и т. д. Для этого необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$\lambda_{\text{мин}} < \lambda_{\text{кр}}^{H_{30}} = \frac{2}{3}\, 2a, \qquad (21.4.3)$$

где $\lambda_{\text{мин}}$ — минимальная длина волны рабочего диапазона моста.

Фазовая скорость волны H_{10} в волноводе шириной $2a$ согласно (14.1.30) равна

$$v'_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{4a}\right)^2}} , \qquad (21.4.4)$$

а фазовая скорость волн того же типа в узких волноводах (плечи *1* и *4*) равна

$$v''_\text{ф} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \qquad (21.4.5)$$

Так как $v'_\text{ф} \neq v''_\text{ф}$, то в сечении $z=0$ (см. рис. 21.4.2*в*) имеет место скачок фазовой скорости. Таким образом, переход синфазной волны из узких волноводов в широкий эквивалентен переходу волны из среды с одним коэффициентом преломления в среду с другим коэффициентом преломления (см. гл. 11). Соответственно в месте перехода возникает отраженная волна (см. рис. 21.4.2*в*). По этой же причине возникает отраженная волна при переходе из широкого волновода в узкие. Для компенсации отраженной волны в мост вводят согласующие элементы: индуктивные или емкостные штыри. На рис. 21.4.1 показаны согласующие элементы в виде двух индуктивных штырей.

В согласованном щелевом мосте вся энергия синфазных волн H_{10}, поступающих из плеч *1* и *4*, преобразуется в энергию волны H_{10} широкого волновода. Распространяясь по волноводу, эта волна отстает на угол

$$\varphi_1 = \beta_1 l = \frac{2\pi}{\Lambda_1} l, \qquad (21.4.6)$$

где

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{4a}\right)^2}}, \qquad (21.4.7)$$

и при переходе из широкого волновода в узкий снова распадается на две синфазные волны H_{10} в плечах *2* и *3*. Соответствующая векторная диаграмма полей в плечах моста изображена на рис. 21.4.3*б*.

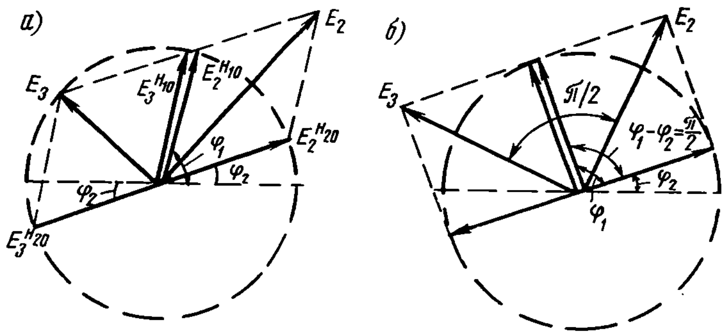


Рис. 21.4.4

Для определения полных полей во всех плечах моста следует просуммировать поля, векторная диаграмма которых изображена на рис. 21.4.3*а*, с соответствующими полями, векторная диаграмма которых изображена на рис. 21.4.3*б*. Результаты сложения показаны на рис. 21.4.4*а*. Как видно из рисунка, рассматриваемое устройство при произвольных значениях φ_1 и φ_2 не обладает свойствами моста, так как $|\dot{E}_2| \neq |\dot{E}_3|$. Однако, если так подобрать длину щели, чтобы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad (21.4.8)$$

то векторная диаграмма будет иметь вид, изображенный на рис. 21.4.4*б*, и рассматриваемое устройство приобретает свойства моста. Отметим, что при выполнении равенства (21.4.8) волна в плече *3* отстает по фазе от волны в плече *2* на 90° (см. рис. 21.4.4*б*).

Необходимая длина щели определяется из равенства (21.4.8) после подстановки в него вместо φ_1 и φ_2 их значений из (21.4.1) и (21.4.6):

$$l = \frac{1}{4} \frac{\Lambda_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}. \qquad (21.4.9)$$

Тождественными свойствами обладает щелевой мост при возбуждении любого другого плеча:

— энергия, поступающая в любое плечо щелевого моста, делится поровну между двумя противолежащими плечами. В смежное плечо при наличии согласующих элементов энергия не поступает;

— сдвиг фаз между полями в плечах, противолежащих входному, равен 90°, причем опережает по фазе волна в том плече, продольная ось которого совпадает с продольной осью входного плеча (например, плечи *1* и *2* на рис. 21.4.2).

Преимуществами щелевого моста перед мостами другого типа являются: простота его конструкции; отсутствие элементов, снижающих его пробивную прочность (при согласовании индуктивными шпильками), а также широкий рабочий диапазон, в пределах которого сохраняется почти равное деление мощности между двумя плечами.

21.5. Квадратные мосты

Коаксиальный квадратный мост представляет собой симметричное последовательное или параллельное сочленение отрезков коаксиальной линии. При параллельном сочленении волновые проводимости и длина отрезков подбираются обычно, как показано на рис. 21.5.1. На этом же рисунке указаны размеры элементов моста. Аналогично выполняется квадратный мост из прямоугольных волноводов.

Возбуждение плеча *1* волной единичной амплитуды эквивалентно одновременно синфазному и противофазному возбуждению плеч 1 и 4 волнами половинной амплитуды. Эпюра напряжений и токов в элементах моста при синфазном возбуждении плеч 1 и 4 и включении согласованных нагрузок в плечах 2 и 3 изображе-

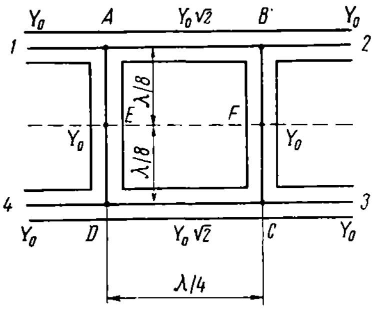


Рис. 21.5.1

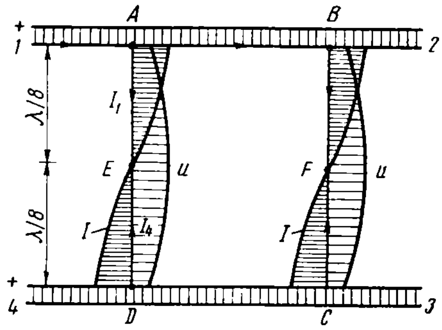


Рис. 21.5.2

на на рис. 21.5.2. В точках E и F моста, равноудаленных как от входа 1, так и от входа 4, напряжения, создаваемые синфазными волнами, складываются в фазе, а токи вычитаются, что соответствует режиму холостого хода в сечении линий, где расположены точки E и F. Очевидно, что указанное на рис. 21.5.2 распределение тока и напряжения не изменится, если действительно осуществить режим холостого хода, т. е. если разомкнуть линии в точках F и E. Поэтому анализ моста при синфазном возбуждении сводится к анализу двух одинаковых и не связанных друг с другом сочленений, изображенных на рис. 21.5.3.

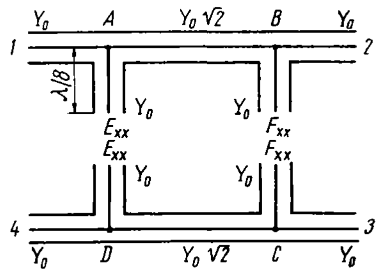


Рис. 21.5.3

Входная проводимость разомкнутых на конце отрезков линий AE и BF длиной $l_{AE} = \frac{\lambda}{8}$ согласно (16.3.8) равна

$$Y_{xx} = \mathrm{i}\, Y_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda}\, l_{AE} = \mathrm{i}\, Y_0. \tag{21.5.1}$$

Четвертьволновый отрезок линии между точками A и B с волновой проводимостью $\sqrt{2} Y_0 = Y_л$ трансформирует в соответствии с (19.3.4) проводимость $Y_н$, на которую он нагружен, в

$$Y_{вх} = \frac{Y_л^2}{Y_н}\,, \tag{21.5.2}$$

где (см. рис. 21.5.3) и (21.5.1)

$$Y_н = Y_0 + \mathrm{i} Y_0 = Y_0 (1 + \mathrm{i}). \qquad (21.5.3)$$

Подставляя (21.5.3) в (21.5.2), получаем

$$Y_{вх} = Y_0 (1 - \mathrm{i}). \qquad (21.5.4)$$

Линия в плече *1* с волновой проводимостью Y_0 нагружена на сопротивление с проводимостью:

$$Y_1 = Y_{вх} + Y_{xx}, \qquad (21.5.5)$$

которая с учетом (21.5.1) и (21.5.4) равна

$$Y_1 = Y_0 (1 - \mathrm{i}) + \mathrm{i} Y_0 = Y_0. \qquad (21.5.6)$$

Таким образом, плечо *1*, как и плечо *4*, при синфазном возбуждении нагружено на сопротивление, равное волновому, и поэтому вся энергия из плеча *1* проходит в плечо *2*. Аналогичным образом вся энергия из плеча *4* поступает в плечо *3*.

Электромагнитная волна, проходя из плеча *1* в плечо *2*, (либо из плеча *4* в плечо *3*) отстает по фазе на угол, равный

$$\varphi_{12xx} = \varphi_{43xx} = \varphi_A + \varphi_{AB} + \varphi_B\,, \qquad (21.5.7)$$

где φ_A и φ_B — сдвиг по фазе, приобретаемый волной при прохождении соответственно точек A и B, а φ_{AB} — сдвиг по фазе, получаемый волной при прохождении отрезка AB.

Так как $l_{AB} = \dfrac{\lambda}{4}$, то

$$\varphi_{AB} = -\pi/2. \qquad (21.5.8)$$

В точке A линия с волновой проводимостью Y_0 нагружена на два параллельно включенных сопротивления: входное сопротивление шлейфа AE, равное $\dfrac{1}{\mathrm{i} Y_0}$ (см. 21.5.1), и входное сопротивление отрезка AB линии с волновой проводимостью $\sqrt{2} Y_0$. Поэтому коэффициент отражения p_A в точке A согласно (16.3.7) равен

$$p_A = \frac{Y_0 - (\sqrt{2} Y_0 + \mathrm{i} Y_0)}{Y_0 + (\sqrt{2} Y_0 + \mathrm{i} Y_0)} = \frac{1 - \sqrt{2} - \mathrm{i}}{1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}}\,.$$

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля на входе отрезка AB (в точке A) равна сумме комплексных амплитуд падающей и отраженной волн, т. е. пропорциональна величине

$$1 + p_A = \frac{2}{1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}\, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}. \qquad (21.5.9)$$

Как следует из равенства (21.5.9), волна в отрезке линии AB возбуждается со сдвигом по фазе, равным

$$\varphi_A = -\frac{\pi}{8}\,. \qquad (21.5.10)$$

В точке B линия с волновой проводимостью $\sqrt{2}Y_0$ нагружена на два параллельно включенных сопротивления: входное сопротивление шлейфа BF, равное $\frac{1}{\mathrm{i}\,Y_0}$ (см. (21.5.1)), и входное сопротивление отрезка линии с волновой проводимостью Y_0. Соответственно

$$p_B = \frac{\sqrt{2}Y_0 - (Y_0 + \mathrm{i}\,Y_0)}{\sqrt{2}Y_0 + (Y_0 + \mathrm{i}\,Y_0)} = -\frac{1 - \sqrt{2} + \mathrm{i}}{1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}},$$

$$1 + p_B = 1 - \frac{1 - \sqrt{2} + \mathrm{i}}{1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi/8}. \tag{21.5.11}$$

Как следует из равенства (21.5.11), волна на входе плеча 2 возбуждается со сдвигом по фазе, равным

$$\varphi_Б = -\frac{\pi}{8}. \tag{21.5.12}$$

Подставляя в (21.5.7) вместо φ_{AB}, φ_A и φ_B их значения из (21.5.8), (21.5.10) и (21.5.12), получаем

$$\varphi_{12\text{xx}} = \varphi_{43\text{xx}} = -\frac{3\pi}{4}. \tag{21.5.13}$$

Временна́я векторная диаграмма полей в плечах моста при синфазном возбуждении показана на рис. 21.5.4*а*.

Эпюра токов и напряжений в элементах моста при противофазном возбуждении плеч *1* и *4* представлена на рис. 21.5.5. В отличие от случая синфазного возбуждения, ток в точках E и F достигает максимума, а напряжение равно нулю. Поэтому анализ моста опять сводится к анализу двух одинаковых и не связанных друг с другом сочленений, изображенных на рис. 21.5.6 и состоящих из отрезков линии, соединяющих плечи *1, 2* и *4, 3,* к которым подключены *короткозамкнутые* отрезки длиной $\frac{\lambda}{8}$. Входная проводимость короткозамкнутых отрезков согласно (16.3.8) равна

$$Y_{\text{кз}} = -\mathrm{i}\,Y_0. \tag{21.5.14}$$

Заменив в (21.5.5)—(21.5.13) Y_{xx} на $Y_{\text{кз}}$, получаем:

$$Y_1 = Y_0; \tag{21.5.15}$$

$$\varphi_{12\text{кз}} = \varphi_{43\text{кз}} = -\frac{\pi}{4}. \tag{21.5.16}$$

Следовательно, согласование сохранится и при противофазном возбуждении. Соответствующая векторная диаграмма полей в плечах моста изображена на рис. 21.5.4*б*.

Суммарная векторная диаграмма изображена на рис. 21.5.4*в*. Как видно из рисунка, при возбуждении плеча *1* волной единичной амплитуды энергия делится поровну между плечами *2* и *3*, причем

В точке B линия с волновой проводимостью $\sqrt{2}Y_0$ нагружена на два параллельно включенных сопротивления: входное сопротивление шлейфа BF, равное $\frac{1}{\mathrm{i}Y_0}$ (см. (21.5.1)), и входное сопротивление отрезка линии с волновой проводимостью Y_0. Соответственно

$$p_B = \frac{\sqrt{2}Y_0 - (Y_0 + \mathrm{i}Y_0)}{\sqrt{2}Y_0 + (Y_0 + \mathrm{i}Y_0)} = -\frac{1-\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}},$$

$$1 + p_B = 1 - \frac{1-\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}. \qquad (21.5.11)$$

Как следует из равенства (21.5.11), волна на входе плеча *2* возбуждается со сдвигом по фазе, равным

$$\varphi_Б = -\frac{\pi}{8}. \qquad (21.5.12)$$

Подставляя в (21.5.7) вместо φ_{AB}, φ_A и φ_B их значения из (21.5.8), (21.5.10) и (21.5.12), получаем

$$\varphi_{12хх} = \varphi_{43хх} = -\frac{3\pi}{4}. \qquad (21.5.13)$$

Временна́я векторная диаграмма полей в плечах моста при синфазном возбуждении показана на рис. 21.5.4*а*.

Эпюра токов и напряжений в элементах моста при противофазном возбуждении плеч *1* и *4* представлена на рис. 21.5.5. В отличие от случая синфазного возбуждения, ток в точках E и F достигает максимума, а напряжение равно нулю. Поэтому анализ моста опять сводится к анализу двух одинаковых и не связанных друг с другом сочленений, изображенных на рис. 21.5.6 и состоящих из отрезков линии, соединяющих плечи *1, 2* и *4, 3,* к которым подключены *короткозамкнутые* отрезки длиной $\frac{\lambda}{8}$. Входная проводимость короткозамкнутых отрезков согласно (16.3.8) равна

$$Y_{кз} = -\mathrm{i}Y_0. \qquad (21.5.14)$$

Заменив в (21.5.5)—(21.5.13) $Y_{хх}$ на $Y_{кз}$, получаем:

$$Y_1 = Y_0; \qquad (21.5.15)$$

$$\varphi_{12кз} = \varphi_{43кз} = -\frac{\pi}{4}. \qquad (21.5.16)$$

Следовательно, согласование сохранится и при противофазном возбуждении. Соответствующая векторная диаграмма полей в плечах моста изображена на рис. 21.5.4*б*.

Суммарная векторная диаграмма изображена на рис. 21.5.4*в*. Как видно из рисунка, при возбуждении плеча *1* волной единичной амплитуды энергия делится поровну между плечами *2* и *3*, причем поля в плечах *2* и *3* сдвинуты по фазе друг относительно друга на 90°. Так как в режиме синфазного и противофазного возбуждения плечо *4* идеально согласовано, то из плеча *1* в плечо *4* энергия не поступает.

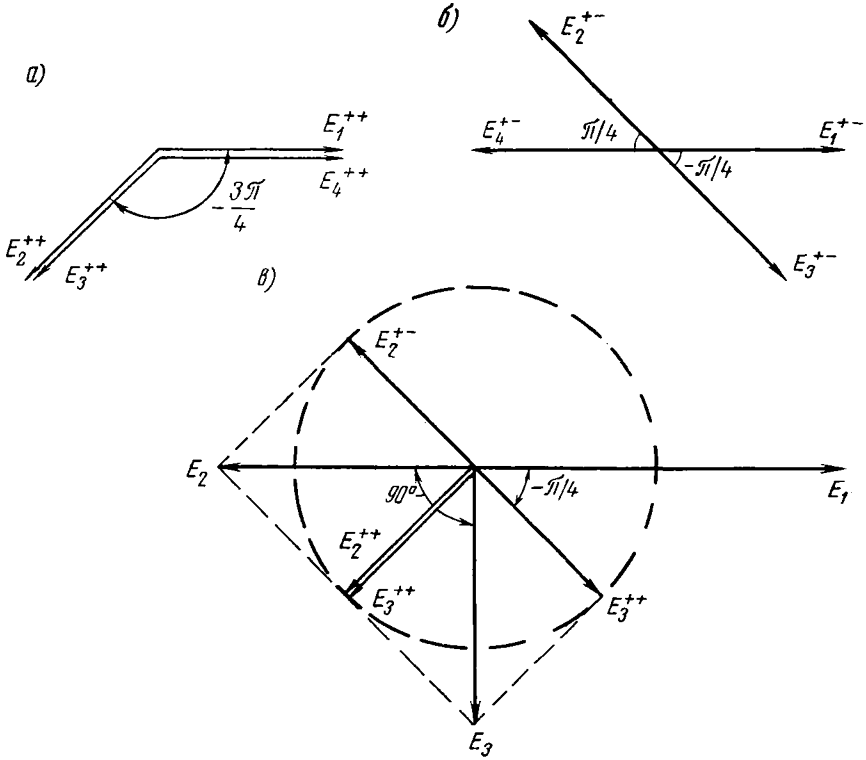


Рис. 21.5.4

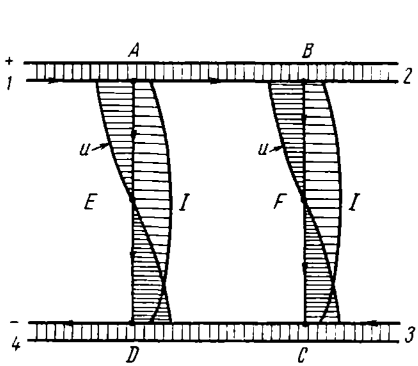


Рис. 21.5.5

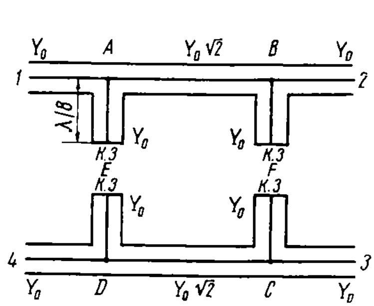


Рис. 21.5.6

Основным недостатком описанного квадратного моста является сравнительная узость рабочей полосы частот. Следует отметить, что ширина полосы может быть существенно расширена путем увеличения числа поперечных шлейфов и соответствующего удлинения моста [22, 23].

21.6. Мосты на связанных линиях

Введем в прямоугольный или круглый металлический экран на некотором расстоянии друг от друга два параллельных проводника с круглой либо другой формой поперечного сечения. К обоим концам каждого из проводников подсоединим внутренние проводники коаксиальных линий (рис. 21.6.1).

Пусть энергия подводится к плечу *1*, а в остальные плечи включены согласованные нагрузки. При анализе снова воспользуемся методом синфазно-противофазного возбуждения, т. е. возбуждение плеча *1* волной единичной амплитуды будем рассматривать как результат одновременного синфазного и противофазного возбуждения плеч *1* и *4* волнами половинной амплитуды. При синфазном возбуждении разность потенциалов между проводами *А* и *Б* равна нулю. Поэтому все силовые линии электрического поля, исходящие из проводников *А* и *Б*, замыкаются на экран (рис. 21.6.2). Таким образом, для синфазной волны мост может рассматриваться как единая экранированная линия с некоторым волновым сопротивлением $Z_в^{++}$, внутренний проводник которой состоит из двух параллельных проводов *А* и *Б* (рис. 21.6.2). При синфазном возбуждении плеч *1* и *4* внутренние проводники коак-

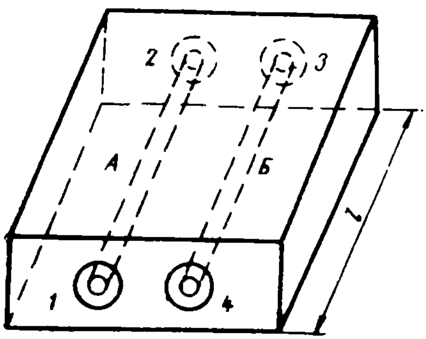


Рис. 21.6.1

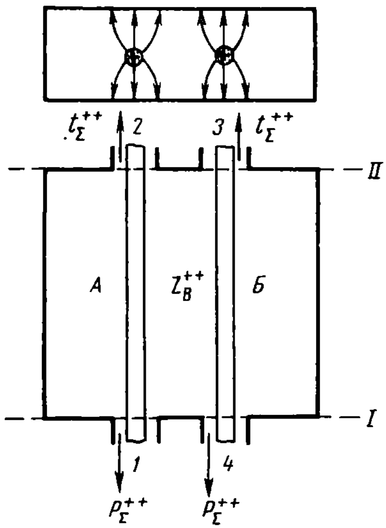


Рис. 21.6.2

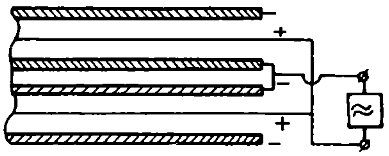


Рис. 21.6.3

сиальных линий, подключенных к проводам *А* и *Б*, также находятся под одинаковым потенциалом. Потенциал внешних проводников у обеих линий противоположен потенциалу внутренних проводников. Аналогичное распределение потенциалов будет иметь место, если подключить к генератору две коаксиальные линии, соединенные параллельно, как условно показано на рис. 21.6.3. Поэтому входное сопротивление моста при синфазном возбуждении равно $\frac{1}{2} Z_в$, где $Z_в$ — волновое сопротивление каждой из коаксиальных линий.

Входное сопротивление $\frac{1}{2} Z_в$ моста в общем случае не совпадает с $Z_в^{++}$. Поэтому в сечении *I* часть энергии синфазных волн, входящих в плечи *1* и *4*, отражается, причем коэффициент отражения p_I^{++} и коэффициент прохождения t_I^{++} в сечении *I* согласно (16.3.7) и (10.2.19) равны

$$\left.\begin{aligned} p_I^{++} &= \frac{Z_в^{++} - \frac{1}{2} Z_в}{Z_в^{++} + \frac{1}{2} Z_в} \\ t_I^{++} &= 1 + p_I^{++} \end{aligned}\right\} \tag{21.6.1}$$

Соответственно коэффициенты отражения и прохождения в сечении *II* равны

$$\left.\begin{aligned} p_{II}^{++} &= \frac{\frac{Z_в}{2} - Z_в^{++}}{\frac{Z_в}{2} + Z_в^{++}} = -p_I^{++} \\ t_{II}^{++} &= 1 + p_{II}^{++} = 1 - p_I^{++} \end{aligned}\right\} \tag{21.6.2}$$

Волна, прошедшая сечение *I*, частично отражается в сечении *II*. Энергия прошедшей сечение *II* волны поглощается в согласованных нагрузках, подключенных к плечам *2* и *3*. Отраженная в сечении *II* волна возвращается ко входу моста, снова отражается в сечении *I* и т. д. Суммируя поля всех отраженных в плечах *1* и *4* волн, а также волн, прошедших в плечи *2* и *3*, методом, изложенным в разд. 18.7, получаем:

$$p_\Sigma^{++} = p_I^{++} + \frac{p_{II}^{++}\, t_I^{++}\, t_{II}^{++}\, e^{-2i\beta l}}{1 - (p_{II}^{++})^2\, e^{-2i\beta l}}\,; \tag{21.6.3}$$

$$t_\Sigma^{++} = \frac{t_I^{++}\, t_{II}^{++}\, e^{-i\beta l}}{1 - (p_{II}^{++})^2\, e^{-2i\beta l}}\,, \tag{21.6.4}$$

где p_Σ^{++} — суммарный коэффициент отражения в плечах *1* и *4*; t_Σ^{++} — суммарный коэффициент прохождения в плечи *2* и *3*. Учитывая соотношение (21.6.2) между p_{II}^{++} и p_I^{++}, приходим к равенствам:

$$p_\Sigma^{++} = p_I^{++}\left\{1 - \frac{[1-(p_I^{++})^2]\, e^{-2i\beta l}}{1-(p_I^{++})^2\, e^{-2i\beta l}}\right\} =$$

$$= 2i\, p_I^{++} \frac{\sin\beta l}{1-(p_I^{++})^2\, e^{-2i\beta l}}\, e^{-i\beta l}, \qquad (21.6.5)$$

$$t_\Sigma^{++} = \frac{1-(p_I^{++})^2}{1-(p_I^{++})^2\, e^{-2i\beta l}}\, e^{-i\beta l} \qquad (21.6.6)$$

При противофазном возбуждении потенциалы внутренних проводников коаксиальных линий и проводов *А* и *Б* равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому часть силовых линий замыкается между проводами *А* и *Б* (рис. 21.6.4). Структура электрического, а следовательно, и магнитного полей при противофазном возбуждении, как видно из сравнения рис. 21.6.2 и 21.6.3, отличается от структуры поля при синфазном возбуждении. Соответственно различными получаются и волновые сопротивления линии, заключенной в экран. Обозначим сопротивление этой линии при противофазном возбуждении через $Z_в^{+-}$ (рис. 21.6.4). При противофазном возбуждении коаксиальные линии в плечах *1* и *4* подключаются к генератору последовательно, как условно показано на рис. 21.6.5. Поэтому в данном случае входное сопротивление моста равно $2Z_в$.

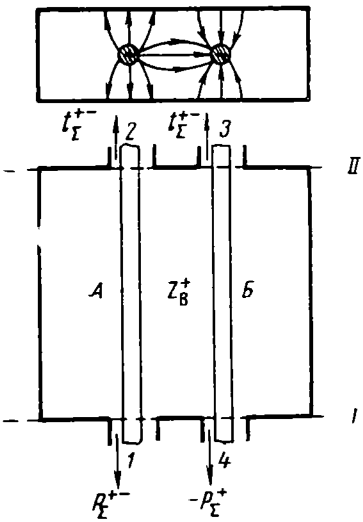


Рис. 21.6.4

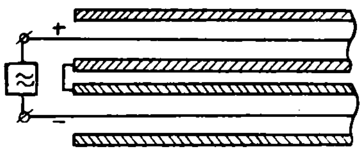


Рис. 21.6.5

Суммируя все отраженные и прошедшие волны по аналогии со случаем синфазного возбуждения, получаем:

$$p_\Sigma^{+-} = 2i\, p_I^{+-} \frac{\sin\beta l}{1-(p_I^{+-})^2\, e^{-2i\beta l}}\, e^{-i\beta l}; \qquad (21.6.7)$$

$$t_{\Sigma}^{+-}=\frac{1-(p_l^{+-})^2}{1-(p_l^{+-})^2\,e^{-2l\beta l}}\,e^{-l\beta l}\,, \qquad (21.6.8)$$

где

$$p_l^{+-}=\frac{Z_в^{+-}-2Z_в}{Z_в^{+-}+2Z_в}\,. \qquad (21.6.9)$$

Так как падающие волны в плечах *1* и *4* в рассматриваемом случае противофазны, то противофазными будут волны, отраженные в эти плечи, и волны, прошедшие в плечи *2* и *3* (см. рис. 21.6.4, на этом рисунке величина t_{Σ}^{+-} у плеча *3* должна быть со знаком минус).

Полная амплитуда поля в каждом из плеч моста является суммой амплитуд волн, поступивших в каждое плечо при синфазном и противофазном возбуждении:

$$\dot{E}_1=\dot{E}_{отр}=p_{\Sigma}^{++}+p_{\Sigma}^{+-}\,; \qquad (21.6.10)$$

$$\dot{E}_2=t_{\Sigma}^{++}+t_{\Sigma}^{+-}\,; \qquad (21.6.11)$$

$$\dot{E}_3=t_{\Sigma}^{++}-t_{\Sigma}^{+-}\,; \qquad (21.6.12)$$

$$\dot{E}_4=p_{\Sigma}^{++}-p_{\Sigma}^{+-}\,. \qquad (21.6.13)$$

Соотношение между $Z_в$, $Z_в^{++}$ и $Z_в^{+-}$ следует подобрать таким образом, чтобы амплитуда отраженной волны в плече *1* равнялась нулю ($E_1=0$). Подставляя в (21.6.10) вместо p_{Σ}^{++} и p_{Σ}^{+-} их значения из (21.6.5) и (21.6.7) и полагая $\dot{E}_1=0$, получаем равенство

$$\frac{p_l^{++}}{1-(p_l^{++})^2\,e^{-2l\beta l}}+\frac{p_l^{+-}}{1-(p_l^{+-})^2\,e^{-2l\beta l}}=0, \qquad (21.6.14)$$

которое тождественно удовлетворяется, если $p_l^{++}=-p_l^{+-}$, т. е. если

$$\frac{Z_в^{++}-\frac{1}{2}Z_в}{Z_в^{++}+\frac{1}{2}Z_в}=-\frac{Z_в^{+-}-2Z_в}{Z_в^{+-}+2Z_в}\,. \qquad (21.6.15)$$

Из (26.6.15) вытекает соотношение

$$Z_в=\sqrt{Z_в^{++}Z_в^{+-}}\,. \qquad (21.6.16)$$

При $p_l^{++}=-p_l^{+-}$ согласно (21.6.6) и (21.6.8) $t_{\Sigma}^{++}=t_{\Sigma}^{+-}$. Так как в соответствии с равенством (21.6.12) напряженность электрического поля в плече *3* равна разности $t_{\Sigma}^{++}-t_{\Sigma}^{+-}$, то энергия в это плечо не поступает.

Величины волновых сопротивлений $Z_в^{++}$ и $Z_в^{+-}$ определяются формой и поперечными размерами экрана и проводов *А* и *Б*, а также расстоянием между проводами [33] и не зависит от частоты.

Поэтому теоретически идеальное согласование моста и отсутствие энергии в плече *3* сохраняются в сколь угодно широкой полосе частот.

Реально из-за погрешностей, неизбежных при изготовлении моста, и некоторых других факторов небольшая часть энергии как отражается от входа моста, так и проходит в плечо *3*. Чем выше частота электромагнитных колебаний, тем сильнее сказываются погрешности в изготовлении.

Рассматриваемое устройство будет обладать всеми свойствами моста, если наряду с отсутствием энергии в плече *3* входящая в плечо *1* энергия разделится поровну между плечами *2* и *4*. При этом модуль отношения $\dot{E}_4/\dot{E}_2$, равного согласно (21.6.11), (21.6.13) и (21.6.5)—(21.6.15)

$$\frac{\dot{E}_4}{\dot{E}_2}=\frac{p_\Sigma^{++}-p_\Sigma^{+-}}{t_\Sigma^{++}+t_\Sigma^{+-}}=2i\,p_l^{++}\frac{\sin\beta l}{1-(p_l^{++})^2}, \qquad (21.6.17)$$

должен равняться единице, т. е.

$$2p_l^{++}\frac{|\sin\beta l|}{1-(p_l^{++})^2}=1. \qquad (21.6.18)$$

Целесообразно так подобрать длину моста l, чтобы отношение полей в плечах *2* и *4* менялось как можно медленнее при отклонении частоты от центральной. Это условие выполняется, если $\sin\beta_0 l=1$, т. е.

$$\beta_0 l=\frac{\pi}{2}, \qquad (21.6.19)$$

так как в окрестности первого максимума изменения функции $\sin\beta l$ минимальны. Из (21.6.19) следует, что оптимальная длина связанных линий в мосте равна $\frac{\lambda_0}{4}$. При этом согласно (21.6.18)

$$(p_l^{++})^2+2p_l^{++}-1=0, \qquad (21.6.20)$$

откуда $p_l^{++}=\sqrt{2}-1$ [1]). Подставляя это значение p_l^{++} в (21.6.1), определяем величину $Z_\text{в}^{++}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})Z_\text{в}$. Волновое сопротивление $Z_\text{в}^{+-}$ определяется по найденному значению $Z_\text{в}^{++}$ из выражения (21.6.16) и равно $Z_\text{в}^{+-}=2(\sqrt{2}-1)Z_\text{в}$.

Как показывает расчет по ф-ле (21.6.17), отношение мощностей в плечах *2* и *4* отличается от единицы не более чем на 0,05 в полосе частот $\pm 20\%$, т. е. мост на связанных линиях весьма широкополосен.

Отметим, что согласно (21.6.17) поля в плечах *2* и *4* всегда сдвинуты по фазе на 90°.

[1]) Второй корень ур-ния (21.6.20) соответствует $|p_l^{++}|>1$, что невозможно в пассивных цепях.

21.7. Применение мостов

ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Блок-схема измерителя полных сопротивлений на двойном согласованном волноводном тройнике представлена на рис. 21.7.1. Методика измерения основана на сравнении неизвестного сопротивления, подключаемого к плечу *3*, с градуированным эталонным

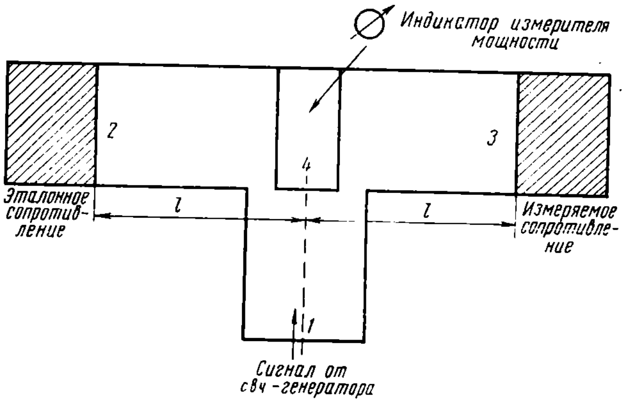


Рис. 21.7.1

сопротивлением в плече *2*. Градуированное эталонное сопротивление обычно представляет собой практически идеально согласованную нагрузку, параллельно (или последовательно) которой подключается отрезок волновода с подвижным короткозамыкателем либо какая-нибудь другая неоднородность. Реактивное сопротивление этой неоднородности должно легко регулироваться в широких пределах и быть известно заранее с высокой степенью точности. Так как неизвестная и эталонная нагрузки находятся на равном расстоянии от входа (плечо *1*) моста, то на вход обеих нагрузок волны поступают в фазе. Если полные сопротивления эталонной и измеряемой нагрузок отличаются друг от друга, то амплитуды и фазы волн, отраженных от этих нагрузок, различны. При этом часть энергии отраженных волн поступает в плечо *4*, что и фиксируется с помощью измерителя мощности, подключенного к плечу *4*. Энергия в плече *4* будет отсутствовать только в том случае, когда полные сопротивления эталонной и измеряемой нагрузок равны. Путем регулировки величины полного сопротивления эталонной нагрузки добиваются нулевых показаний индикатора мощности в плече *4*. Величина эталонного сопротивления в этот момент, очевидно, равна величине измеряемого.

Если вместо эталонного сопротивления в плечо *2* моста включена согласованная нагрузка, то половина энергии волны, отраженной от нагрузки в плече *3*, поступит в плечо *4* (см. разд. 21.2). В этом случае по показаниям индикатора мощности в плече *4* можно определить коэффициент отражения от нагрузки в плече *3*.

Аналогичные схемы могут быть выполнены на основе любого другого моста. Однако предпочтение обычно отдают «магическому Т», обладающему наибольшим переходным затуханием между изолированными плечами ($\geqslant 50$ *дб*) по сравнению с другими мостами.

Отметим, что применение мостов при измерениях полных сопротивлений и коэффициента отражений позволяет получить значительно более точные результаты, чем измерения, основанные на применении измерительной линии.

СЛОЖЕНИЕ МОЩНОСТЕЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕДАТЧИКОВ В ОБЩЕЙ НАГРУЗКЕ

Часто по тем или иным соображениям приходится осуществлять сложение мощностей двух или нескольких передатчиков, работающих на одной или различных частотах, в общей нагрузке. При этом возникают трудности, связанные с тем, что изменение режима работы одного из передатчиков влечет за собой нарушение нормального режима работы остальных передатчиков. Применение мостов в схемах сложения позволяет устранить взаимное влияние передатчиков.

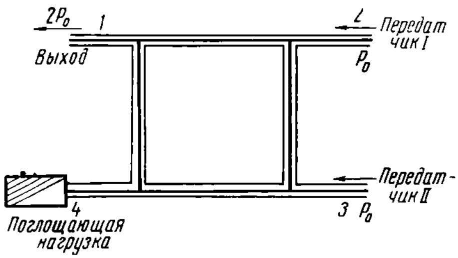


Рис. 21.7.2

На рис. 21.7.2 приведена одна из возможных схем сложения, основанная на применении квадратного моста. Волны, поступающие от передатчиков, работающих на одной частоте, должны быть равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на 90°. При этом в соответствии с принципом действия моста вся энергия поступает на выход моста. Если амплитуды волн от передатчиков абсолютно равны, а сдвиг по фазе составляет точно 90°, то мощность в поглощающую нагрузку не поступает. Это может служить удобным критерием правильной настройки схемы сложения.

Изменение амплитуды или фазы волны, поступающей от одного из передатчиков, приводит к тому, что часть общей энергии поступает в поглощающую нагрузку. Однако при этом режим работы второго передатчика не изменится, так как переход энергии из плеча *3* в *2* или из плеча *2* в *3* исключается благодаря свойствам моста.

При выходе из строя одного из передатчиков в соответствии с принципом действия моста половина мощности другого передатчика поступает в антенну, а вторая половина рассеивается в поглощающей нагрузке, т. е. мощность на выходе системы уменьшается в четыре раза $\left(\text{от } 2P_0 \text{ до } \frac{P_0}{2}\right)$. Чтобы избежать этого, схему сложения обычно дополняют системой обхода моста сложения, позволяющей выход работающего передатчика подключить непосредственно к фидеру.

Аналогично строятся схемы сложения на кольцевых, щелевых и других мостах.

Одна из возможных мостовых схем сложения мощности двух передатчиков[1]), разнесенных по частоте, представлена на рис. 21.7.3. Пусть передатчик с частотой f_1 подключен ко входу I,

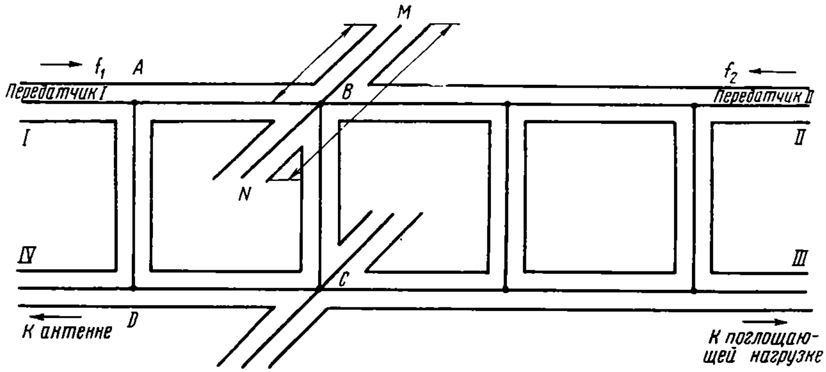


Рис. 21.7.3

а передатчик с частотой f_2 — ко входу II. Как видно из рисунка, в точке B и точке C моста параллельно друг другу подключены по два разомкнутых на конце отрезка коаксиальной линии. Полагая, что $f_1 > f_2 (\lambda_1 < \lambda_2)$, определим суммарное входное сопротивление этих отрезков на частотах f_1 и f_2. Так как на частоте f_1 входное сопротивление разомкнутого на конце отрезка MB длиной $\frac{\lambda_1}{4}$ равно нулю, то в точках B и C на этой частоте независимо от величины входного сопротивления отрезка NB имеет место режим короткого замыкания. При этом входное сопротивление четвертьволновых отрезков BA и CD окажется бесконечно большим, и вся энергия передатчика I по линии AD поступит в плечо IV. Практически из-за потерь и несовершенства изготовления входное сопротивление четвертьволновых отрезков линии имеет конечное, но весьма малое значение. Поэтому небольшая часть энергии передатчика I просачивается и поступает в поглощающую нагрузку, минуя плечо II. На частоте f_2 отрезок MB имеет емкостное сопро-

[1]) Схемы сложения передатчиков с разнесенными частотами часто называют разделительными фильтрами.

тивление, ибо на этой частоте его длина меньше четверти длины волны. Если так подобрать длину отрезка NB, чтобы $NB+BM=$ $=\frac{\lambda_2}{2}$, то в точках B и C образуются параллельные контуры, резонирующие на частоте f_2, причем роль параллельной емкости выполняет отрезок MB, а параллельной индуктивности — отрезок NB. Входное сопротивление параллельного контура на резонансной частоте весьма велико, благодаря чему на частоте f_2 разомкнутые отрезки линии не влияют на прохождение энергии через мосты. Вся энергия передатчика II поступает в плечо IV. Небольшая часть энергии передатчика II из-за конечной величины входного сопротивления параллельных контуров отражается в точках B и C и поступает в поглощающую нагрузку в плече III, а не обратно на выход передатчика II. Следовательно, передатчик II оказывается нагруженным на чисто активное сопротивление, равное волновому сопротивлению коаксиальной линии плеча II моста.

В несколько модифицированном виде данный разделительный фильтр применяют в телевизионных радиостанциях. Несущие частоты телевизионных передатчиков изображения и звука разнесены всего лишь на 6,5 *Мгц*, что позволяет использовать узкополосные квадратные мосты.

Мосты иногда используют в мощных передатчиках для устранения вредного влияния отраженных волн[1]) (рис. 21.7.4) на режим их работы. Оба оконечных каскада передатчика на рис. 21.7.4

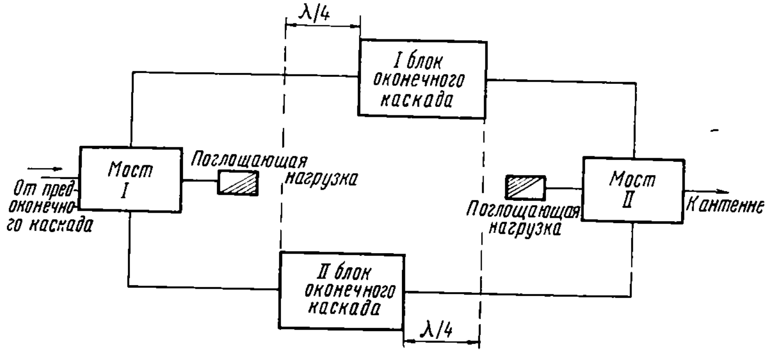


Рис. 21.7.4

отдают одну и ту же мощность и работают на одной частоте, т. е. данная схема, по существу, является схемой сложения мощности двух передатчиков с равными несущими, уже рассмотренной выше. Особенностью схемы на рис. 21.7.4 является то, что входы и выходы оконечных каскадов смещены друг относительно друга на четверть длины волны. Поэтому волны, отраженные от

---

[1]) Так называемая система эхо-поглощения.

входа каждого оконечного каскада, сдвинуты по фазе на 180° и не возвращаются обратно к выходу предоконечного каскада, а рассеиваются в поглощающей нагрузке. Это позволяет существенно повысить равномерность частотной характеристики передатчика. Аналогичное влияние оказывает мост *II*, так как отраженные волны, появившиеся из-за неполного согласования антенны с фидером, после отражения от выходов оконечных каскадов поступают в поглощающую нагрузку, а не обратно в антенну, как это имело бы место при отсутствии моста.

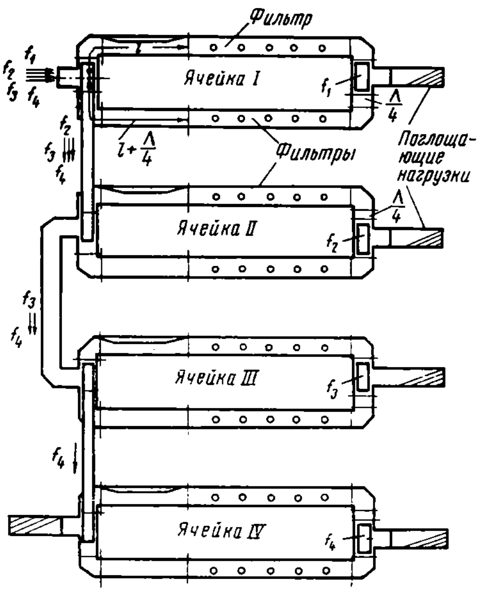


Рис. 21.7.5

На рис. 21.7.5 изображена принципиальная схема разделительного фильтра, часто применяемого в радиорелейных линиях. Он состоит из четырех последовательно включенных ячеек. Общий вид ячейки разделительного фильтра показан на рис. 21.7.6. Каждая ячейка состоит из двух «магических Т», двух полосовых фильтров и поглощающей нагрузки.

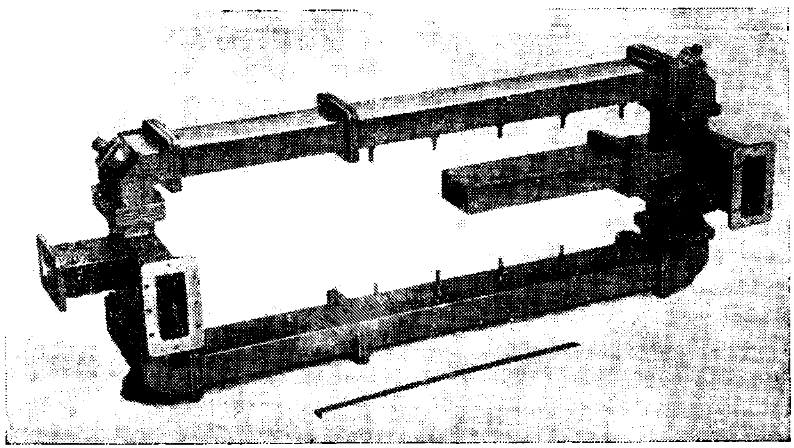


Рис. 21.7.6

Оба полосовых фильтра первой ячейки настроены на частоту f_1, второй — на частоту f_2 и т. д. Пусть на вход фильтра (плечо I первого двойного волноводного тройника) поступают одновременно четыре широкополосных сигнала с центральными частотами f_1, f_2, f_3 и f_4. Пройдя первый двойной волноводный тройник, эти сигналы поступают на вход верхнего и нижнего полосовых фильтров первой ячейки. Так как пути, пробегаемые волнами до входа верхнего и нижнего фильтров, отличаются на $\frac{\Lambda}{4}$, то на входе верхнего и нижнего фильтров эти сигналы оказываются сдвинутыми по фазе на 90°. Сигнал с центральной частотой f_1 свободно проходит через полосовые фильтры и, получив дополнительный фазовый сдвиг 90° на выходе нижнего полосового фильтра (см. рис. 21.7.5), поступает в плечи *2* и *3* [1]) выходного тройника со сдвигом по фазе 180°. Поэтому энергия колебания с частотой f_1 и близких к ней проходит в плечо *4*.

Сигналы с частотами f_2, f_3 и f_4 отражаются от входа полосовых фильтров, настроенных на частоту f_1. Распространяясь в обратном направлении, эти сигналы поступают в плечи *2* и *3* входного двойного волноводного тройника со сдвигом по фазе на 180°. Поэтому энергия сигналов с частотами f_1, f_2 и f_3 проходит в плечо *4* входного тройника и передается на вход следующей ячейки. Во второй ячейке аналогично выделяется сигнал со средней частотой f_2, в третьей — со средней частотой f_3 и т. д.

Разделительный фильтр на рис. 21.7.5 можно использовать для сложения мощностей передатчиков с частотами f_1, f_2, f_3 и f_4. При этом передатчики подключаются вместо приемников на схеме рис. 21.7.5.

БАЛАНСНЫЕ АНТЕННЫЕ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛИ

Антенные переключатели применяются в импульсных радиолокационных станциях, в которых приемник и передатчик работают на общую антенну. Так как импульсная мощность радиолокационных передатчиков велика, а приемник обладает весьма высокой чувствительностью, то антенный переключатель должен выполнять следующие функции:

— в режиме передачи подключать выход передатчика к антенне и предохранять входные цепи от сгорания;

— в режиме приема соединять вход приемника с антенной и блокировать выход передатчика, чтобы избежать потерь энергии поступившего из антенны сигнала в выходных цепях передатчика.

Частота переключения зависит от длительности излучаемых передатчиком импульсов, назначения радиолокационной станции, а также некоторых других факторов и может достигать нескольких тысяч раз в секунду.

---

[1]) Нумерация плеч моста соответствует рис. 21.2.1.

Основным элементом антенного переключателя мощных радиолокационных станций является искровой разрядник, простейшая конструкция которого изображена на рис. 21.7.7. В зазоре между электродами разрядника под влиянием электрического поля колебаний, создаваемых передатчиком, возникает и поддерживается электрический разряд. В результате входное сопротивление разрядника меняется от очень большой величины при отсутствии разряда до весьма малой величины после установления разряда.

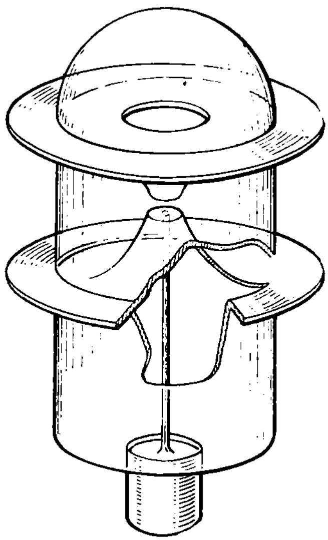


Рис. 21.7.7

Ограничимся рассмотрением одной из возможных схем антенного переключателя на щелевых мостах (рис. 21.7.8).

Энергия передатчика делится первым щелевым мостом на две равные части, причем волны, поступающие на вход верхнего и нижнего разрядников, как было показано в разд. 21.4, сдвинуты по фазе на 90°. После отражения от разрядников энергия каждой из отраженных волн снова делится пополам. Но в плече *I* обе отраженные волны оказываются в противофазе и гасят друг друга, а в плечо *II* поступают в фазе, т. е. энергия из передатчика, отразившись от разрядников, поступает в антенну. Благодаря свойствам щелевого моста мощность, просочившаяся через разрядники, рассеивается в поглощающей нагрузке. В режиме приема, когда разрядники погашены, энергия из антенны беспрепятственно поступает на вход приемника.

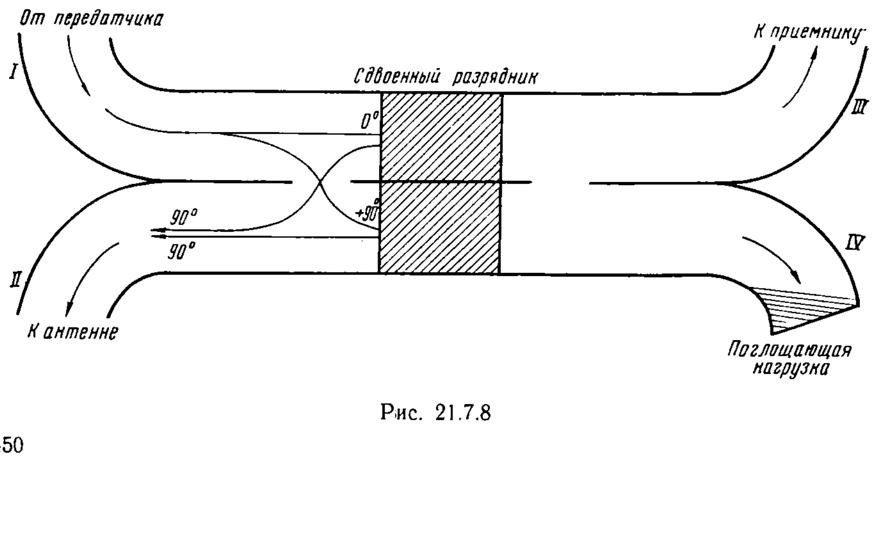


Рис. 21.7.8

Задача устранения взаимных помех, возникающих при одновременной работе радиотехнических систем, является весьма актуальной. Одной из причин появления помех является то, что радиопередающие устройства, помимо полезного сигнала, излучают гармоники, частота которых кратна частотам основного спектра. Кроме того, радиопередающие устройства излучают электромагнитные колебания в пределах некоторой полосы частот, примыкающей к основной (внеполосное излучение). Использование обычных полосовых фильтров для устранения паразитного излучения оказывается нецелесообразным по двум причинам:

— избирательные свойства этих фильтров на частотах, достаточно высоких по сравнению с частотами полосы пропускания, существенно ухудшаются. Это объясняется как свойствами самих фильтров, так и тем, что на высоких частотах в линиях передачи становится возможным распространение высших типов волн;

— обычные полосовые фильтры в пределах полосы заграждения практически полностью отражают всю энергию, поступившую на их вход, обратно к передатчику. Это может отрицательно повлиять на рабочий режим передатчика.

Поэтому на выходе передатчика включают фильтр поглощающего типа, в котором энергия гармоник поглощается в неотражающей нагрузке. Мостовой фильтр такого типа, обеспечивающий поглощение гармоник, частота которых выше частоты несущей, представлен на рис. 21.7.9.

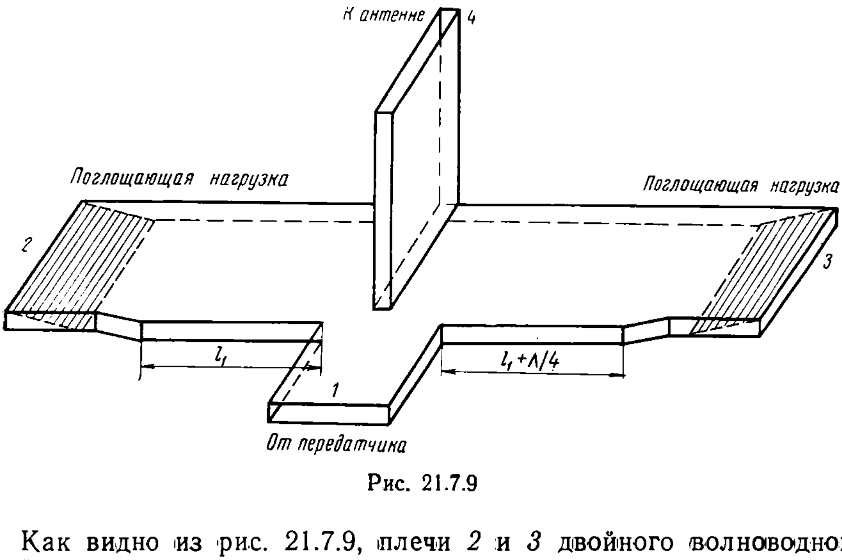


Рис. 21.7.9

Как видно из рис. 21.7.9, плечи *2* и *3* двойного волноводного тройника заканчиваются отрезками прямоугольных волноводов с уменьшенным размером широкой стенки. Переход от волновода с нормальным размером к суженному волноводу осуществляется плавно. Размер широкой стенки суженных волноводов выбирается таким образом, чтобы на частотах, лежащих вблизи несущей, они были предельными. Энергия, поступающая от передатчика в двойной волноводный тройник, делится поровну между боковыми плечами тройника и поступает на вход суженных волноводов. Все колебания, частота которых выше критической частоты суженных волноводов, свободно проходят через плавные переходы в эти волноводы и рассеиваются в поглощающих нагрузках. Для колебаний, частота которых соответствует рабочей полосе передатчика, суженные волноводы являются предельными, и поэтому вся энергия этих колебаний отражается обратно к разветвлению волноводов. Так как отрезок волновода с нормальным сечением в плече *3* длиннее соответствующего отрезка волновода в плече *4* на четверть длины волны, то отраженные волны оказываются противофазными и возбуждают плечо *4* двойного волноводного тройника. Следовательно, энергия колебаний, частоты которых ниже критической частоты предельных волноводов, поступает из передатчика (плечо *1*) в антенну (плечо *4*), а все колебания с более высокой частотой поглощаются.

Аналогичный принцип может быть положен в основу мостового фильтра, поглощающего энергию колебаний, лежащих ниже полосы пропускания системы (рис. 21.7.10). При этом размер широ-

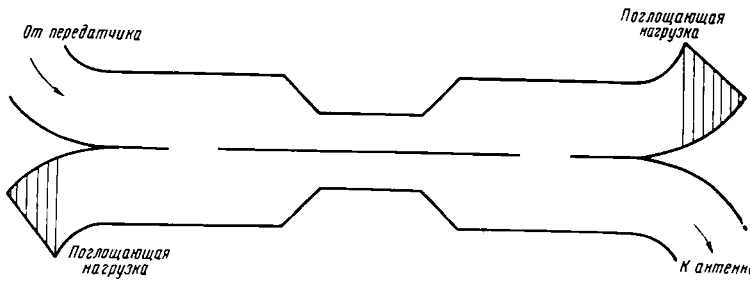


Рис. 21.7.10

кой стенки суженных волноводов выбирается так, чтобы через них свободно проходили все колебания в пределах полосы пропускания и отражались все колебания, частота которых ниже частот основного спектра сигнала. В результате все низкочастотные паразитные колебания после отражения от входов предельных волноводов поступят в поглощающую нагрузку, а полезный сигнал беспрепятственно пройдет к антенне. Последовательное включение фильтров, изображенных на рис. 21.7.9 и 21.7.10, обеспечивает подавление всего паразитного излучения за пределами основного спектра. Очевидно, что вместо «магического Т» и щелевого моста в фильтрах может быть использован любой другой мост.

ГЛАВА 22

ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА СВЧ

22.1. Магнитные свойства вещества. Ферриты

Как известно, атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и определенного числа отрицательно заряженных электронов. Каждый электрон вращается по некоторой орбите вокруг ядра, одновременно вращаясь вокруг своей собственной оси.

Поскольку электрон — это заряженная частица, а перемещение заряженной частицы по замкнутой траектории эквивалентно протеканию тока в контуре, то орбиту каждого из электронов можно рассматривать как элементарную рамку с током[1]. Под влиянием тока, протекающего по рамке, в окружающем пространстве возникает постоянное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки. Этому магнитному полю соответствует орбитальный магнитный момент электрона $\mathbf{M}_{орб}$ (рис. 22.1.1). При вращении электрона вокруг своей оси возникает спиновый магнитный момент $\mathbf{M}_{сп}$ (рис. 22.1.2).

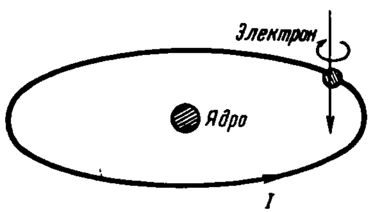


Рис. 22.1.1

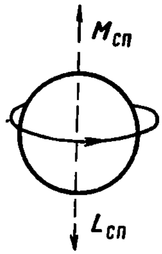


Рис. 22.1.2

Электрон — частица с определенной массой. Поэтому каждый электрон может рассматриваться в первом приближении как волчок (гироскоп) с массой m, вращающийся вокруг центра атома и одновременно вокруг собственной оси. Это обусловливает наличие у электрона орбитального механического момента количества

[1]) Направление тока в рамке противоположно направлению движения электрона по орбите, так как электрон заряжен отрицательно.

движения ($\mathbf{L}_{орб}$) или просто орбитального механического момента и спинового механического момента количества движения (спинового механического момента $\mathbf{L}_{сп}$) (рис. 22.1.1 и 22.1.2).

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что

$$\mathbf{M}_{орб} = -\mu_0 \frac{e}{2m} \mathbf{L}_{орб}; \tag{22.1.1}$$

$$\mathbf{M}_{сп} = -\mu_0 \frac{e}{m} \mathbf{L}_{сп}, \tag{22.1.2}$$

где e и m — соответственно заряд и масса электрона. Знак минус в (22.1.1) и (22.1.2), а следовательно, и антипараллельная ориентация магнитных и механических моментов обусловлены отрицательным зарядом электрона.

Полный магнитный и механический моменты атома есть геометрическая сумма соответственно магнитных и механических спиновых и орбитальных моментов всех электронов в атоме. В свою очередь, полный магнитный и механический моменты молекулы вещества являются геометрической суммой моментов отдельных атомов в молекуле и т. д. Магнитный момент ядра примерно на три порядка меньше магнитного момента электрона, поэтому влиянием магнитного момента ядра можно пренебречь.

При анализе состояний электронов в атомах и молекулах можно исходить из фундаментального физического принципа, гласящего, что произвольная физическая система находится в устойчивом во времени состоянии, если она обладает минимумом полной энергии. У большинства атомов минимум полной энергии достигается при антипараллельной ориентации спиновых моментов, т. е. суммарный магнитный момент этих атомов близок к нулю. Исключение составляют металлы переходных групп (группа железа, палладия, платины и др.), у которых минимуму полной энергии соответствует параллельная ориентация спиновых магнитных и механических моментов части электронов. Например, у атома железа на предпоследней оболочке находятся четыре электрона с параллельными спинами, у атома кобальта — три и т. д. В постоянном магнитном поле атомы этих металлов ведут себя подобно стрелке компаса: их магнитные моменты ориентируются параллельно приложенному полю.

Как будет видно из дальнейшего изложения, принцип действия ферритовых устройств, работающих в диапазоне свч, основан на взаимодействии магнитного поля электромагнитной волны с некомпенсированными магнитными моментами атомов. Чтобы такое взаимодействие стало возможным, электромагнитная волна должна проникать в вещество, обладающее магнитными свойствами, и распространяться в нем. В проводники электромагнитные волны почти не проникают, поэтому чистое железо не пригодно для использования в подобных устройствах. Эту трудность можно устранить, если применять обладающие свойствами диэлектриков химические соединения ферромагнитных металлов (обычно железа) с другими элементами. Подобные магнитные диэлектрики, называемые ферритами, имеют достаточно высокое удельное сопротивление — порядка $10^6 \div 10^{11}$ *ом·см*, тогда как у железа в диапазоне свч удельное сопротивление равно 10^{-5} *ом·см*. Диэлектрическая проницаемость ферритов зависит от состава феррита и обычно равна $5 \div 20$.

Состав простейших ферритов описывается следующей химической формулой: $Me^{+2}OFe_2O_3$, где Me^{+2} — ион двухвалентного металла типа Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd и др. Часто применяются так называемые смешанные ферриты, в состав которых входят одновременно ионы двух или большего числа металлов. Ферромагнитными свойствами обладает также соединение вида $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$, называемое иттриевым феррит-гранатом.

Как показали экспериментальные исследования, в ферритах вклад орбитальных моментов в общий момент обычно мал, а иногда пренебрежимо мал. Магнитные свойства ферритов определяются в основном взаимной ориентацией спиновых магнитных моментов отдельных электронов в атоме, взаимной ориентацией спиновых моментов отдельных атомов в молекуле и т. д.

22.2. Прецессия магнитного момента

Предположим, что электрон с магнитным моментом $\mathbf{M}_{сп}$ и механическим моментом $\mathbf{L}_{сп}$ помещен в поле действия внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$, направление которого не совпадает с направлением вектора $\mathbf{M}_{сп}$ (рис. 22.2.1). Под влиянием приложенного поля магнитный момент $\mathbf{M}_{сп}$ стремится повернуться и установиться параллельно вектору $\mathbf{H}_0$, причем вращательный момент $\mathbf{T}$, действующий на магнитный момент, будет равен [9, 20]

$$\mathbf{T} = [\mathbf{M}_{сп}, \mathbf{H}_0]. \qquad (22.2.1)$$

Однако наличие механического момента $\mathbf{L}_{сп}$ делает электрон подобным гироскопу, ось которого под влиянием действующих сил прецессирует (вращается). Поэтому под воздействием внешнего магнитного поля концы векторов $\mathbf{L}_{сп}$ и $\mathbf{M}_{сп}$ начинают прецессировать вокруг вектора $\mathbf{H}_0$. Траектория движения концов этих векторов изображена на рис. 22.2.1 сплошной линией.

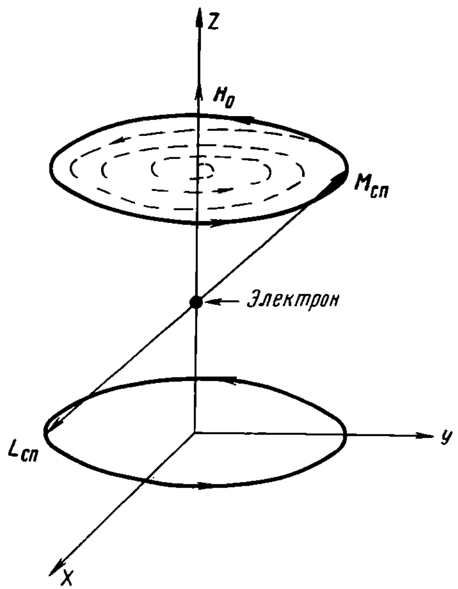


Рис. 22.2.1

Скорость перемещения конца вектора $\mathbf{L}_{сп}$ равна величине вращательного момента $\mathbf{T}$:

$$\frac{d\,\mathbf{L}_{сп}}{dt} = \mathbf{T} = [\mathbf{M}_{сп},\ \mathbf{H}_0]. \qquad (22.2.2)$$

Подставляя в (22.2.2) вместо $\mathbf{L}_{сп}$ его значение из (22.1.2), получаем

$$\frac{d\,\mathbf{M}_{сп}}{dt} = -\gamma_{сп}[\mathbf{M}_{сп},\ \mathbf{H}_0], \qquad (22.2.3)$$

где

$$\gamma_{сп} = \mu_0\ \frac{e}{m} = 7\pi\cdot 10^4\ \frac{м}{а\cdot сек}\ . \qquad (22.2.4)$$

Векторное ур-ние (22.2.3) эквивалентно трем скалярным уравнениям, имеющим в декартовой системе координат вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dM_{спx}}{dt} + \gamma_{сп}H_0M_{спy} = 0\\ &\frac{M_{спy}}{dt} - \gamma_{сп}H_0M_{спx} = 0\\ &\frac{dM_{спz}}{dt} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (22.2.5)$$

При записи (22.2.5) учитывалось, что вектор $\mathbf{H}_0$ ориентирован вдоль оси Z, т. е. $\mathbf{H}_0 = \mathbf{z}_0H_0$. Совместно решая первые два уравнения системы (22.2.5), получаем

$$\left.\begin{aligned} M_{спx} &= M_0\cos\omega_0 t\\ M_{спy} &= M_0\sin\omega_0 t \end{aligned}\right\}, \qquad (22.2.6)$$

где

$$\omega_0 = \gamma_{сп}H_0 \qquad (22.2.7)$$

частота свободной прецессии магнитного момента в постоянном поле.

Как следует из равенства (22.2.6), конец вектора $\mathbf{M}_{сп}$ описывает окружность, вращаясь *по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора* $\mathbf{H}_0$ (рис. 22.2.1). Частота свободной прецессии согласно (22.2.7) тем выше, чем больше напряженность внешнего магнитного поля.

В реальных ферромагнитных средах всегда имеют место потери. Поэтому конец вектора $\mathbf{M}_{сп}$ двигается по свертывающейся спирали, как показано пунктиром на рис. 22.2.1. Через время порядка 10^{-8} *сек* прецессия практически полностью прекращается, и вектор $\mathbf{M}_{сп}$ устанавливается параллельно вектору $\mathbf{H}_0$.

При определенной напряженности внешнего магнитного поля, зависящей от состава ферритового образца, его формы и некоторых других факторов, все нескомпенсированные магнитные моменты ориентируются параллельно друг другу и приложенному полю. Феррит намагничивается до насыщения. В результате вектор магнитного момента единицы объема феррита, равный произведению $\mathbf{M}_{\text{сп}}$ на число N упорядоченных магнитных моментов в единице объема, установится параллельно вектору $\mathbf{H}_0$, т. е.

$$\mathbf{M}_0 = N\,\mathbf{M}_{\text{сп}} = \mathbf{z}_0 M_0. \tag{22.2.8}$$

Внешнее магнитное поле оказывает одинаковое влияние на все нескомпенсированные магнитные моменты. Поэтому ур-ние (22.2.4) описывает движение не только магнитного момента отдельного электрона, но и всех магнитных моментов в единице объема, т. е. в ур-ние (22.2.4) можно вместо $\mathbf{M}_{\text{сп}}$ подставить величину $\mathbf{M}$:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma_{\text{сп}}[\mathbf{M},\ \mathbf{H}_0]. \tag{22.2.9}$$

22.3. Тензор магнитной проницаемости феррита. Явление ферромагнитного резонанса

Предположим, что в намагниченной полем H_0 ферритовой среде распространяется электромагнитная волна с произвольно ориентированным вектором напряженности магнитного поля $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}$. Результирующее магнитное поле, действующее на магнитные моменты, является суперпозицией постоянного поля и поля волны:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \mathbf{z}_0 H_0 + \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}. \tag{22.3.1}$$

В отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе, ориентация в пространстве вектора магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ [1]) не остается постоянной, ибо длина вектора $\dot{\mathbf{H}}$ меняется по гармоническому закону. Изменение ориентации магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ вызывает прецессию магнитных моментов, которая уже не будет затухающей, так как отсутствует какое-либо определенное направление внешнего поля, параллельно которому могли бы установиться магнитные моменты. Возникает так называемая *вынужденная* прецессия, частота которой совпадает с частотой электромагнитной волны.

Если амплитуда магнитного поля волны мала по сравнению с амплитудой постоянного поля ($|\dot{\mathbf{H}}_m| \ll H_0$), то отклонения вектора $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ от оси Z незначительны. Соответственно невелики и отклоне-

---

[1]) Кроме случая, когда $\dot{\mathbf{H}} \parallel \mathbf{H}_0$. Но этот случай интереса не представляет.

ния вектора $\dot{\mathbf{M}}_\Sigma$ от оси Z, т. е. вектор $\dot{\mathbf{M}}_\Sigma$ можно представить в виде суммы

$$\dot{\mathbf{M}}_\Sigma = \mathbf{z}_0 M_0 + \dot{\mathbf{M}}_m e^{i\omega t}, \qquad (22.3.2)$$

где $|\dot{\mathbf{M}}_m| \ll M_0$.

Подставляя в (22.2.9) вместо векторов $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{M}$ соответственно векторы $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ и $\dot{\mathbf{M}}_\Sigma$, получаем

$$i\,\omega\,\dot{\mathbf{M}}_m e^{i\omega t} = -\gamma_{\text{сп}}[\dot{\mathbf{M}}_\Sigma,\ \dot{\mathbf{H}}_\Sigma]. \qquad (22.3.3)$$

Согласно (22.3.1) и (22.3.2)

$$[\dot{\mathbf{M}}_\Sigma,\ \dot{\mathbf{H}}_\Sigma] = [\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_m] M_0 e^{i\omega t} + [\dot{\mathbf{M}}_m,\ \mathbf{z}_0] H_0 e^{i\omega t} + [\dot{\mathbf{M}}_m,\ \dot{\mathbf{H}}_m] e^{2i\omega t} \approx$$
$$\approx [\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_m] M_0 e^{i\omega t} + [\dot{\mathbf{M}}_m,\ \mathbf{z}_0] H_0 e^{i\omega t}, \qquad (22.3.4)$$

так как в соответствии со сделанными предположениями $|\dot{\mathbf{H}}_m| \ll H_0$ и $|\dot{\mathbf{M}}_m| \ll M_0$. С учетом приближенного равенства (22.3.4) выражение (22.3.3) после сокращения временно́го множителя принимает вид

$$i\,\omega\,\dot{\mathbf{M}}_m = -\gamma_{\text{сп}} M_0 [\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{H}}_m] + \gamma_{\text{сп}} H_0 [\mathbf{z}_0,\ \dot{\mathbf{M}}_m]. \qquad (22.3.5)$$

Подставляя в (22.3.5) вместо $\dot{\mathbf{M}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ их разложения $\dot{\mathbf{M}}_m = \mathbf{x}_0 \dot{M}_{mx} + \mathbf{y}_0 \dot{M}_{my} + \mathbf{z}_0 \dot{M}_{mz}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{x}_0 \dot{H}_{mx} + \mathbf{y}_0 \dot{H}_{my} + \mathbf{z}_0 \dot{H}_{mz}$, получаем

$$\left.\begin{aligned} i\,\omega\,\dot{M}_{mx} &= \omega_M \dot{H}_{my} - \omega_0 \dot{M}_{my} \\ i\,\omega\,\dot{M}_{my} &= -\omega_M \dot{H}_{mx} + \omega_0 \dot{M}_{mx} \\ i\,\omega\,\dot{M}_{mz} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (22.3.6)$$

где через ω_M обозначено произведение $\gamma_{\text{сп}} M_0$, а ω_0 — частота ферромагнитного резонанса, равная согласно (22.2.7) $\gamma_{\text{сп}} H_0$.

Решая систему (22.3.6), находим

$$\left.\begin{aligned} \dot{M}_{mx} &= -\frac{\omega_0\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}\dot{H}_{mx} - i\frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}\dot{H}_{my} \\ \dot{M}_{my} &= i\frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}\dot{H}_{mx} - \frac{\omega_0\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}\dot{H}_{my} \\ \dot{M}_{mz} &= 0. \end{aligned}\right\}. \qquad (22.3.7а)$$

Комплексная амплитуда вектора $\dot{\mathbf{B}}$ волны, распространяющейся в феррите, согласно (1.3.19) равна

$$\dot{\mathbf{B}}_m = \mu_0 (\dot{\mathbf{H}}_m + \dot{\mathbf{M}}_m). \qquad (22.3.7б)$$

Подставляя в это равенство составляющие вектора $\dot{\mathbf{M}}_m$ и группируя коэффициенты при одноименных проекциях вектора $\dot{\mathbf{H}}_m$, получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot{B}_{mx} &= \mu_0\left(1-\frac{\omega_0\omega_M}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\dot{H}_{mx} - \mathrm{i}\,\frac{\mu_0\omega\omega_M}{\omega^2-\omega_0^2}\,\dot{H}_{my}\\ \dot{B}_{my} &= \mathrm{i}\,\frac{\mu_0\omega\omega_M}{\omega^2-\omega_0^2}\,\dot{H}_{mx} + \mu_0\left(1-\frac{\omega_0\omega_M}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\dot{H}_{my}\\ \dot{B}_{mz} &= \mu_0\dot{H}_{mz}.\end{aligned}\right\}. \tag{22.3.8}$$

Используя матричные обозначения, можно равенства (22.3.8) записать в виде

$$\dot{\mathbf{B}}_m = \|\mu_a\|\,\dot{\mathbf{H}}_m, \tag{22.3.9}$$

где

$$\dot{\mathbf{B}}_m = \begin{Vmatrix}\dot{B}_{mx}\\ \dot{B}_{my}\\ \dot{B}_{mz}\end{Vmatrix}; \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \begin{Vmatrix}\dot{H}_{mx}\\ \dot{H}_{my}\\ \dot{H}_{mz}\end{Vmatrix};$$

$$\|\mu_a\| = \begin{Vmatrix}\mu_a & -\mathrm{i}\,\mu_{aa} & 0\\ \mathrm{i}\,\mu_{aa} & \mu_a & 0\\ 0 & 0 & \mu_0\end{Vmatrix} \tag{22.3.10}$$

и

$$\mu_a = \mu_0\left(1-\frac{\omega_0\omega_M}{\omega^2-\omega_0^2}\right); \tag{22.3.11}$$

$$\mu_{aa} = \mu_0\frac{\omega\omega_M}{\omega^2-\omega_0^2}. \tag{22.3.12}$$

Матрицу (22.3.10) называют *тензором магнитной проницаемости феррита.*

Предположим, что в феррите распространяется электромагнитная волна, у которой вектор магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}$ поляризован по кругу в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{H}_0$, т. е. в плоскости xy. Обозначим через $\dot{\mathbf{H}}^+$ вектор, вращающийся по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления постоянного магнитного поля

$$\dot{\mathbf{H}}_m^+ = (\mathbf{x}_0 - \mathrm{i}\,\mathbf{y}_0)\,\dot{H}_m. \tag{22.3.13}$$

Вектор с противоположным направлением вращения обозначим через $\dot{\mathbf{H}}^-$:

$$\dot{\mathbf{H}}_m^- = (\mathbf{x}_0 + \mathrm{i}\,\mathbf{y}_0)\,\dot{H}_m. \tag{22.3.14}$$

Подставляя в (22.3.7a) вместо $\dot{H}_{mx}$ и $\dot{H}_{my}$ их значения из (22.3.13), получаем

$$\left.\begin{aligned} \dot{M}^{+}_{mx} &= -\frac{\omega_M}{\omega-\omega_0}\dot{H}_m \\ \dot{M}^{+}_{my} &= \mathrm{i}\,\frac{\omega_M}{\omega-\omega_0}\dot{H}_m \end{aligned}\right\}. \tag{22.3.15}$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{M}}^{+}_{m} = -(\mathbf{x}_0 - \mathrm{i}\,\mathbf{y}_0)\frac{\omega_M}{\omega-\omega_0}\dot{H}_m \tag{22.3.16}$$

и согласно (22.3.7б), (22.3.13)

$$\dot{\mathbf{B}}^{+}_{m} = \mu_0\left(1-\frac{\omega_M}{\omega-\omega_0}\right)\dot{\mathbf{H}}^{+}_{m}. \tag{22.3.17}$$

Как следует из равенства (22.3.17), вектор магнитной индукции также поляризован по кругу и вращается в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{H}^{+}$. Естественно рассматривать коэффициент пропорциональности между векторами $\dot{\mathbf{B}}^{+}_{m}$ и $\dot{\mathbf{H}}^{+}_{m}$ как магнитную проницаемость феррита для волны с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^{+}$:

$$\mu^{+}_{a} = \mu_0\left(1-\frac{\omega_M}{\omega-\omega_0}\right). \tag{22.3.18}$$

Аналогично для волны с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^{-}$ получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}^{-}_{m} &= (\mathbf{x}_0 + \mathrm{i}\,\mathbf{y}_0)\frac{\omega_M}{\omega+\omega_0}\dot{H}_m \\ \dot{\mathbf{B}}^{-}_{m} &= \mu_0\left(1+\frac{\omega_M}{\omega+\omega_0}\right)\dot{H}^{-}_{m} \end{aligned}\right\}; \tag{22.3.19}$$

$$\mu^{-}_{a} = \mu_0\left(1+\frac{\omega_M}{\omega+\omega_0}\right). \tag{22.3.20}$$

Отметим, что согласно (22.3.18) и (22.3.20) в намагниченной ферритовой среде $\mu^{+}_{a} \neq \mu^{-}_{a}$. Сравнение (22.3.18) и (22.3.20) с (22.3.11) и (22.3.12) показывает, что

$$\mu^{+}_{a} = \mu_a - \mu_{aa}; \tag{22.3.21}$$

$$\mu^{-}_{a} = \mu_a + \mu_{aa}. \tag{22.3.22}$$

Как было показано в предыдущем разделе, только потери в феррите препятствуют свободной прецессии магнитного момента с частотой ω_0. Поэтому на этой частоте достаточно передавать прецессирующим электронам энергию, равную теряемой ими, чтобы прецессия стала незатухающей.

Роль такого источника, компенсирующего потери и поддерживающего свободную прецессию, может выполнять электромагнитная волна с круговой поляризацией магнитного поля, если *направление и частота вращения вектора магнитного поля совпадают* *с направлением и частотой свободной прецессии.* Так как при свободной прецессии конец вектора **M** вращается по часовой стрелке[1]), то в соответствии с определением (22.3.13) такой волной является волна, у которой вектор магнитного поля имеет поляризацию $\mathbf{H}^+$ на частоте

$$\omega = \omega_0 = \gamma_{\text{сп}} H_0. \tag{22.3.23}$$

Амплитуда прецессии будет расти, как показано на рис. 22.3.1. При этом происходит поглощение энергии электромагнитной волны.

Если частота электромагнитной волны с поляризацией $\mathbf{H}^+$ отличается от ω_0, то магнитное поле волны препятствует стремлению магнитного момента прецессировать с частотой ω_0. Поэтому ам-

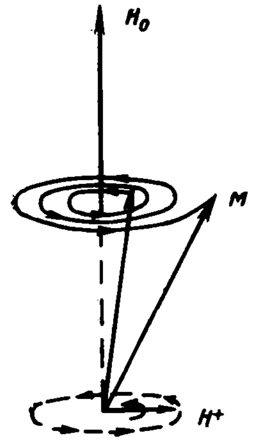


Рис. 22.3.1

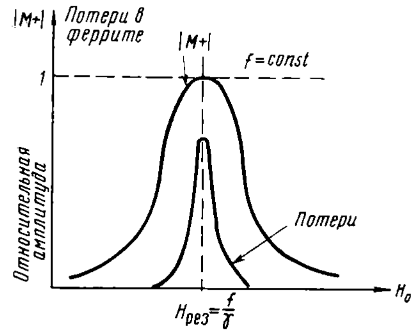


Рис. 22.3.2

плитуда прецессии при $\omega \neq \omega_0$ меньше, чем при $\omega = \omega_0$. Но на поддержание прецессии с меньшей амплитудой необходимо затратить меньшую энергию. Следовательно, при $\omega = \omega_0$ амплитуда вектора $\mathbf{M}^+$ наибольшая, и волна с поляризацией $\mathbf{H}^+$ испытывает в феррите максимальное поглощение (рис. 22.3.2).

Явление резкого увеличения поглощения энергии электромагнитной волны с поляризацией $\mathbf{H}^+$ при напряженности магнитного поля, равной согласно (22.3.23)

$$H_{\text{рез}} = \frac{\omega}{\gamma_{\text{сп}}}, \tag{22.3.24}$$

получило название *ферромагнитного резонанса.* Частоту ω_0, на которой это поглощение происходит, называют *частотой ферромагнитного резонанса.*

---

[1]) Если смотреть вдоль положительного направления вектора $\mathbf{H}_0$.

Совершенно по-иному взаимодействует феррит с волной, у которой вектор магнитного поля имеет поляризацию $\mathbf{H}^{-}$. У этой волны вектор магнитного поля также поляризован по кругу, но вращается в сторону, противоположную направлению свободной прецессии. Поэтому независимо от частоты электромагнитного поля и напряженности внешнего магнитного поля амплитуда прецессии на всех частотах мала, и соответственно мало на всех частотах поглощение этой волны в феррите.

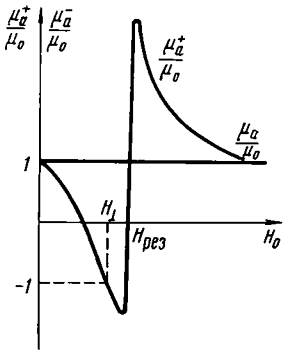


Рис. 22.3.3

На рис. 22.3.3 показана зависимость μ_a^+ и μ_a^- от напряженности магнитного поля H_0[1]. График $\frac{\mu_a^+}{\mu_0}$ вблизи $H_0=H_{рез}$ построен с учетом того, что при наличии потерь в феррите вектор $\dot{M}^+$ (а следовательно, и вектор $\dot{B}^+$) в области резонанса не стремится к бесконечности, как это следует из ф-лы (22.3.16), а лишь достигает максимального значения.

22.4. Распространение электромагнитных волн в неограниченной ферритовой среде

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Пусть имеется однородная, безграничная во всех направлениях ферритовая среда, равномерно намагниченная внешним магнитным полем $\mathbf{H}_0$, которое ориентировано параллельно оси Z. Электромагнитные волны, распространяющиеся в ферритовой среде, должны удовлетворять уравнениям Максвелла, записанным с учетом анизотропии. Подставляя (22.3.8) в (4.4.21), получаем[2]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -\mathrm{i}\,\omega\,(\mu_a\dot{H}_x-\mathrm{i}\,\mu_{aa}\dot{H}_y) \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -\mathrm{i}\,\omega\,(\mathrm{i}\,\mu_{aa}\dot{H}_x+\mu_a\dot{H}_y) \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -\mathrm{i}\,\omega\mu_0\dot{H}_z \end{aligned}\right\}; \qquad (22.4.1)$$

---

[1]) При построении графика $\frac{\mu_a^-}{\mu_0}$ предполагалось, что выполняется обычно имеющее место неравенство $\omega_M \ll \omega+\omega_0$.

[2]) Индекс m везде ниже опущен.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \dot H_z}{\partial y}-\frac{\partial \dot H_y}{\partial z}&=\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a \dot E_x\\ \frac{\partial \dot H_x}{\partial z}-\frac{\partial \dot H_z}{\partial x}&=\mathrm{i}\,\omega\,\varepsilon_a \dot E_y\\ \frac{\partial \dot H_y}{\partial x}-\frac{\partial \dot H_x}{\partial y}&=\mathrm{i}\,\omega\varepsilon_a \dot E_z\end{aligned}\right\}. \tag{22.4.2}$$

Ограничимся рассмотрением двух наиболее интересных случаев:

— направление распространения волны в феррите совпадает с направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ (продольное намагничивание);

— направление распространения волны в феррите перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ (поперечное намагничивание).

ПРОДОЛЬНОЕ НАМАГНИЧИВАНИЕ

Так как ферритовая среда предполагается однородной, то в ней возможно распространение плоских волн. Поэтому в (22.4.1) и (22.4.2) можно положить $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}=0$. При этом, как следует из третьих уравнений системы (22.4.1) и (22.4.2),

$$\dot E_z=\dot H_z=0, \tag{22.4.3}$$

т. е. распространяющаяся плоская волна, как и в случае изотропной среды, является поперечной:

$$\dot{\mathbf{H}}=\left(\mathbf{x}_0 \dot H_x+\mathbf{y}_0 \dot H_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_z z}; \tag{22.4.4}$$

$$\dot{\mathbf{E}}=\left(\mathbf{x}_0 \dot E_x+\mathbf{y}_0 \dot E_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_z z}, \tag{22.4.5}$$

где β_z — коэффициент распространения плоской волны в ферритовой среде.

Подставляя (22.4.4) и (22.4.5) в (22.4.1) и (22.4.2) и исключая из полученных равенств $\dot E_x$ и $\dot E_y$, равных согласно (22.4.2)

$$\dot E_x=\frac{\beta_z}{\omega\varepsilon_a}\dot H_y; \tag{22.4.6}$$

$$\dot E_y=-\frac{\beta_z}{\omega\varepsilon_a}\dot H_x, \tag{22.4.7}$$

получаем:

$$\left(\beta_z^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a\right)\dot H_y=\mathrm{i}\,\omega^2\varepsilon_a\mu_{aa}\dot H_x; \tag{22.4.8}$$

$$\left(\beta_z^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a\right)\dot H_x=-\mathrm{i}\,\omega^2\varepsilon_a\mu_{aa}\dot H_y. \tag{22.4.9}$$

Исключая из (22.4.8) и (22.4.9) $\dot H_x$ и $\dot H_y$, находим β_z^2

$$\beta_z^2=\omega^2\varepsilon_a\left(\mu_a\mp\mu_{aa}\right)=\omega^2\varepsilon_a\mu_a^{\pm}. \tag{22.4.10}$$

Следовательно, при продольном намагничивании в ферритовой среде распространяются две волны: волна с коэффициентом распространения

$$\beta_z^+ = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a^+}\,, \tag{22.4.11}$$

у которой согласно (22.4.8)

$$\dot{H}_y = -\mathrm{i}\,\dot{H}_x, \tag{22.4.12}$$

и волна с коэффициентом распространения

$$\beta_z^- = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a^-}, \tag{22.4.13}$$

у которой согласно (22.4.8)

$$\dot{H}_y = \mathrm{i}\,\dot{H}_x. \tag{22.4.14}$$

Как следует из (22.4.12) и (22.4.14), составляющие $\dot{H}_y$ и $\dot{H}_x$ равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на $\pm 90°$, т. е. у обеих плоских волн вектор магнитного поля поляризован по кругу. В соответствии с принятыми обозначениями волна, имеющая коэффициент распространения β_z^+, совпадает с волной $\dot{\mathbf{H}}^+$, а волна, имеющая коэффициент распространения β_z^-, совпадает с волной $\dot{\mathbf{H}}^-$.

ПОПЕРЕЧНОЕ НАМАГНИЧИВАНИЕ

Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси X с коэффициентом распространения β_x. Полагая в (22.4.1) и (22.4.2) $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, замечаем, что система ур-ний (22.4.1), (22.4.2) распадается на две независимые системы:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mu_a \dot{H}_x - \mathrm{i}\,\mu_{aa}\dot{H}_y \\ \beta_x \dot{E}_z &= -\omega\,(\mathrm{i}\,\mu_{aa}\dot{H}_x + \mu_a \dot{H}_y) \\ -\beta_x \dot{H}_y &= \omega\varepsilon_a \dot{E}_z \end{aligned}\right\}; \tag{22.4.15}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_x \dot{E}_y &= \omega\mu_0 \dot{H}_z \\ \dot{E}_x &= 0 \\ \beta_x \dot{H}_z &= \omega\varepsilon_a \dot{E}_y \end{aligned}\right\}. \tag{22.4.16}$$

Исключая $\dot{E}_z$ из (29.4.15), получаем:

$$(\beta_x^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a)\,\dot{H}_y = \mathrm{i}\,\omega^2 \varepsilon_a \mu_{aa} \dot{H}_x; \tag{22.4.17}$$

$$\mathrm{i}\,\mu_{aa}\dot{H}_y = \mu_a \dot{H}_x, \tag{22.4.18}$$

откуда

$$\beta_{x1} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \frac{\mu_a^2 - \mu_{aa}^2}{\mu_a}}\,. \tag{22.4.19}$$

Согласно (22.4.15) у волны с коэффициентом распространения β_{x1} вектор магнитного поля лежит в плоскости xy, перпендикулярной вектору постоянного магнитного поля, и имеет при $\mu_{aa} \neq \mu_a$ эллиптическую поляризацию. Вектор электрического поля параллелен постоянному магнитному полю. Наличие составляющей $\dot{H}_x$, параллельной направлению распространения (ось X), означает, что система (22.4.15) описывает волну H.

Аналогично, исключая $\dot{E}_y$ из ур-ний (22.4.16), получаем

$$\beta_{x2} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0}. \tag{22.4.20}$$

У этой волны согласно (22.4.16) вектор магнитного поля ориентирован параллельно направлению постоянного магнитного поля. В этом случае магнитное поле волны не возбуждает прецессии магнитного момента (см. примечание на стр. 457), и коэффициент распространения имеет такое же значение, какое он имел бы для немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью ε_a. Вектор электрического поля перпендикулярен направлению подмагничивающего поля и направлению распространения. Так как составляющие электрического и магнитного полей лежат в плоскости, нормальной направлению распространения, то эта волна является волной TEM.

22.5. Эффект Фарадея. Продольный ферромагнитный резонанс

Возбудим в продольно намагниченной ферритовой среде волну, у которой вектор магнитного поля линейно поляризован и совпадает по направлению с осью X (рис. 22.5.1):

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{x}_0 \dot{H}. \tag{22.5.1}$$

Как известно, линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн с равной амплитудой и круговой поляризацией:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}}^+ + \dot{\mathbf{H}}^-) = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}_0 - \mathrm{i}\,\mathbf{y}_0)\dot{H} + (\mathbf{x}_0 + \mathrm{i}\,\mathbf{y}_0)\dot{H}]. \tag{22.5.2}$$

В предыдущем разделе было показано, что в продольно намагниченной ферритовой среде волны $\mathbf{H}^+$ и $\mathbf{H}^-$ имеют различные коэффициенты распространения. Поэтому, пройдя вдоль оси Z один и тот же путь l, волны получат различные фазовые сдвиги: $\beta_z^+ l$ и $\beta_z^- l$ соответственно. В результате вектор магнитного поля волны будет равен

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{H}}^+ e^{-\mathrm{i}\beta_z^+ l} + \dot{\mathbf{H}}^- e^{-\mathrm{i}\beta_z^- l}\right] =$$

$$= \frac{\dot{H}}{2}\left\{\mathbf{x}_0\left(e^{-\mathrm{i}\beta_z^- l} + e^{-\mathrm{i}\beta_z^+ l}\right) + \mathrm{i}\mathbf{y}_0\left(e^{-\mathrm{i}\beta_z^- l} - e^{-\mathrm{i}\beta_z^+ l}\right)\right\} =$$

где $\beta_0 = \dfrac{\beta_z^+ + \beta_z^-}{2}$.

Как следует из равенства (22.5.3), составляющие $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ синфазны. Следовательно, у распространяющейся в феррите волны вектор $\dot{\mathbf{H}}$ сохраняет линейную поляризацию, тогда как соотношение между $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ зависит от длины пути, пройденного волной вдоль оси Z. Угол наклона вектора $\dot{\mathbf{H}}$ к оси X в точке с координатой $z=l$ определяется из равенства

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{|\dot{H}_y|}{|\dot{H}_x|} = \operatorname{tg}\frac{\beta_z^- - \beta_z^+}{2}\,l, \tag{22.5.4}$$

откуда

$$\psi = \frac{\beta_z^- - \beta_z^+}{2}\,l. \tag{22.5.5}$$

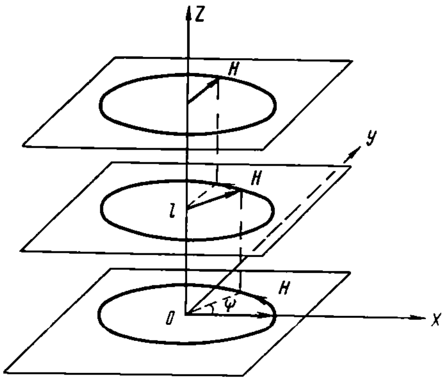


Рис. 22.5.1

Таким образом, при распространении линейно поляризованной волны в продольно намагниченном феррите происходит поворот плоскости поляризации волны (рис. 22.5.1). Угол поворота ψ согласно (22.5.5) тем больше, чем длиннее путь, проходимый волной в феррите. Более подробный анализ, выполненный с учетом ф-л (22.3.18), (22.3.20), (22.4.11) и (22.4.13), показывает, что угол ψ возрастает при увеличении намагниченности M_0 и диэлектрической проницаемости феррита, зависит от напряженности внешнего магнитного поля, частоты и ряда других факторов.

Так как при $H_0 \ll H_{\text{рез}}$ $\mu_a^+ < \mu_a^-$ (см. рис. 22.3.3), то $\beta_z^+ < \beta_z^-$ и плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления внешнего магнитного поля H_0. При $H_0 > H_{\text{рез}}$ направление поворота плоскости поляризации меняется на противоположное.

Описанное явление поворота плоскости поляризации в продольно намагниченной ферритовой среде получило название *явления Фарадея*.

Если частота электромагнитного поля совпадает с частотой ферромагнитного резонанса, волна с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^+$ затухает в феррите. Наступает так называемый *продольный ферромагнитный резонанс.* В то же время волна с поляризацией $\dot{H}^-$ в феррите практически не затухает.

Чтобы избежать значительных потерь энергии в устройствах, где используют эффект Фарадея, к ферриту прикладывают поля, достаточно далекие от резонансного.

22.6. Эффект смещения поля в продольно и поперечно намагниченных ферритах

При отрицательных значениях μ_a^+ коэффициент распространения β_z^+, как видно из ф-лы (22.4.11), становится чисто мнимой величиной, что соответствует волнам с экспоненциально убывающей вдоль оси Z амплитудой. Следовательно, при $\mu_a^+<0$ распространение волн с поляризацией $\dot{H}^+$ в продольно намагниченной среде становится невозможным. Если ферритовая среда имеет конечные размеры в поперечном сечении (цилиндр, квадрат и др.), то волна с поляризацией $\dot{H}^+$ из феррита вытесняется и распространяется вне ферритовой среды. В то же время волна с поляризацией $\dot{H}^-$ нормально распространяется в ферритовой среде, поскольку $\mu_a^-\approx\mu_0$. Рассмотренное явление получило название *эффекта смещения поля.*

Аналогичное явление для волны H имеет место и в поперечно намагниченных ферритах, когда согласно (22.4.19) и (22.3.21)

$$\mu_a-\mu_{aa}=\mu_a^+<0. \qquad (22.6.1)$$

Подставляя в (22.6.1) вместо μ_a^- его значение из (22.3.18), определяем напряженности внешнего магнитного поля, при которых имеет место эффект смещения поля в продольно и поперечно намагниченных ферритах:

$$H_0>\frac{\omega}{\gamma_{\text{сп}}}-M_0=H_{\text{рез}}-M_0. \qquad (22.6.2)$$

22.7. Поперечный ферромагнитный резонанс

Если в (22.4.19) вместо μ_a и μ_{aa} подставить их значения из (22.3.21) и (22.3.22), то получим

$$\beta_{x1}=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_\perp}, \qquad (22.7.1)$$

где

$$\mu_\perp=\frac{\mu_a^2-\mu_{aa}^2}{\mu_a}=2\,\frac{\mu_a^+\mu_a^-}{\mu_a^++\mu_a^-}\ . \qquad (22.7.2)$$

Из графиков, приведенных на рис. 22.3.2, видно, что $\mu_a^- \approx \mu_0$. Поэтому величину $\mu_\perp$ можно записать в виде

$$\mu_\perp \approx 2 \frac{\dfrac{\mu_a^+}{\mu_0}}{1+\dfrac{\mu_a^+}{\mu_0}} . \tag{22.7.3}$$

В реальных ферритах диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\,\varepsilon'', \tag{22.7.4}$$

где $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$. Если пренебречь магнитными потерями, то

$$\beta_{x1} = \omega\sqrt{\mu_\perp}\sqrt{\varepsilon' - i\,\varepsilon''} \approx \omega\sqrt{\mu_\perp\varepsilon'}\left(1 - i\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right) =$$

$$= \omega\sqrt{\varepsilon'\mu_\perp} - i\frac{\omega}{2}\sqrt{\varepsilon'\mu_\perp}\,\mathrm{tg}\,\delta . \tag{22.7.5}$$

Из равенства (22.7.3) вытекает, что если

$$\frac{\mu_a^+}{\mu_0} = -1, \tag{22.7.6}$$

то $\mu_\perp \to \infty$. При этом, как следует из выражения (22.7.5), бесконечно возрастает мнимая часть коэффициента распространения, и распространяющаяся в феррите волна интенсивно затухает. Наступает так называемый *поперечный резонанс*. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае затухание волны не связано с явлением ферромагнитного резонанса, а объясняется бесконечно большим значением магнитной проницаемости $\mu_\perp$ феррита и наличием диэлектрических потерь в нем. Более детальный анализ показывает, что вблизи точки поперечного резонанса резко возрастают не только диэлектрические, но и магнитные потери.

Из графиков на рис. 22.3.3 видно, что отрицательным значениям μ_a^+ соответствуют напряженности внешнего магнитного поля, меньшие резонансной. Следовательно, поперечный резонанс возникает при более низких значениях намагничивающего феррит поля, чем продольный.

Более точное значение напряженности магнитного поля $H_\perp$, при котором имеет место поперечный ферромагнитный резонанс, можно определить из (22.3.11), если учесть, что согласно (22.7.2) $\mu_\perp \to \infty$, когда $\mu_a = 0$, т. е. когда

$$\frac{\omega_0\omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} = 1. \tag{22.7.7}$$

Решая ур-ние (22.7.7) относительно ω_0, получаем

$$H_\perp = \frac{\omega_0}{\gamma_{\text{сп}}} = \sqrt{H_{\text{рез}}^2 + M_0^2} - M_0. \tag{22.7.8}$$

Перейдем к рассмотрению устройств, принцип действия которых основан на описанных выше эффектах в ферритах.

22.8. Ферритовые вентили

Вентилем (или изолятором) в технике свч называют четырехполюсник, обладающий тем свойством, что величина вносимого им затухания зависит от направления движения волны через вентиль. В зависимости от рабочего диапазона, конструкции и уровня рабочей мощности потери в вентиле при распространении волны в одном направлении обычно лежат в пределах от 0,1 до 1 *дб*, а при распространении в обратном направлении достигают 10÷70 *дб*.

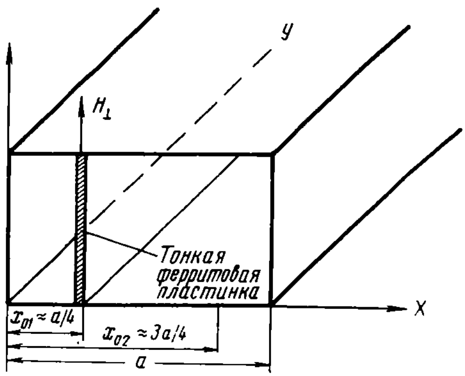


Рис. 22.8.1

Как уже отмечалось в гл. 19, ферритовые вентили используют в качестве широкополосных согласующих устройств. При этом падающая волна, бегущая от генератора к нагрузке, проходит вентиль с малыми потерями, а волна, отраженная от нагрузки и распространяющаяся в обратном направлении, почти полностью затухает в вентиле.

...страненных типа вентиля: вентиль, основанный на явлении поперечного резонанса, и вентиль, основанный на эффекте смещения поля.

Вентиль, основанный на явлении поперечного резонанса, часто применяется в волноводе прямоугольного сечения (рис. 22.8.1). Чтобы стал понятен принцип действия этого вентиля, рассмотрим изменение во времени магнитного поля волны H_{10} в некотором продольном сечении плоскости xy. Составляющие напряженности магнитного поля волны H_{10}, бегущей вдоль положительного направления оси Y, согласно (14.1.26) и (14.1.28) равны (продольная координата в данном случае Y, а не Z, как это было принято ранее):

$$\dot{H}_x = \frac{i\beta a}{\pi} H_{0y} \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta y}; \tag{22.8.1}$$

$$\dot{H}_y = H_{0y} \cos\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta y}. \tag{22.8.2}$$

Как следует из равенств (22.8.1) и (22.8.2), составляющие $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ сдвинуты по фазе на 90°. В общем случае модули этих составляющих не равны, поэтому поляризация магнитного поля эллиптическая. В тех же сечениях, где

$$|\dot{H}_x| = |\dot{H}_y|, \tag{22.8.3}$$

поляризация будет круговой. Так как составляющая $\dot{H}_y$ при переходе через точку $x=\frac{a}{2}$ меняет знак, то справа от сечения $x=\frac{a}{2}$ направление вращения вектора напряженности магнитного поля противоположно направлению вращения этого вектора слева от сечения $x=\frac{a}{2}$. Точное значение координаты x_0, соответствующей сечению, в котором имеет место круговая поляризация магнитного поля, определяется из ур-ния (22.8.3), записанного с учетом (22.8.1) и (22.8.2) в виде

$$\frac{|\dot{H}_x|}{|\dot{H}_y|} = \frac{\beta a}{\pi}\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x_0}{a}\right| = 1, \tag{22.8.4}$$

т. е.

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x_0}{a}\right| = \frac{\pi}{\beta a} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - 1}}. \tag{22.8.5}$$

Когда $a \approx 0{,}71\lambda$, что имеет место вблизи средней частоты рабочего диапазона волновода, из (22.8.5) находим

$$x_{01} \approx \frac{a}{4} \tag{22.8.6}$$

и

$$x_{02} \approx \frac{3a}{4}. \tag{22.8.7}$$

Выберем направление внешнего магнитного поля $H_\perp$ так, чтобы в точке x_{01} поляризация волны совпадала с $\dot{\mathbf{H}}^-$, тогда в точке x_{02} поляризация волны совпадет с $\dot{\mathbf{H}}^+$ (рис. 22.8.1). Изменим направление движения волны на противоположное. При этом в (22.8.1) и (22.8.2) следует заменить β на $(-\beta)$, т. е. изменение направления распространения волны меняет направление вращения вектора магнитного поля на противоположное. Следовательно, обратная волна в точке x_{01} будет иметь поляризацию $\dot{\mathbf{H}}^+$, а в точке x_{02} — поляризацию $\dot{\mathbf{H}}^-$.

Поместим в плоскость, проходящую через точку x_{01} и параллельную оси волновода, тонкую ферритовую пластину (рис. 22.8.1). Напряженность внешнего магнитного поля выберем так, чтобы на заданной частоте выполнялось равенство (22.7.6) (см. рис. 22.3.3), что соответствует поперечному резонансу. Для волны с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^-$ феррит — это диэлектрик с $\mu_a^- \approx \mu_0$. Поэтому волна, распространяющаяся вдоль положительного направления оси Z (прямая волна), без существенных потерь проходит через отрезок волновода с ферритом. Напротив, волна, бегущая в обратном направлении, имеет поляризацию $\dot{H}^+$, которая, как было показано в разд. 22.7, при $H_0=H_\perp$ интенсивно затухает в феррите.

При изменении частоты электромагнитного поля меняется соотношение между продольными и поперечными составляющими магнитного поля (см. (22.8.1) и (22.8.2)). Сечение с круговой по-

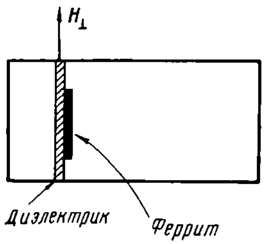


Рис. 22.8.2

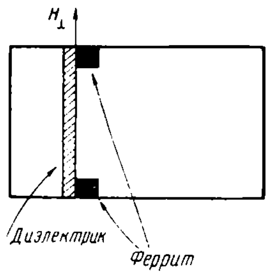


Рис. 22.8.3

ляризацией при повышении частоты смещается в сторону узкой стенки волновода, а при понижении — к центру волновода. При этом феррит оказывается не в оптимальном положении, что влечет за собой увеличение прямых потерь и уменьшение обратных. Кроме того, согласно (22.3.18) и (22.3.20) величины μ_a^+ и μ_a^- зависят от частоты. Поэтому равенство (22.7.6) точно выполняется лишь на одной частоте. Чтобы ослабить зависимость структуры поля от частоты, в волновод вводят пластину из диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью и весьма малыми потерями, а тонкую ферритовую пластину наклеивают либо непосредственно на диэлектрик (рис. 22.8.2), либо на широкую стенку волновода рядом с диэлектриком (рис. 22.8.3). При этом значительная часть энергии, распространяющейся по волноводу, проходит через область, где размещена диэлектрическая пластина. Благодаря этому зависимость структуры поля от частоты, характерная для обычного волновода, становится менее выраженной. Одновременно возрастает концентрация энергии электромагнитной волны в ферритовой пластине, расположенной рядом с диэлектриком, что приводит к существенному увеличению вентильного эффекта. Толщина диэлектрической пластины, ее положение в волноводе и параметры диэлектрика подбираются таким образом, чтобы у той грани диэлектрика, где расположен феррит, поляризация магнитного поля была близка к круговой.

На аналогичных принципах основаны резонансные вентили в коаксиальной и полосковой линиях, H- и Π-образных волноводах и др.

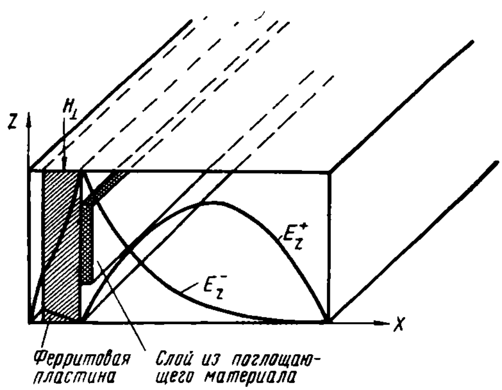


Рис. 22.8.4

На рис. 22.8.4 показан эскиз вентиля, основанного на эффекте смещения поля. На этом же рисунке изображена зависимость амплитуды напряженности электрического поля прямой и обратной волн от координаты x. Напряженность внешнего магнитного поля H_1 выбирается так, чтобы выполнялось неравенство (22.6.2). Как видно из рисунка, на правую грань ферритовой пластины нанесен поглощающий слой из графита. Поскольку при отрицательных значениях магнитной проницаемости μ_a^+ волна с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^+$ вытесняется из феррита и распространяется вне его (рис. 22.8.4), то напряженность $\dot{E}_z^+$ электрического поля волны с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^+$ в поглощающем слое будет весьма мала (рис. 22.8.4). Поэтому затухание энергии этой волны в вентиле незначительно. В то же время энергия волны с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^-$ концентрируется в феррите, как в диэлектрике с высокой диэлектрической проницаемостью. Напряженность $\dot{E}_z^-$ электрического поля этой волны у поверхности феррита велика (рис. 22.8.4), в поглощающем слое наводится ток проводимости $\dot{j}_z = \sigma \dot{E}_z^-$, волна с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^-$ интенсивно поглощается в слое.

Вес и габариты вентиля определяются в значительной степени весом и габаритами постоянного магнита, который создает намагничивающее поле. Поскольку намагничивающее поле в вентиле, основанном на эффекте смещения поля, меньше резонансного (см. рис. 22.3.2), то вентиль, основанный на эффекте смещения поля, меньше по весу и более компактен, чем аналогичный резонансный вентиль.

22.9. Циркуляторы

Циркулятором называется ферритовое устройство, в котором движение потока энергии происходит в строго определенном направлении, зависящем от ориентации внешнего магнитного поля, намагничивающего феррит. На рис. 22.9.1 изображен трехплечный циркулятор. Стрелка указывает направление циркуляции. Электромагнитная волна, поступающая на вход плеча *1* циркулятора, направляется в плечо *2*. Если подвести энергию к плечу *2*, то она направляется в плечо *3* и т. д.

Как будет видно из дальнейшего изложения, изменение ориентации внешнего магнитного поля влечет за собой изменение направления циркуляции на обратное, т. е. циркуляция в направлении *1→2→3→1* заменяется циркуляцией в направлении *1→3→2→1*.

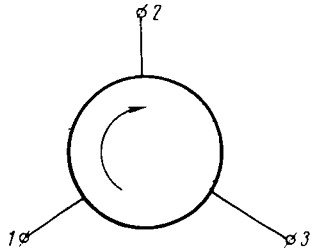


Рис. 22.9.1

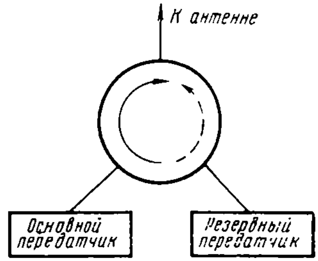


Рис. 22.9.2

Это позволяет использовать циркуляторы в качестве быстродействующих переключателей, например, в схемах резервирования (рис. 22.9.2) и других устройствах. Число плеч в циркуляторе не обязательно равно 3, их может быть 4, 5 и более.

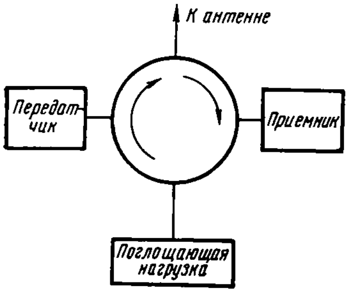


Рис. 22.9.3

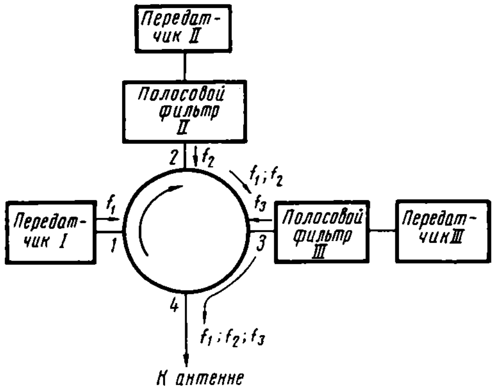


Рис. 22.9.4

Циркуляторы находят широкое применение в разнообразных устройствах. С помощью циркулятора можно обеспечить одновременную работу передатчика и приемника на одну антенну (рис. 22.9.3). В отличие от схем антенных переключателей, рассмотренных в гл. 21, при использовании циркулятора передатчик и приемник могут работать как в непрерывном, так и импульсном режиме. Из рис. 22.9.3 видно, что энергия передатчика поступает в антенну, а сигнал, принятый антенной, попадает на вход приемника. Поглощающая нагрузка в плече *4* позволяет улучшить защиту приемника от сигналов передатчика. Циркуляторы незаменимы в параметрических и туннельных усилителях, ибо позволяют упростить их конструкцию и снизить шумовую температуру усилителей. С помощью циркуляторов можно осуществить так называемое высокочастотное уплотнение антенно-волноводного тракта, при котором один и тот же тракт используется одновременно для передачи или приема нескольких широкополосных сигналов. Необходимость в таком уплотнении возникает, например, в радиорелейных линиях связи. Простейшая схема уплотнения, когда к тракту подведены только три передатчика, изображена на рис. 22.9.4.

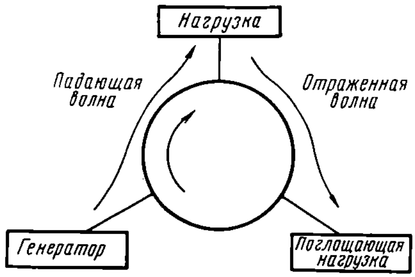


Рис. 22.9.5

Сигнал на частоте f_1, создаваемой передатчиком I, поступает в плечо 2 на вход полосового фильтра II. Поскольку этот фильтр настроен на частоту f_2, то сигнал с частотой f_1 отражается от входа фильтра II и проходит в плечо 3. Отразившись от входа полосового фильтра III, который настроен на частоту f_3 передатчика III, сигнал с частотой f_1, проходит в плечо 4 циркулятора и поступает в антенну. Аналогично можно показать, что сигналы с частотами f_2 и f_3 также проходят в плечо 4 циркулятора и поступают в антенну.

Схема высокочастотного уплотнения строится также с использованием мостов и полосовых (см. гл. 21) либо режекторных фильтров. Однако рассмотренная схема обладает существенно меньшими габаритами и весом, чем аналогичная мостовая схема.

Во многих случаях циркуляторы используются в качестве вентилей для устранения волны, отраженной от нагрузки. Подобная схема изображена на рис. 22.9.5. Преимуществом циркулятора по сравнению с вентилем является возможность уменьшения веса и габаритов. Кроме того, энергия отраженной волны в схеме на рис. 22.9.5 поглощается не в ферритовом элементе, а во внешней нагрузке. Это имеет существенное значение при согласовании с нагрузкой достаточно мощных передатчиков, где мощность отраженной волны может оказаться весьма значительной и потребуется применение системы охлаждения. Систему охлаждения легче осуществить в схеме с циркулятором, где бóльшая часть энергии отраженной волны рассеивается во внешней нагрузке, а не в ферритовом элементе, как в случае вентиля.

22.10. Циркулятор, основанный на эффекте Фарадея

Эскиз циркулятора, основанного на использовании эффекта Фарадея, показан на рис. 22.10.1.

Плечо I представляет собой прямоугольный волновод, плавно переходящий в круглый. При этом волна H_{10} в плече I преобразуется в волну H_{11} круглого волновода. Плечо *3* также представляет собой прямоугольный волновод, расположенный под углом 90° к прямоугольному волноводу в плече *1* и связанный с круглым волноводом через отверстие связи. Поскольку при возбуждении плеча *1* вектор электрического поля в круглом волноводе оказы-

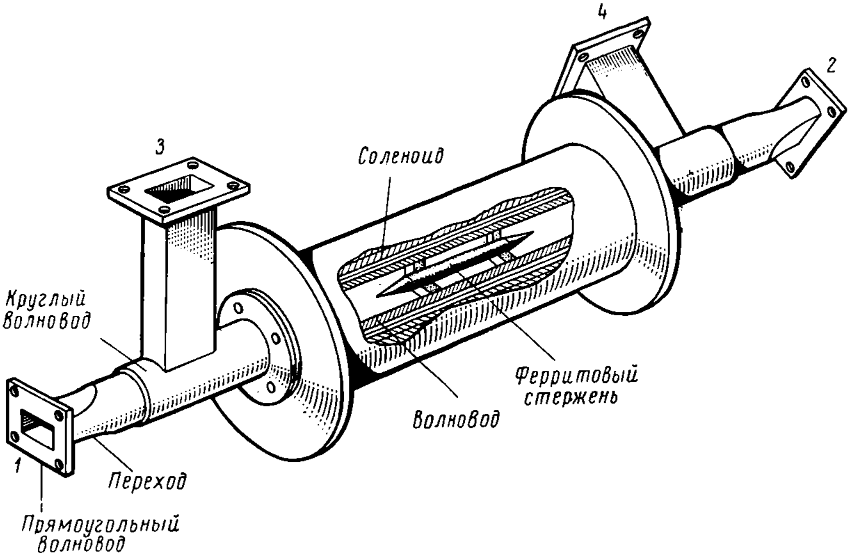


Рис. 22.10.1

вается ориентированным параллельно оси волновода в плече *3*, то энергия из плеча *1* в плечо *3* не ответвляется[1]) и поступает на вход отрезка волновода с продольно намагниченным ферритовым стержнем. Параметры ферритового стержня (диаметр, длина и др.), а также напряженность внешнего магнитного поля подбираются таким образом, чтобы плоскость поляризации волны, прошедшей через отрезок волновода с ферритом, повернулась на 45°. Если вектор $\mathbf{H}_0$ ориентирован в направлении от плеча *1* к плечу *2*, то плоскость поляризации повернется на угол 45° по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора $\mathbf{H}_0$. Плечи *2* и *4* на выходе циркулятора выполнены аналогично плечам *1* и *3*. Однако секция с плечами *2* и *4* повернута вокруг оси круглого волновода на 45° относительно аналогичной секции с плечами *1* и *3* (рис. 22.10.1). Поэтому вектор электрического поля волны на выходе круглого волновода с ферритом оказывается ориентированным вдоль оси вол-

[1]) При этом в плече *3*, как нетрудно показать, возбуждаются *E*-волны и волны *H* высшего типа, для которых прямоугольный волновод в плече *3* является предельным.

новода в плече *4* и перпендикулярно широким стенкам волновода в плече *2*. При этом плечо *4* не возбуждается, поскольку при такой ориентации вектора **E** в плече *4* невозможно возбуждение волны H_{10}, и вся энергия волны поступает на вход плеча *2*.

Возбудим волну H_{10} на входе плеча *2*. Пройдя плавный переход от прямоугольного волновода к круглому, волна H_{10} преобразуется в волну H_{11}, у которой вектор E параллелен оси волновода в плече *4*, вследствие чего это плечо не возбуждается. На выходе отрезка волновода с ферритом плоскость поляризации волны H_{11} окажется повернутой на 45° относительно исходного положения. Поскольку направление поворота плоскости поляризации не зависит от направления движения волны (см. разд. 22.5), то плоскость поляризации повернется на 45° по часовой стрелке и окажется поляризованной горизонтально (плечо *2* повернуто на 45° по часовой стрелке и плоскость поляризации волны повернется в ту же сторону еще на 45°). В результате вектор электрического поля оказывается ориентированным параллельно широким стенкам волновода в плече *1*[1]) и перпендикулярно узким стенкам в плече *3*. При такой ориентации вектора **E** энергия волны H_{10} полностью поступает в плечо *3*. Аналогичным образом можно показать, что из плеча *3* волна поступает в плечо *4*, а из *4* в *1*. Таким образом, устройство, изображенное на рис. 22.12.1, является четырехплечным циркулятором. Изменение ориентации внешнего магнитного поля на обратное влечет за собой изменение направления циркуляции.

Сложность конструкции циркулятора, значительные габариты и относительная узкополосность обусловили сравнительно редкое применение в аппаратуре циркулятора, основанного на эффекте Фарадея.

22.11. Фазовые циркуляторы

Основным элементом фазовых циркуляторов является невзаимный фазовращатель, представляющий собой отрезок прямоугольного волновода с тонкой ферритовой пластиной, помещенной, как и в случае резонансного вентиля, в сечении с круговой поляризацией магнитного поля волны H_{10} (рис. 22.8.1). Однако напряженность внешнего магнитного поля H_0 выбирается так, чтобы избежать значительного поглощения энергии волны $\dot{\mathbf{H}}^+$ в феррите. При этом, как было показано в разд. 22.3, по отношению к волнам $\dot{\mathbf{H}}^+$ и $\dot{\mathbf{H}}^-$ намагниченный феррит ведет себя как среда с различной магнитной проницаемостью. В результате коэффициенты распространения прямой и обратной волн в таком волноводе оказыва-

[1]) В плече 1 возбуждается волна H_{01}, для которой волновод является предельным.

ются различными. Если длина отрезка волновода с ферритом равна l, то волна с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^+$, пройдя этот отрезок, получит фазовый сдвиг

$$\varphi^+ = \beta^+ l, \qquad (22.11.1)$$

а волна с поляризацией $\dot{\mathbf{H}}^-$

$$\varphi^- = \beta^- l. \qquad (22.11.2)$$

Разность фаз

$$\Delta\varphi = \varphi^- - \varphi^+ \qquad (22.11.3)$$

называется *невзаимным фазовым сдвигом.* Во взаимных устройствах $\Delta\varphi = 0$. Невзаимные фазовращатели в сочетании с волноводными мостами дают возможность реализовать различные типы циркуляторов. Рассмотрим одну из возможных схем, получившую широкое применение: фазовый циркулятор на двух щелевых мостах (рис. 22.11.1). На рис. 22.11.1 изображен постоянный магнит, намагничивающий ферритовую пластину.

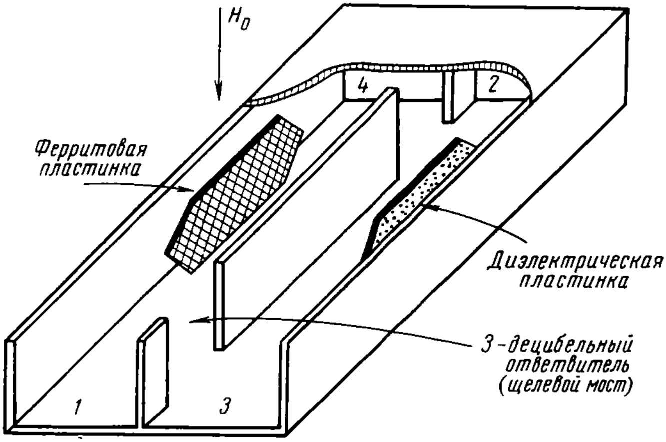


Рис. 22.11.1

При возбуждении плеча 1 энергия электромагнитной волны первым щелевым мостом делится пополам. Волны с равной амплитудой (см. рис. 22.11.2) поступают на вход волновода с намагниченной ферритовой пластиной и на вход волновода с диэлектрической пластиной. Сдвиг фаз между этими полями, как было показано в разд. 21.4, равен $\pi/2$. Параметры ферритового элемента подбираются таким образом, чтобы величина невзаимного фазового сдвига была равна π, т. е.

$$\varphi^- = \varphi^+ + \pi. \qquad (22.11.4)$$

Размеры диэлектрической пластины, ее параметры и расположение в волноводе выбираются из условия, чтобы фазовый сдвиг, получаемый волной в отрезке волновода с диэлектриком, был равен

$$\varphi_0 = \varphi^+ . \tag{22.11.5}$$

При этом на вход второго щелевого моста поступают две волны со сдвигом фазы в 90° и равной амплитуды. В результате вся энергия проходит в плечо *2*, так как сдвиг фаз между полями, возбуждаемыми в плече *4*, получается равным 180° (рис. 22.11.2).

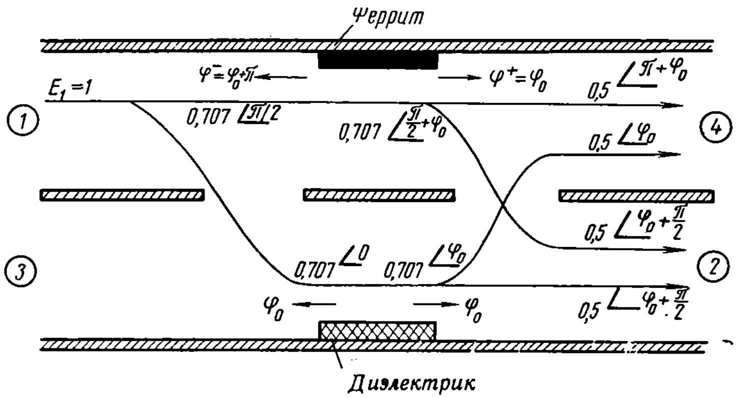


Рис. 22.11.2

Если возбудить волну H_{10} на входе плеча *2*, то вся энергия поступит в плечо *3*, поскольку, проходя отрезок волновода с ферритом, волна приобретает фазовый сдвиг на 180° больший, чем в отрезке волновода с диэлектриком. Рассуждая таким же образом, можно убедиться, что сигнал проходит через циркулятор в последовательности *1→2→3→4→1*. На аналогичном принципе строятся фазовые циркуляторы, в которых вместо щелевых мостов используются двойные волноводные тройники, кольцевые мосты и др.

Важным достоинством фазовых циркуляторов является их широкополосность и пригодность для работы на высоком уровне мощности. Последнее объясняется тем, что ферритовые пластины невзаимного фазовращателя можно наклеить на широкую стенку волновода и тем самым обеспечить хороший отвод тепла от ферритов. Основными недостатками фазовых циркуляторов описанного типа являются сравнительно большие габариты и вес.

22.12. *Y*-циркуляторы

Волноводный *Y*-циркулятор представляет собой симметричное *H*-плоскостное сочленение трех прямоугольных волноводов, в центр которого помещен ферритовый цилиндр (рис. 22.12.1). Внешнее магнитное поле, создаваемое постоянными магнитами, либо электромагнитом, ориентировано параллельно оси цилиндра. Высота ферритового цилиндра может быть несколько меньше высоты волновода. В Y-циркуляторах, предназначенных для работы на высоком уровне мощности, для улучшения отвода тепла ферритовый цилиндр разрезают на две половинки, каждая из которых приклеивается к соответствующей широкой стенке волновода в центре Y-сочленения (рис. 22.12.2).

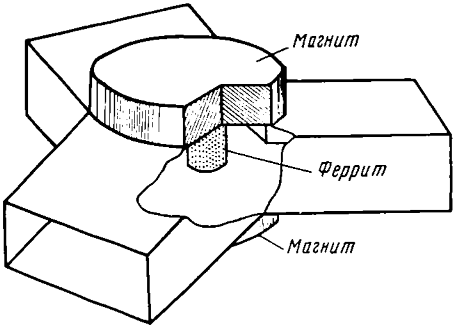


Рис. 22.12.1

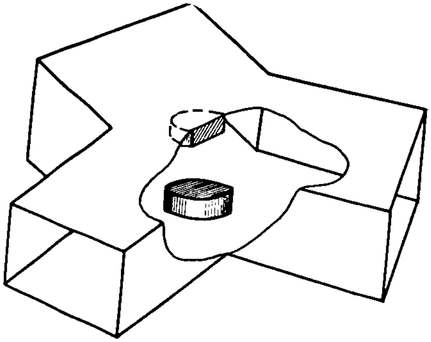


Рис. 22.12.2

Отсутствие энергии в одном из плеч Y-циркулятора свидетельствует о том, что под влиянием ферритового элемента в Y-сочленении устанавливается такая структура электромагнитного поля, при которой становится невозможным возбуждение волны типа H_{10} в этом плече. Процесс образования требуемой структуры поля можно описать следующим образом. Предположим, что в плече 1 Y-циркулятора возбуждена электромагнитная волна H_{10}, распространяющаяся в направлении к ферритовому цилиндру (рис. 22.12.3). На участке волновода с ферритом распространяющаяся волна распадается на две волны, одна из которых (левая) обегает ферритовый цилиндр по часовой стрелке, а другая (правая) против часовой стрелки. При рассмотрении ферритового вентиля в разд. 22.9 было показано, что направление вращения вектора магнитного поля волны в правой относительно центра половине волновода и левой половине противоположно. Поэтому магнитная проницаемость ферритового цилиндра для волн, обегающих его справа и слева, различна. Это обусловливает различие в коэффициентах распространения каждой из волн, т. е. проходя один и тот же путь вдоль поверхности феррита, волны получают различный фазовый сдвиг φ^+ и φ^-:

$$\varphi^+ = \beta^+ l;$$

$$\varphi^- = \beta^- l,$$

где l — путь, проходимый каждой из волн вдоль поверхности феррита.

Энергия в одном из плеч циркулятора, например плече *3*, не возбудится, если правая и левая волны приходят на вход этого плеча в противофазе. В то же время, чтобы вся энергия из плеча *1* перешла в плечо *2*, правая и левая волны должны быть синфазны

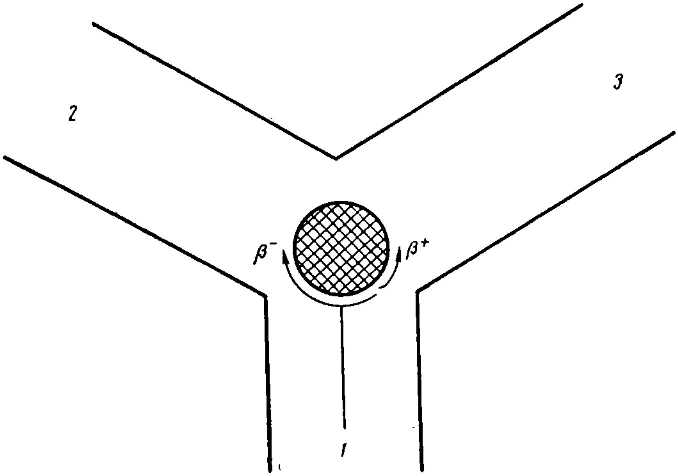


Рис. 22.12.3

на входе плеча *2*. Следовательно, две бегущие навстречу друг другу по поверхности ферритового цилиндра волны должны образовать на его поверхности стоячую волну электрического поля, причем один из узлов поля должен быть расположен напротив плеча *3*, а одна из пучностей — напротив плеча *2*. Распределение амплитуд электрического поля, удовлетворяющее этим требованиям, изображено на рис. 22.12.4*а*.

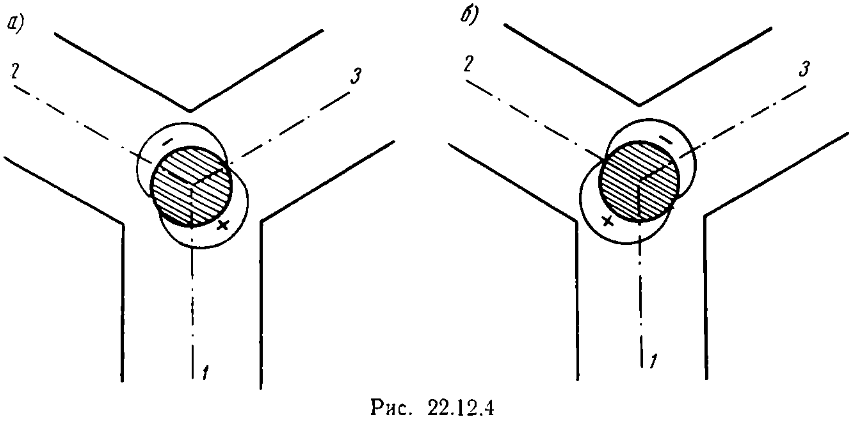
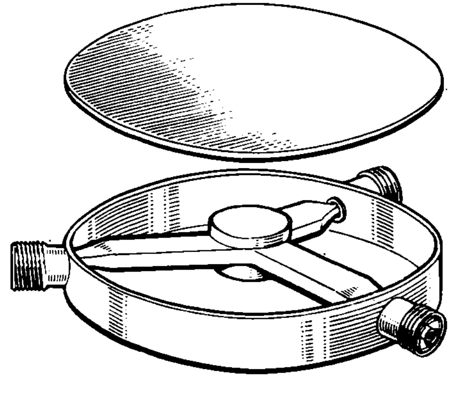


Рис. 22.12.4

В плече 3 при такой структуре поля возбуждается волна H_{20}, являющаяся волной высшего типа для прямоугольных волноводов, образующих Y-сочленение, что и обеспечивает отсутствие энергии в плече 3. Аналогично можно показать, что энергия из плеча 2 поступает в плечо 3 и т. д.

Если изменить направление внешнего магнитного поля, приложенного к ферритовому цилиндру, на противоположное, то поменяются местами волны $\dot{H}^{+}$ и $\dot{H}^{-}$, структура поля на поверхности феррита изменится так, что узел электрического поля совпадет с осью волновода в плече 2 (рис. 22.12.4б). Направление циркуляции изменится на противоположное (1→3→2→1).



Принцип действия полоскового варианта Y-циркулятора (рис. 22.12.5) несколько отличен от принципа действия волноводного варианта. Как показало теоретическое и экспериментальное исследование, в полосковой

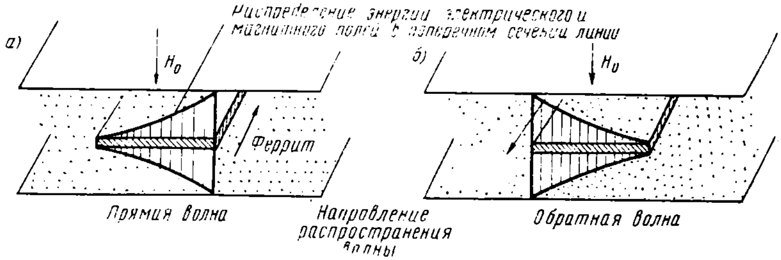


Рис. 22.12.5

линии, заполненной поперечно намагниченным ферритом, наблюдается эффект смещения поля: если у прямой волны максимум электрического и магнитного полей смещается к правому краю центрального проводника (рис. 22.12.5а), то у обратной волны тот же самый максимум оказывается уже у левого края центрального проводника (рис. 22.12.5б). Поэтому после приложения внешнего магнитного поля бóльшая часть энергии поступает в то плечо циркулятора, в сторону которого смещается максимум электрического и магнитного полей. Чтобы уменьшить амплитуду отраженной волны на границе раздела феррит-диэлектрик, на ферритовый диск одевают кольцо из диэлектрика, выполняющего роль согласующего четвертьволнового трансформатора.

Из всех видов циркуляторов, существующих в настоящее время, Y-циркуляторы получили наиболее широкое применение, что объясняется простотой их конструкции, малыми размерами и весом. Кроме того, Y-циркуляторы являются весьма широкополосными устройствами. Рабочая полоса волноводных Y-циркуляторов достигает 30%, а полосковых — октавы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения относительной диэлектрической проницаемости некоторых веществ

Вещество		Вещество	ε
Воздух	1,0006	Стеатит	6,2
Полиэтилен	2,25	Вода (дистиллированная)	81,1
Полистирол	2,55	Титанат бария ($BaTiO_3$)	. . .
Кварц	4,5	$f=1{,}5$ *Мгц*	1500
Стекло	$3\div10$	$f=9{,}5$ *Ггц*	300

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения относительной статической магнитной проницаемости некоторых веществ

Парамагнетики			
Вещество	μ	Вещество	μ
Азот	1,00000001	Алюминий	1,000023
Воздух	1,00000038	Вольфрам	1,000176
Кислород	1,0000019	Кислород (жидкий)	1,0034
Диамагнетики			
Вещество	μ	Вещество	μ
Водород	0,999999937	Стекло	0,9999876
Вода	0,999991	Кварц	0,9999849
Медь	0,9999897	Висмут	0,999824

Ферромагнетики	
Вещество	μ
Чугун отожженный	$2\cdot10^3$
Трансформаторное железо	10^4
Пермаллой (78% Ni, 22% Fe)	$8\cdot10^4$
Чистое железо после отжига в водороде	$2{,}8\cdot10^5$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Удельные проводимости некоторых веществ при 20°С (в сим/м)

Проводники		Диэлектрики	
Вещество	σ	Вещество	σ
Серебро	$6,14 \cdot 10^7$	Кварц плавлен.	$2 \cdot 10^{-17}$
Медь (холоднотян.)	$5,65 \cdot 10^7$	Слюда	10^{-13}—10^{-11}
Алюминий	$3,54 \cdot 10^7$	Фарфор	$3 \cdot 10^{-13}$
Железо	$1,0 \cdot 10^7$	Стекло (обычн.)	10^{-12}

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Формулы векторного анализа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Поток **a** через поверхность S:

$$\Phi = \int_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_S a_n dS, \tag{П.4.1}$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$; n_0 — орт нормали к поверхности S.

Циркуляция вектора **a** по контуру **Г**:

$$Ц = \oint_Г \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \oint_Г a_l dl, \tag{П.4.2}$$

где dl — элемент замкнутого контура **Г**; a_l — касательная к контуру составляющая вектора **a**.

Градиент скалярной функции u.

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{n}_0 \frac{\partial u}{\partial n}, \tag{П.4.3}$$

где $\mathbf{n}_0$ — орт нормали к поверхности u=const.

Дивергенция вектора **a**:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{\Delta V}, \tag{П.4.4}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем ΔV.

Ротор вектора **a**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S [n_0, \mathbf{a}] dS}{\Delta V}, \tag{П.4.5}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем ΔV, а $\mathbf{n}_0$ — орт внешней нормали к поверхности S.

Проекция ротора вектора **a** на произвольное направление $\mathbf{n}_0$:

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\int_Г \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{\Delta S}, \tag{П.4.6}$$

где ΔS — плоская площадка, ограниченная контуром Г, расположенная перпендикулярно направлению вектора **a**.

ОПЕРАЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{x}_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial u}{\partial z}; \tag{П.4.7}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \tag{П.4.8}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{x}_0 \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{y}_0 \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right); \tag{П.4.9}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{П.4.10}$$

ОПЕРАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{r}_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial u}{\partial z}; \tag{П.4.11}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \tag{П.4.12}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{r}_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right] + \boldsymbol{\varphi}_0 \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] + \mathbf{z}_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right]; \tag{П.4.13}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{П.4.14}$$

ОПЕРАЦИИ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{r}_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \boldsymbol{\Theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \tag{П.4.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) \right] + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta\, a_\theta) \right]; \tag{П.4.16}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{r}_0 \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta\, a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] +$$

$$+ \boldsymbol{\Theta}_0 \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right]; \tag{П.4.17}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{П.4.18}$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \oint_S \mathbf{a}\, d\mathbf{S}. \tag{П.4.19}$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{a}\, d\mathbf{l}. \tag{П.4.20}$$

Теорема Грина:

$$\int_V (\nabla\psi\,\nabla\varphi + \psi\,\nabla^2\varphi)\,dV = \oint_S \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS; \qquad (\Pi.4.21)$$

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\,dV = \oint_S \left(\psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS. \qquad (\Pi.4.22)$$

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi; \qquad (\Pi.4.23)$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = (\mathbf{a},\ \operatorname{grad}\varphi) + \varphi\operatorname{div}\mathbf{a}; \qquad (\Pi.4.24)$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}; \qquad (\Pi.4.25)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0; \qquad (\Pi.4.26)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u = 0; \qquad (\Pi.4.27)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}; \qquad (\Pi.4.28)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = [\operatorname{grad}\varphi,\ \mathbf{a}] + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a}; \qquad (\Pi.4.29)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{u} = \nabla^2 u. \qquad (\Pi.4.30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., Связьиздат, 195/.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 196
3. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука» 1970.
4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Советское радио», 1957.
5. Власов А. А. Макроскопическая электродинамика. ГИТТЛ, 1955.
6. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. М., «Энергия», 1968.
7. Говорков В. А., Купалян С. Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. М., «Высшая школа», 1970.
8. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М., «Советское радио», 1971.
9. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М., Физматгиз, 1960.
10. Зоммерфельд А. Электродинамика. М., ИЛ, 1958.
11. Калантаров П. Л. и Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники. Ч. III. М., Госэнергоиздат, 1959.
12. Ковалев И. С. Теория и расчет полосковых волноводов. Минск, «Наук и техника», 1967.
13. Купалян С. Д. Теоретические основы электродинамики. Ч. III. М., «Энергия», 1970.
14. Лавров В. М. Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн. М., «Связь», 1964.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
16. Лебедев И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот. Т. 1. М., Госэнергоиздат, 1961.
17. Левин Л. Современная теория волноводов. М., ИЛ, 1954.
18. Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. М., «Советское радио», 1964.
19. Маттей Д. Л., Янг Л., Джонс Е. М. Т. Фильтры свч, согласующие цепи и цепи связи. Ч. I. М., «Связь», 1971.
20. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М., Госэнергоиздат, 1967.
21. Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л., Тиходеев Н. Н. Методы расчета электростатических полей. М., «Высшая школа», 1963.
22. Модель А. М. Фильтры свч в радиорелейных системах. М., «Связь», 1967.
23. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. М., «Высшая школа», 1964.

Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М., «Советское радио», 1948.

25. Рамо С. и Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике. ГИТТЛ, 1950.

Справочник по волноводам. Пер. с английского под ред. Фельда Я. Н. М., «Советское радио», 1952.

27. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.

28. Тамм И. Е. Основы теории электричества. ГИТТЛ, 1954.

29. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М., «Советское радио», 1962.

Фано Р. М. Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов. М., «Советское радио», 1965.

31. Фейман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Тт. 5, 6, 7. М., «Мир», 1966.

Фельдштейн А. Л. и Явич Л. Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на свч. М., «Связь», 1965.

Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П. Справочник по элементам волноводной техники. М., «Советское радио», 1967.

34. Харвей А. Ф. Техника сверхвысоких частот. Тт. 1—2. М., «Советское радио», 1965.

35. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.

36. Шимони К. Теоретическая электротехника. М., «Мир», 1964.

37. Ширман Я. Д. Радиоволноводы и объемные резонаторы. М., Связьиздат, 1959.

Владимир Иосифович Вольман, Юрий Вадимович Пименов
ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Редакторы *Т. Б. Котырева, Н. К. Логинова*

Техн. редактор *Е. Р. Ротермель* Корректор *Л. Н. Л*

Сдано в набор 31/VIII 1971 г. Подписано в печ. 3/XI
Форм. бум. 60×90/16 30,5 печ. л. 30,5 усл.-п. л. 30,51 уч.-
Т-17776 Тираж 28 000 экз. Зак. изд. 13395 Цена 1 р
Издательство «Связь», Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2

Типография издательства «Связь» Комитета по печати при Совете Министров С(
Москва-центр, ул. Кирова, 40. Зак. тип. 351